

Estudio teórico y numérico de la difracción en óptica electromagnética. VII. Resonancias en la transmisión por una rendija en el régimen de sublongitud de onda

O. Mata-Mendez, J. Avendaño y F. Chavez-Rivas

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Zacatenco, 07738, México D.F.

Recibido el 21 de junio de 2005; aceptado el 18 de abril de 2006

Utilizando una teoría rigurosa de la difracción estudiamos la transmisión de ondas planas en polarización TM que inciden sobre una rendija de longitud infinita y ancho l , perforada sobre una placa metálica de conductividad infinita y espesor h . Analizamos las resonancias que se presentan cuando la longitud de onda incidente λ es mayor que el ancho de la rendija ($\lambda > l$), es decir, en el régimen de sublongitud de onda. Efectuamos un análisis numérico del coeficiente de transmisión y de la energía difractada en la dirección normal a la placa en función de la longitud de onda incidente, del espesor de la placa y del ancho de la rendija. Hemos encontrado que ambas cantidades presentan valores anómalamente altos para determinadas longitudes de onda de la radiación incidente. Además, mostramos numéricamente que existen relaciones lineales entre las magnitudes resonantes y los parámetros optogeométricos del sistema, así como entre las mismas magnitudes resonantes. En particular, obtenemos el resultado que en condiciones de resonancia el cociente del coeficiente de transmisión y de la energía difractada normalmente es igual al número “mágico” π , cuando la longitud de onda es mucho mayor que el ancho de la rendija.

Descriptores: Difracción; resonancias ópticas; régimen de sublongitud de onda.

Using a rigorous theory we study the diffraction of TM-polarized plane waves by a slit of width l in a screen of infinite conductivity and thickness h . We have determined the resonances that appear when the incident wavelength is bigger than the slit width (subwavelength regime). We analyze numerically the transmission coefficient and the normally diffracted energy as functions of the incident wavelength, the screen thickness, and the slit width. We have found that both quantities present high anomalous values (resonances) for certain incident wavelengths radiation. Also, we show numerically that there are linear relationships between the resonant amplitudes and the optogeometrical parameters of the system, as well as among the same resonant magnitudes.

Keywords: Diffraction; optical resonances; subwavelength regime.

PACS: 42.25.Fx; 42.10.H.C.

1. Introducción

Desde la publicación del artículo de Ebbesen *et al.* [1], en el que reportan coeficientes de transmisión extraordinariamente altos para una placa metálica con un arreglo bidimensional y periódico de agujeros, cuyas dimensiones a lo largo del plano de la placa son mucho menores que la longitud de onda incidente (régimen de sublongitud de onda), se ha generado una intensa investigación experimental y teórica al respecto, tanto en arreglos bidimensionales [1-3], como en análogos unidimensionales (rendijas infinitas de ancho finito) [4-12]. Estas resonancias han atraído mucho interés, tanto desde el punto de vista fundamental como de las aplicaciones potenciales a la fotolitografía, microscopía de campo cercano, filtros de longitud de onda modulables, moduladores ópticos, dispositivos fotónicos [3,8,13-14]. Debemos mencionar que a nuestro conocimiento esta alta transmisión de la energía sólo se presenta en el caso de polarización T.M.

El origen de esta anómala transmisión de energía ha estado sujeto a un interesante debate entre la comunidad de especialistas sin haber llegado aún a un consenso. La física detrás de estas resonancias permanece solamente parcialmente esclarecida, lo cual se refleja en la existencia de varios modelos teóricos que tratan de explicar el fenómeno resonante. Tres ideas físicas se encuentran fundamentalmente detrás de estos

modelos. La más admitida responsabiliza a los plasmones de superficie en ambos lados de la placa metálica, cuyas resonancias son estimuladas por la periodicidad de los agujeros o rendijas. Una segunda idea se basa en la “vieja” teoría de Ewald para la “anómalamente” alta transmisión de rayos-X cuando son difractados por cristales. Una tercera idea, propuesta específicamente para los arreglos de rendijas, sugiere que tales rendijas operan como una especie de cavidades abiertas resonantes tipo Fabry-Perot, actuando de esta manera como una eficiente guía de onda.

Más recientemente se ha estudiado teórica [15-17] y experimentalmente [18-20] la transmisión por una sola rendija en la región de sublongitud de onda, indicando este término que el ancho de la rendija es menor que la longitud de onda incidente. Encontrándose de igual manera resonancias en la transmisión para ciertas longitudes de onda, también se ha encontrado que para estas resonancias la intensidad del campo en el interior de la rendija se incrementa apreciablemente, además, se tiene que estas propiedades resonantes de la rendija pueden ser controladas ajustando el ancho de la rendija. Esta última observación ha permitido empezar a desarrollar técnicas eficientes para caracterizar la permitividad eléctrica de nuevos materiales en la región de microondas usando pequeñas cantidades del material, lo cual no es posible empleando las técnicas convencionales [17,18].

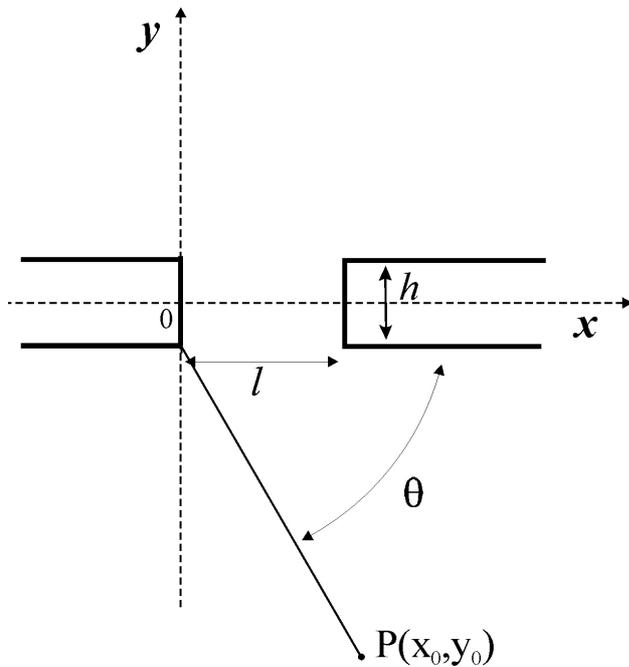


FIGURA 1. Nuestro sistema. Una rendija de ancho l y de longitud infinita paralela al eje Oz , perforada en una placa metálica de conductividad infinita y espesor h . Una onda plana en polarización TM incide normalmente sobre la placa.

