

Método para la medición de frecuencia usando aproximaciones racionales

D. Hernández-Balbuena

*Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California,
Blvd. Benito Juárez s/n, 21280, Mexicali, Baja California,
e-mail: dhernan@uabc.mx*

V.E. Tyrsa

*Instituto de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California,
Blvd. Benito Juárez s/n, 21280, Mexicali, Baja California,
e-mail: v_tyrsa@iing.mxl.uabc.mx*

Recibido el 11 de mayo de 2006; aceptado el 30 de junio de 2006

Se presenta un método alternativo para la medición de frecuencia de osciladores altamente estables basado en la comparación directa de frecuencias, el uso de aproximaciones racionales y la propiedad arquimediana de los números reales. Este método permite, en corto tiempo, obtener niveles de incertidumbre de medición comparables en magnitud a la incertidumbre de frecuencia de un oscilador atómico. Se presentan resultados de simulaciones basadas en el modelo matemático del método propuesto.

Descriptores: Medición de frecuencia; aproximaciones racionales; propiedad arquimediana de los reales.

An alternative method for frequency measurement of highly stable oscillators based on the direct comparison of frequencies, the use of rational approximation, and the Archimedean property of the real numbers is presented. This method allows figure out a level of measurement uncertainty comparable in magnitude to the frequency uncertainty of an atomic oscillator in a very short amount of time. Simulation results based on the mathematical model of the proposed method are presented.

Keywords: Frequency measurement; rational approximations; archimedean property of the real numbers.

PACS: 06.30.Ft; 06.20-f

1. Introducción

Actualmente los mejores estándares de tiempo y frecuencia tienen una reproducibilidad aproximada de 1×10^{-15} en 24 hrs, lo que permite que la frecuencia y el intervalo de tiempo puedan ser medidos con menor incertidumbre y más resolución que otras unidades físicas como la candela, el ampere y el metro [1]. Esto hace que las magnitudes físicas no eléctricas, como son la gravedad, la presión y la temperatura, sean convertidas a frecuencia para su mejor medición.

Con el desarrollo de un estándar de frecuencia y tiempo basado en iones de mercurio se espera que la reproducibilidad de frecuencia, $\Delta f_a/f_0$, se sitúe en el orden de 1×10^{-17} . Lo