En este trabajo nuestro interés se centra en el comportamiento general de las resonancias de la rendija más que en la comparación precisa con datos experimentales. Para esto, utilizando una teoría rigurosa de la difracción [21] estudiamos las propiedades de la transmisión en polarización TM para una sola rendija infinita de ancho l perforada sobre una placa de conductividad infinita y espesor h . Hemos encontrado que no solamente el coeficiente de transmisión presenta resonancias, sino también la energía difractada en la dirección normal a la placa.

Hallamos el interesante resultado siguiente: en condiciones de resonancia el cociente del coeficiente de transmisión y de la energía difractada en dirección normal a la pantalla está dado por el número π . Es importante mencionar que en la Ref. 22 se ha mostrado que fuera del régimen de sublongitud de onda este cociente es igual a la longitud de onda, lo cual nos indica que este valor de π es una característica de las resonancias. Este bello resultado nos muestra como el número "mágico" π interviene en estos problemas de difracción anómala.

Además, mostramos que tanto el coeficiente de transmisión resonante (τ_{res}) como la energía difractada normal resonante (E_{res}) y la longitud de onda resonante (λ_{res}) se escalan linealmente con el espesor de la placa metálica cuando se mantiene constante el ancho de la rendija. También determinamos que τ_{res} y E_{res} tienen una dependencia lineal con λ_{res} y son inversamente proporcionales al ancho de la rendija.

2. Modelo teórico

Tenemos una placa metálica de espesor h , la cual se hace coincidir con el plano XZ de un sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$. En la placa se tiene una rendija de longitud infinita paralela al eje Oz y de ancho l (Fig. 1). La radiación incidente consiste de una onda plana de amplitud unidad y polarización TM (campo magnético paralelo al eje Oz), cuya dirección de propagación es normal a la placa. Supondremos en lo que sigue la dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$.

La geometría del sistema implica que éste es invariante ante traslaciones paralelas al eje Oz , puesto que ni el campo incidente ni la estructura difractante se modifican cuando se efectúa una de estas traslaciones. Esto implica que si el campo electromagnético $\mathbf{E}(x,y,z)$ y $\mathbf{H}(x,y,z)$ es solución de las ecuaciones de Maxwell para esta geometría, también lo serán $\mathbf{E}(x,y,z')$ y $\mathbf{H}(x,y,z')$ para toda $z' \neq z$. La unicidad de la solución implica entonces que el campo electromagnético no depende de la coordenada z . Ante estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell se reducen a dos conjuntos de ecuaciones independientes, uno corresponde a la polarización transversal magnética TM (campo magnético paralelo al eje Oz) que contiene las componentes $H_z(x,y)$, $E_x(x,y)$ y $E_y(x,y)$ del campo electromagnético:

$$\nabla^2 H_z(x,y) + k^2 H_z(x,y) = 0, \quad (1)$$

$$E_x(x,y) = \frac{i}{\omega\epsilon_0} \frac{\partial H_z(x,y)}{\partial y}, \quad (2)$$

$$E_y(x,y) = -\frac{i}{\omega\epsilon_0} \frac{\partial H_z(x,y)}{\partial x}, \quad (3)$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ es la magnitud del vector de onda, μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del vacío, respectivamente. A la Ec. (1) se le conoce con el nombre de ecuación de Helmholtz bidimensional. El otro conjunto de ecuaciones corresponde a la polarización transversal eléctrica TE (campo eléctrico paralelo al eje Oz) caracterizada por las componentes del campo electromagnético $E_z(x,y)$, $H_x(x,y)$ y $H_y(x,y)$, donde la componente E_z satisface también la ecuación de Helmholtz y las componentes H_x y H_y del campo magnético satisfacen relaciones semejantes a las Ecs. (2) y (3). Esta descomposición de las ecuaciones de Maxwell implica que la polarización se conserva en esta geometría, es decir, si el campo incidente tiene polarización TM (TE) el campo difractado tendrá polarización TM (TE) también.

Para resolver la ecuación de Helmholtz dada por la Ec. (1), la geometría del sistema sugiere que es conveniente trabajar la coordenada x en su espacio de Fourier y mantener la coordenada y en el espacio real:

$$H_z(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}(\alpha,y) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (4)$$

Por consiguiente la solución en la región $y > h/2$ es

$$H_z^>(x, y) = H_z^{in}(x, y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta(\alpha)y)} d\alpha, \quad (5)$$

donde el campo incidente está dado por $H_z^{in} = \exp(-iky)$. Y en la región $y < -h/2$ la solución es

$$H_z^<(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta(\alpha)y)} d\alpha, \quad (6)$$

donde $\beta(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ con $\beta(\alpha) \geq 0$ ó $\beta(\alpha)/i > 0$. Tenemos que $r(\alpha)$ y $t(\alpha)$ son las distribuciones espectrales de amplitudes de la onda difractada en reflexión y transmisión, respectivamente.

Si denotamos por $H_z^0(x, y)$, $E_x^0(x, y)$, $E_y^0(x, y)$ las componentes del campo electromagnético en la rendija, las condiciones de frontera del campo electromagnético nos dicen que:

- i) la componente tangencial del campo magnético H_z es continua solamente en la rendija, es decir,

$$H_z^>(x, h/2) = H_z^0(x, h/2) \quad \forall x \in (0, l), \quad (7)$$

$$H_z^<(x, -h/2) = H_z^0(x, -h/2) \quad \forall x \in (0, l); \quad (8)$$

- ii) la componente tangencial del campo eléctrico E_x es continua tanto en la rendija como sobre la placa metálica, de acuerdo a la Ec. (2) podemos escribir esta condición de frontera como

$$\frac{\partial H_z^>}{\partial y}(x, h/2) = \frac{\partial H_z^0}{\partial y}(x, h/2) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z^<}{\partial y}(x, -h/2) = \frac{\partial H_z^0}{\partial y}(x, -h/2) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty); \quad (10)$$

- iii) la componente tangencial del campo eléctrico E_y se anula sobre la placa metálica de conductividad infinita en $x = 0$ y $x = l$ siempre que $y \in (-h/2, +h/2)$, luego, de la Ec. (3) esta condición de frontera se puede escribir como

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial H_z^0}{\partial x}(l, y) = 0 \quad \forall y \in (-h/2, +h/2). \quad (11)$$

Además, tenemos el resultado que la ecuación de Helmholtz en el interior de la rendija acepta separación de variables $H_z^0(x, y) = \phi(x)\eta(y)$, donde $\phi(x)$ y $\eta(y)$ satisfacen

ambas la ecuación de Helmholtz unidimensional:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \kappa^2\phi(x) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2\eta(y)}{dy^2} + \mu^2\eta(y) = 0, \quad (13)$$

de donde se sigue que las constantes de separación de variables cumplen la relación

$$\kappa^2 + \mu^2 = k^2. \quad (14)$$

La ecuación para $\phi(x)$ con la condición de frontera heredada de aquella dada por la Ec. (11) satisface un problema de eigenvalores con condiciones de frontera de Neumann:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \kappa^2\phi(x) = 0, \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0 = \frac{d\phi}{dx}(l), \quad (15)$$

las eigenfunciones y eigenvalores de este problema son

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \cos(\kappa_n x) & \text{si } x \in (0, l) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, l) \end{cases}, \quad \kappa_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Por lo tanto, la solución general para $H_z^0(x, y)$ se puede entonces escribir como

$$H_z^0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\mu_n y) + b_n \text{sen}(\mu_n y)) \phi_n(x), \quad (17)$$

donde $\mu_n = \sqrt{k^2 - (n\pi/l)^2}$ de acuerdo a la Ec. (14).

Por otro lado tenemos que $H_z^0(x, y)$ satisface las condiciones de frontera dadas por Ecs. (7)-(10). Las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (9)-(10) al ser válidas $\forall x \in (-\infty, \infty)$, son heredadas por las derivadas de las correspondientes transformadas de Fourier [Ec. (4)], esto es,

$$\frac{\partial \tilde{H}_z^>}{\partial y}(\alpha, h/2) = \frac{\partial \tilde{H}_z^0}{\partial y}(\alpha, h/2), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z^<}{\partial y}(\alpha, -h/2) = \frac{\partial \tilde{H}_z^0}{\partial y}(\alpha, -h/2), \quad (19)$$

las cuales nos permiten escribir las distribuciones espectrales de amplitudes de la onda difractada en reflexión y transmisión en función de los coeficientes modales a_n y b_n dados en la Ec. (17)

$$r(\alpha) = e^{-i\beta(\alpha)\frac{h}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{i\beta(\alpha)} \times \left(-a_n \text{sen}\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) + b_n \cos\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) \right) \tilde{\phi}_n(\alpha) + \sqrt{2\pi} e^{i[\beta(\alpha)-k]y} \delta(\alpha) e^{-i\beta(\alpha)h} \quad (20)$$

$$t(\alpha) = -e^{-i\beta(\alpha)\frac{h}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{i\beta(\alpha)} \times \left(a_n \text{sen}\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) + b_n \cos\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) \right) \tilde{\phi}_n(\alpha) \quad (21)$$

donde

$$\tilde{\phi}_n(\alpha) = \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - (-1)^n e^{-i\alpha l}}{(n\pi/l)^2 - \alpha^2} \quad (22)$$

es la transformada de Fourier de las funciones $\phi_n(x)$ dadas en la Ec. (16). La continuidad del campo magnético H_z solamente en la rendija [Ecs. (7)-(8)], nos permite definir dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ idénticamente cero en la frontera superior e inferior de la rendija, respectivamente, mediante las siguientes definiciones:

$$f(x) \equiv H_z^>(x, h/2) - H_z^0(x, h/2) = 0, \quad (23)$$

$$g(x) \equiv H_z^<(x, -h/2) - H_z^0(x, -h/2) = 0, \quad (24)$$

las cuales se pueden expresar como una superposición de las eigenfunciones $\phi_n(x)$, puesto que éstas forman una base:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \phi_n(x) = 0, \\ g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n \phi_n(x) = 0; \end{aligned} \quad (25)$$

los coeficientes f_n y g_n son todos cero por supuesto. Y al utilizar el teorema de Parserval-Plancherel obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} f_n &= \langle \tilde{\phi}_n(\alpha), \tilde{f}(\alpha) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_n^*(\alpha) \tilde{f}(\alpha) d\alpha = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} g_n &= \langle \tilde{\phi}_n(\alpha), \tilde{g}(\alpha) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_n^*(\alpha) \tilde{g}(\alpha) d\alpha = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

donde $\tilde{f}(\alpha)$ y $\tilde{g}(\alpha)$ son las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ dadas en la Ec. (25), respectivamente. Con esto tenemos que las Ecs. (26) y (27) forman un sistema de dos ecuaciones matriciales acopladas para los coeficientes a_n y b_n , el cual se puede desacoplar de manera directa obteniendo dos ecuaciones matriciales independientes, una para los coeficientes a_n y la otra para los b_n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \cdots \\ A_{10} & A_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & \cdots \\ B_{10} & B_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (28)$$

donde los elementos de matriz vienen dados por

$$\begin{aligned} A_{mn} &= (1 + \delta_{n0}) \delta_{mn} l \cos(\mu_n \frac{h}{2}) \\ &\quad - \mu_n \text{sen}(\mu_n \frac{h}{2}) \left\langle \tilde{\phi}_m(\alpha), \frac{2i\tilde{\phi}_n(\alpha)}{\beta(\alpha)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} B_{mn} &= (1 + \delta_{n0}) \delta_{mn} l \text{sen}(\mu_n \frac{h}{2}) \\ &\quad + \mu_n \cos(\mu_n \frac{h}{2}) \left\langle \tilde{\phi}_m(\alpha), \frac{2i\tilde{\phi}_n(\alpha)}{\beta(\alpha)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

$$S_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2le^{-ik\frac{h}{2}} & \text{si } m = 0 \end{cases}. \quad (31)$$

Debemos hacer notar que la evaluación de los términos de acoplamiento entre los modos dados por las integrales siguientes:

$$\begin{aligned} &\left\langle \tilde{\phi}_m(\alpha), \frac{2i\tilde{\phi}_n(\alpha)}{\beta(\alpha)} \right\rangle \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 [1 - (-1)^m e^{i\alpha l}] [1 - (-1)^n e^{-i\alpha l}]}{\sqrt{k^2 - \alpha^2} (\pi^2 m^2 / l^2 - \alpha^2) (\pi^2 n^2 / l^2 - \alpha^2)} d\alpha, \end{aligned} \quad (32)$$

es un proceso bastante delicado debido al violento comportamiento oscilatorio de los integrandos, este serio problema fue resuelto efectuando una apropiada distorsión del contorno de integración en el plano complejo como es mostrado detalladamente en la Ref. 21 para el caso de polarización TE.

Los coeficientes modales a_n y b_n son determinados a partir de los dos sistemas de ecuaciones matriciales dados en la Ecs. (28). Para esto multiplicamos el primer sistema por \mathbf{A}^{-1} y el segundo por \mathbf{B}^{-1} . Una vez determinados estos coeficientes es posible calcular el campo H_z en el interior de la rendija mediante la Ec. (17), así como también las distribuciones de amplitudes $r(\alpha)$ y $t(\alpha)$ mediante las Ecs. (20) y (21), respectivamente. De estos resultados y de las Ecs. (5) y (6) calculamos los campos difractados en todos los puntos del espacio fuera de la rendija.

El método expuesto hasta aquí es exacto, el problema de la difracción se ha reducido a un problema de dos ecuaciones matriciales de dimensión infinita, la solución numérica de este sistema matricial requiere que las matrices infinitas \mathbf{A} y \mathbf{B} sean reemplazadas por matrices finitas. Este corte es implementado mediante el criterio de convergencia que checa la estabilidad numérica de los resultados conforme el número de modos (tamaño de las matrices) es incrementado, así como también el balance de energía.

Mediante una manipulación directa del vector de Poynting complejo, el flujo de energía difractado en el infinito ($y = -\infty$), el flujo de energía que incide sobre la rendija y la densidad de intensidad difractada en la dirección definida por el ángulo θ en la región de campo lejano (ver Fig.1)

están dados respectivamente por

$$F_E^{-\infty} = -Im \int_{-k}^{+k} \beta(\alpha) |t(\alpha)|^2 d\alpha, \tag{33}$$

$$F_E^{in} = -Im \int_0^l (H_z^{in}(x, h/2))^* \frac{\partial H_z^{in}(x, h/2)}{\partial y} dx = kl, \tag{34}$$

$$E(\theta) = k^2 \text{sen}^2(\theta) \left| \tilde{H}_z^0(k \cos \theta, -h/2) \right|^2. \tag{35}$$

El coeficiente de transmisión τ lo definimos en este trabajo como el flujo de energía difractada en el infinito normalizado al flujo de energía que incide sobre la rendija ($\tau = F_E^{-\infty} / F_E^{in}$).

3. Resultados numéricos y discusión

La Fig. 2 muestra el coeficiente de transmisión como función de la longitud de onda de la radiación incidente cuando el grosor de la placa metálica es $h=20\mu m$ y el ancho de la rendija es $l=0.5\mu m$. En esta figura podemos observar transmisiones de energía anómalas τ_{res} (que llamaremos “resonancias”) para determinados valores de la longitud de onda incidente λ_{res} , lo cual ocurre siempre que ésta sea mayor que el ancho de la rendija ($\lambda/l > 1$). Notamos que estas resonancias aumentan en intensidad conforme la relación λ_{res}/l aumenta. Vemos también que para valores de la longitud de onda fuera de los valores de resonancias λ_{res} el coeficiente de transmisión es prácticamente nulo. El número de resonancias es finito y nuestros experimentos numéricos muestran que este número depende del espesor de la placa h ; a mayor espesor mayor número de resonancias. Será de utilidad en lo que sigue enumerar las longitudes de onda resonantes de la Fig. 2 de derecha a izquierda, obteniéndose los siguientes valores $\lambda_{res1} = 42.7001$, $\lambda_{res2} = 21.1201$, $\lambda_{res3} = 13.9901$,

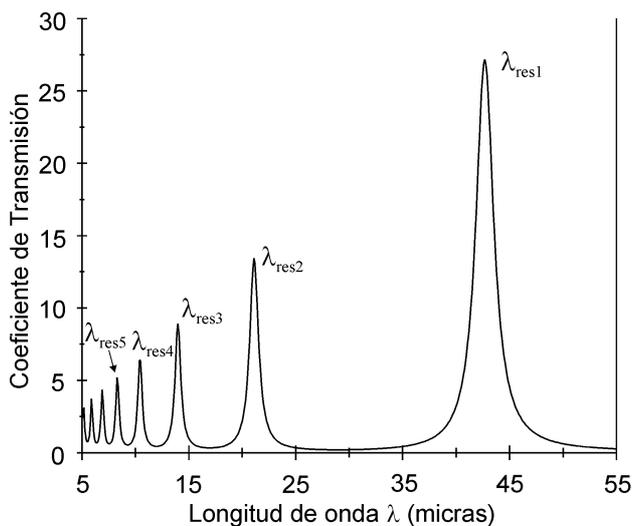


FIGURA 2. El coeficiente de transmisión τ como función de la longitud de onda, cuando $h=20\mu m$ y $l=0.5\mu m$.

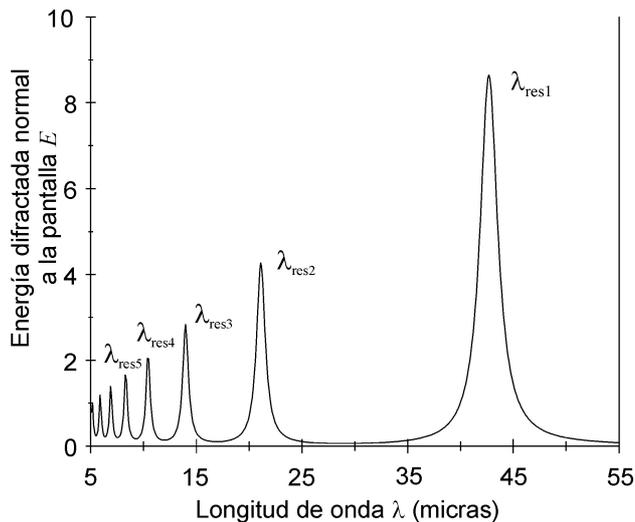


FIGURA 3. Energía difractada en la dirección normal E a la pantalla (normalizada a la energía incidente sobre la rendija) para los mismos parámetros de la Fig. 2.

$\lambda_{res4} = 10.4501$, $\lambda_{res5} = 8.3301$, $\lambda_{res6} = 6.9201$, $\lambda_{res7} = 5.9201$. En lo que sigue denotaremos por λ_{resi} , con $i = 1, \dots, 7$, estas resonancias. Sin embargo, como veremos a continuación, los valores específicos de las resonancias ($\lambda_{res}, \tau_{res}$, etc.) cambian cuando los parámetros h y l cambian.

En la Fig. 3 se muestra la energía difractada E en la dirección normal a la pantalla ($\theta = \pi/2$) también en función de la longitud de onda incidente para los mismos parámetros geométricos de la Fig. 2. Vemos claramente la presencia de resonancias al igual que para el coeficiente de transmisión, las cuales se presentan en los mismos valores de longitud de onda λ_{res} de la radiación incidente. En la Fig. 3 y en lo que sigue supondremos que la energía difractada normalmente a la pantalla E esta normalizada a la energía incidente sobre la rendija [ver Ec. (34)].

Puesto que en nuestro modelo no están presentes los plasmones de superficie, ni existe periodicidad alguna (recordemos que tratamos con una rendija en una pantalla de conductividad infinita), las resonancias que estamos observando en el coeficiente de transmisión y en la energía difractada en la dirección normal tienen un origen distinto. Además, hemos observado que el espesor de la placa juega un papel muy importante, pues el número de estas resonancias crece con el espesor h . Luego, considerando que nuestro modelo teórico es de difracción pura y rigurosa, estos resultados nos indican que las resonancias observadas se producen al establecerse (dependiendo del espesor de la placa) un régimen estacionario en el que se encuentra indisolublemente acoplado un fenómeno de resonancia tipo guía de onda al fenómeno de difracción.

Dadas las resonancias de la Figs. 2 y 3 con $l = 0.5\mu m$ y $h = 20\mu m$ hemos encontrado que estos valores resonantes cambian cuando el espesor de la pantalla h cambia (manteniendo fijo el ancho de la rendija), es decir, tenemos $\lambda_{res}(h)$,

$\tau_{res}(h)$ y $E_{res}(h)$. Hemos rastreado esta evolución para cada resonancia y en las Figs. 4 y 5 se muestran como cambia en estas nuevas resonancias su coeficiente de transmisión τ y su energía difractada en la dirección normal E como función del espesor de la pantalla, valores que hemos denotado por τ_{res} y $E_{res}(\pi/2)$, respectivamente. Observamos de estas figuras el siguiente comportamiento lineal con respecto al espesor de la pantalla:

$$\tau_{res} = m_{\tau}h + b_{\tau}, E_{res}(\frac{\pi}{2}) = m_Eh + b_E; \quad (36)$$

los ajustes por mínimos cuadrados de estas rectas están caracterizados por coeficientes de correlación con cuatros nueves. Creemos interesante presentar en las Tablas I y II las pendientes y ordenadas al origen de las rectas dadas en la Ec. (36), ya que podrían ser de utilidad para comparaciones futuras. Debemos mencionar que las longitudes de onda resonantes son función del espesor de la pantalla, $\lambda_{res}(h)$, luego, su valor

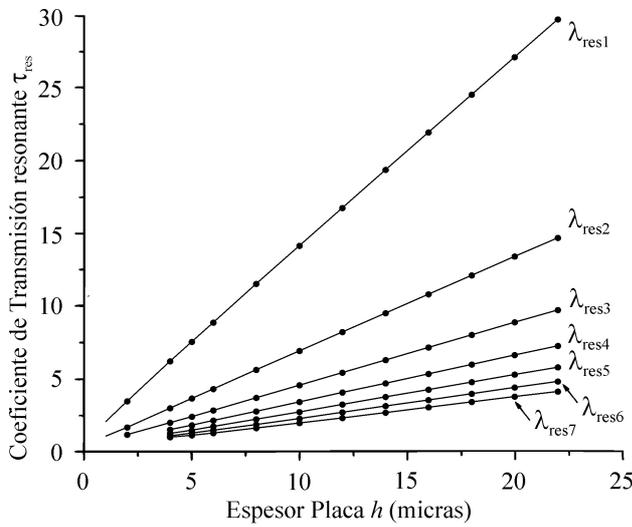


FIGURA 4. Evolución del coeficiente de transmisión resonante τ_{res} como función del espesor de la placa h , para $l=0.5\mu m$.

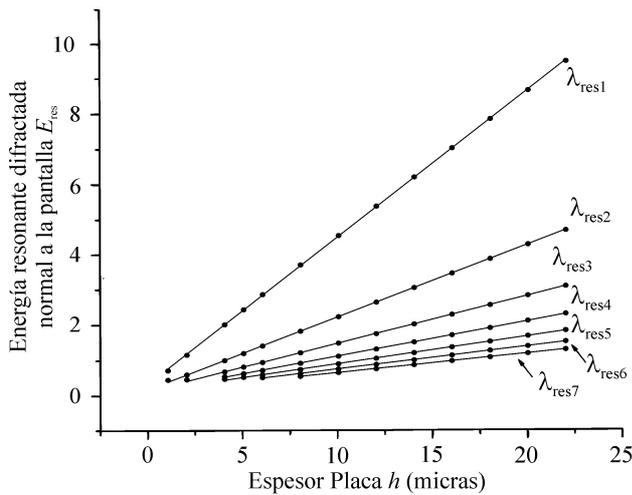


FIGURA 5. Evolución de la energía resonante difractada en la dirección normal a la pantalla E_{res} , para $l=0.5\mu m$.

TABLA I. Valores numéricos de los parámetros de las rectas $\tau_{res} = m_{\tau}h + b_{\tau}$ de la Fig. 4.

λ_{res}	m_{τ}	b_{τ}
λ_{res1}	1.30988	1.02664
λ_{res2}	0.65131	0.43931
λ_{res3}	0.43177	0.29026
λ_{res4}	0.32208	0.23243
λ_{res5}	0.25643	0.20380
λ_{res6}	0.21227	0.19650
λ_{res7}	0.18070	0.19663

TABLA II. Valores numéricos de los parámetros de las rectas $E_{res}(\frac{\pi}{2}) = m_Eh + b_E$ de la Fig. 5.

λ_{res}	m_E	b_E
λ_{res1}	0.4176	0.3176
λ_{res2}	0.2067	0.1516
λ_{res3}	0.1367	0.1074
λ_{res4}	0.1011	0.0982
λ_{res5}	0.0794	0.1022
λ_{res6}	0.0661	0.0862
λ_{res7}	0.0565	0.0769

TABLA III. Valores numéricos de los parámetros de las rectas $\lambda_{res} = m_{\lambda}h + b_{\lambda}$ de la Fig. 6.

λ_{res}	m_{λ}	b_{λ}
λ_{res1}	2.0585	1.5924
λ_{res2}	1.0292	0.5705
λ_{res3}	0.6854	0.3017
λ_{res4}	0.5122	0.2112
λ_{res5}	0.4094	0.1477
λ_{res6}	0.3406	0.1149
λ_{res7}	0.2914	0.0936

cambia a lo largo de cada recta, así que en estas tablas especificamos por λ_{resi} , con $i = 1, \dots, 7$ la resonancia de la Fig. 2, de la cual procede la correspondiente recta. Nuevamente observamos que en resonancia el comportamiento del coeficiente de transmisión y de la energía difractada normal son completamente análogos en su carácter cualitativo.

Ahora mostraremos como evolucionan los valores de las longitudes de onda de las resonancias etiquetadas como $\lambda_{res1}, \dots, \lambda_{res7}$ obtenidas de la Fig. 2 cuando cambia el espesor de la pantalla, pero manteniendo fijo el ancho de la rendija. En la Fig. 6 mostramos que estas resonancias evolucionan linealmente, teniéndose así

$$\lambda_{res} = m_{\lambda}h + b_{\lambda}, \quad (37)$$

donde cada recta de la Fig. 6 es rotulada por λ_{resi} , con $i = 1, \dots, 7$, para indicar de cual resonancia de la Fig. 2 pro-

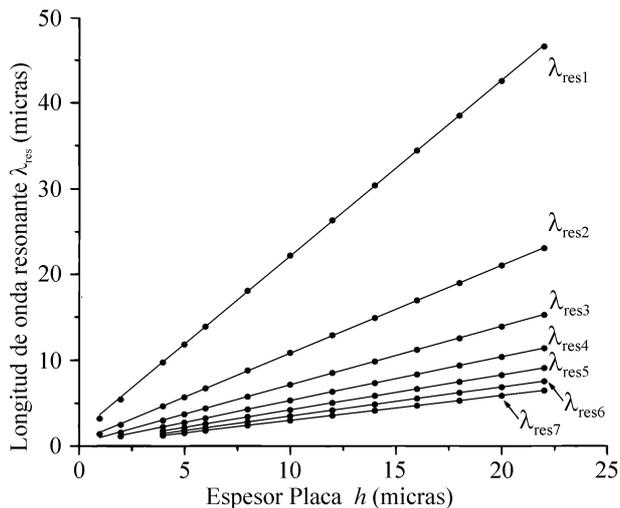


FIGURA 6. Evolución de las longitudes de onda resonantes resonante λ_{res} como función del espesor de la placa h , para $l=0.5\mu m$.

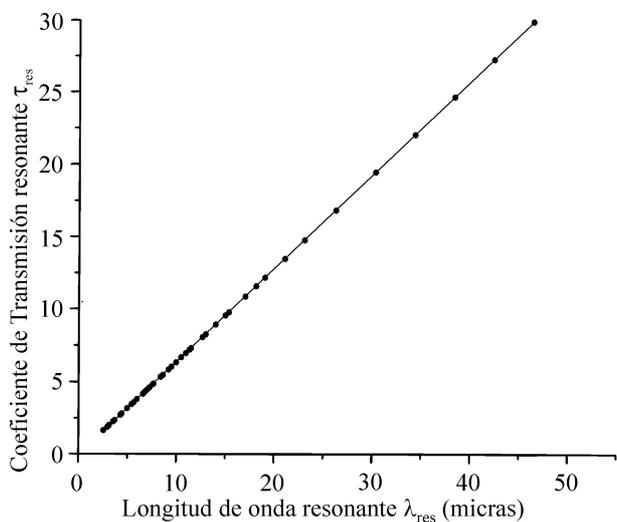


FIGURA 7. Gráfica de los puntos resonantes $(\lambda_{res}, \tau_{res})$, cuando $l=0.5\mu m$ y $h = 8, 10, 12, 14, 18, 20$ y $22 \mu m$.

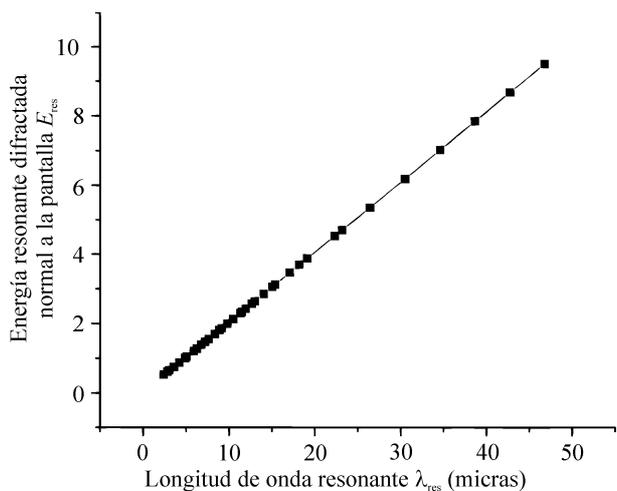


FIGURA 8. Gráfica de los puntos resonantes (λ_{res}, E_{res}) , para los mismos parámetros de la Fig. 7.

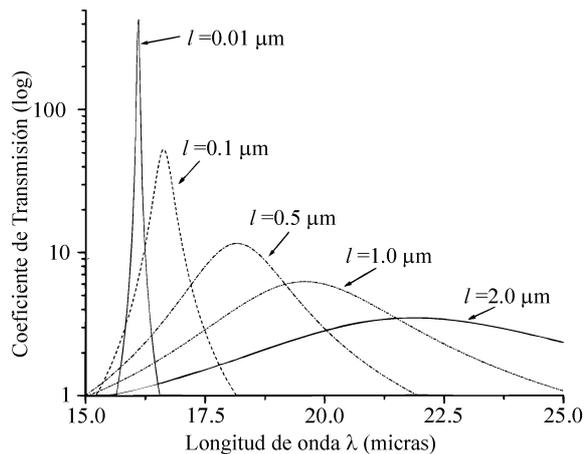


FIGURA 9. El coeficiente de transmisión τ como función de la longitud de onda λ para diferentes anchos de rendija l , cuando $h = 8 \mu m$.

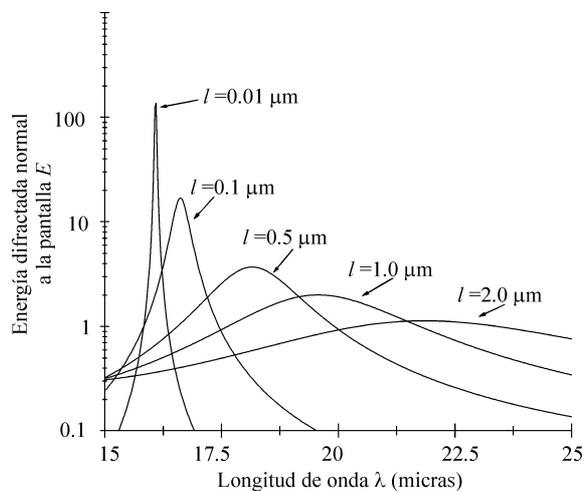


FIGURA 10. La energía difractada normal a la pantalla E como función de la longitud de onda λ para diferentes anchos de rendija l , cuando $h = 8 \mu m$.

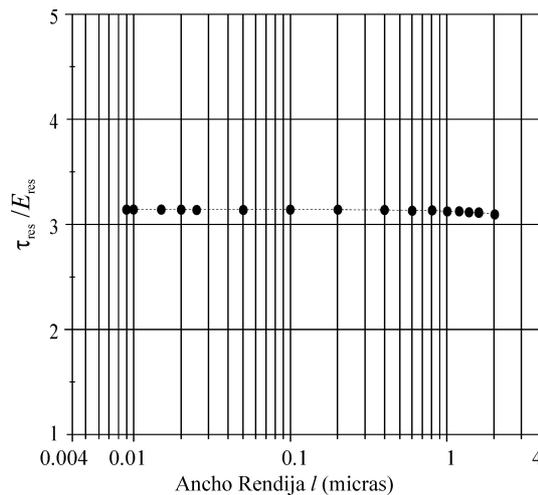


FIGURA 11. Gráfica del cociente del coeficiente de transmisión resonante y la densidad resonante de flujo de energía difractada en la dirección normal (τ_{res}/E_{res}) en función del ancho de la rendija l , para las resonancias de las Figs. 9 y 10.

cede. La Fig. 6 se ha obtenido a partir del cálculo numérico del coeficiente de transmisión, pero hemos verificado que se obtienen las mismas rectas si utilizamos la energía difractada normalmente a la pantalla. De nuevo por el interés de futuras comparaciones se presentan en la Tabla III los valores de m_λ y b_λ .

Además de las correlaciones lineales mostradas hemos encontrado otra en el curso de las simulaciones numéricas. Si graficamos todos los puntos $(\lambda_{res}, \tau_{res})$ para un espesor dado h y un ancho de rendija fijo, notamos que todos estos puntos caen sobre una línea recta, y si ahora mantenemos fijo el ancho de la rendija y calculamos las resonancias para un espesor distinto ($h' \neq h$) los correspondientes puntos de resonancias $(\lambda_{res}, \tau_{res})$ caen también sobre la misma recta anterior, es decir, todos los puntos $(\lambda_{res}, \tau_{res})$ calculados para distintos espesores y mismo ancho de rendija se localizan en la misma recta. Este mismo comportamiento lo presentan también las resonancias de la energía difractada en la dirección normal, es decir, los puntos (λ_{res}, E_{res}) . Las Figs. 7 y 8 muestran el comportamiento lineal mencionado para $l=0.5\mu\text{m}$ y $h = 8, 10, 12, 14, 18, 20$ y $22 \mu\text{m}$ en ambos casos. El ajuste de mínimos cuadrados para estos datos esta dado por

$$\begin{aligned}\tau_{res} &= 0.6348\lambda_{res} + 0.0556, \\ E_{res}(\frac{\pi}{2}) &= 0.2019\lambda_{res} + 0.02019.\end{aligned}\quad (38)$$

Ahora consideraremos el caso en que se varía el ancho de la rendija, manteniendo fijo el espesor de la placa ($h = \text{constante}$). Hemos encontrado que las resonancias λ_{res} de la Fig. 2 cambian cuando se varía el ancho de la rendija. En las Figs. 9 y 10 mostramos el comportamiento del coeficiente de transmisión y de la energía difractada normal a la pantalla como función de la longitud de onda, para un espesor $h = 8\mu\text{m}$ y los siguientes anchos de rendija $l = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$ y $2.0\mu\text{m}$. Estos resultados se han obtenido cuando las longitudes de onda están en la vecindad de la resonancia $\lambda_{res2} = 18.1601\mu\text{m}$ de la Fig. 2. Además, de los valores resonantes τ_{res} y $E_{res}(\pi/2)$ obtenidos de los picos de las Figs. 9 y 10 hemos encontrado el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned}\tau_{res} &= 5.1125\frac{1}{l} + 1.31188, \\ E_{res}(\pi/2) &= 1.6273\frac{1}{l} + 0.4254,\end{aligned}\quad (39)$$

es decir, los valores resonantes son lineales con el inverso del ancho de la rendija. Para las otras resonancias λ_{res} de la Fig. 2 se han encontrado relaciones semejantes.

Finalmente, una relación muy interesante se muestra en la Fig. 11, en ella se gráfica el cociente del coeficiente de transmisión resonante y la energía difractada resonante en la dirección normal (τ_{res}/E_{res}) en función del ancho de la rendija l para las resonancias de las Figs. 9 y 10, donde hemos considerado más anchos de rendija. Podemos ver que este cociente es casi constante y muy cercano al número π . Esto ocurre cuando la longitud de onda resonante es mucho mayor que el ancho de la rendija ($\lambda_{res} \gg l$). A continuación

mostramos a partir de algunos valores de la Fig. 11 como se aproxima el cociente τ_{res}/E_{res} a π cuando l/λ_{res} disminuye:

$$\begin{aligned}(l/\lambda_{res}, \tau_{res}/E_{res}) &= (0.57153, 3.098692), \\ &(0.051072, 3.128147), (0.022434, 3.138993), \\ &(0.001237, 3.141602), (0.00055, 3.141582).\end{aligned}$$

Esta conclusión la hemos encontrado también para otras resonancias analizadas. Este resultado por demás interesante nos está diciendo que en condiciones de resonancia el cociente de la energía total difractada y de aquella difractada en la dirección normal es cercano a π cuando $\lambda_{res} \gg l$.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una teoría modal rigurosa para la dispersión de ondas planas con polarización TM, por una rendija de espesor finito perforada sobre una placa metálica de conductividad infinita. Aplicamos esta teoría al estudio de las propiedades de transmisión de la energía electromagnética en el régimen de sublongitud de onda (cuando la longitud de onda es mayor que el ancho de la rendija). Efectuamos un análisis numérico exhaustivo tanto del coeficiente de transmisión como de la energía difractada en dirección normal a la placa metálica, encontrando en ambas energías resonancias para las mismas longitudes de onda. Nuestros resultados muestran que el número de resonancias está determinado por el espesor de la placa, a mayor espesor de la placa mayor número de resonancias. El modelo teórico propuesto (ausencia de plasmones de superficie y periodicidad) nos lleva a concluir que el origen de las resonancias de la energía difractada total y en la dirección normal es el establecimiento de un régimen estacionario de resonancia tipo guía de onda acoplada al fenómeno de difracción. Manteniendo fijo el ancho de la rendija, encontramos que la intensidad de cada resonancia se escala linealmente con el espesor de la placa. La longitud de onda resonante también varía de manera lineal con el espesor. Mientras que si se mantiene fijo el espesor de la placa y se varía el ancho de la rendija, la intensidad de las resonancias se escala linealmente con el inverso del ancho de la rendija. Además el cociente del coeficiente de transmisión y de la energía difractada en dirección normal en condiciones de resonancia es constante y esta constante es aproximadamente el número π , independientemente del espesor de la placa y del ancho de la rendija, siempre que la longitud de onda sea mucho mayor que el ancho de la rendija.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de COFAA-IPN (México).

1. T.W. Ebbesen, H.J. Lezec, H.F. Ghaemi, T. Thio y P.A. Wolf, *Nature* **391** (1998) 667.
2. L. Martín-Moreno *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1114.
3. J.R. Sambles, *Nature* **391** (1998) 641.
4. U. Schörter y D. Heitmann, *Phys. Rev. B* **58** (1998) 15419.
5. M.M.J. Treacy, *Appl. Phys. Lett.* **75** (1999) 606.
6. J.A. Porto, F.J. García-Vidal y J.B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 2845.
7. H.E. Went, A.P. Hibbins y J.R. Sambles, *Appl. Phys. Lett.* **77** (2000) 2789.
8. S. Collin, F. Pardo, R. Teissier y J.L. Pelouard, *Phys. Rev. B* **63** (2001) 033107.
9. Qing Cao y Philippe Lalanne, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 057403.
10. A. Barbara, P. Quémerais, E. Bustarret y T. Lopez-Rios, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 161403.
11. F.J. García-Vidal y L. Martín-Moreno, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 155412.
12. M.M.J. Treacy, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 195105.
13. S.C. Kitson, W.L. Barnes y J.R. Sambles, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 2670.
14. T. Thio, H.J. Lezec y T.W. Ebbesen, *Physica B* **279** (2000) 90.
15. Y. Takakura, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5601.
16. J. Bravo-Abad, L. Martín-Moreno y F.J. García-Vidal, *Phys. Rev. E* **69** (2004) 026601.
17. F.J. García-Vidal, H.J. Lezec, T.W. Ebbesen y L. Martín Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 213901.
18. Fuzi Yang y J.R. Sambles, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **35** (2002) 3049.
19. Fuzi Yang y J.R. Sambles, *Appl. Phys. Lett.* **81** (2002) 2047.
20. Fuzi Yang y J.R. Sambles, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 063901.
21. O. Mata-Mendez, M. Cadilhac y R. Petit, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 328.
22. O. Mata-Mendez y F. Chavez-Rivas, *J. Opt. Soc. Am. A* **18** (2001) 537.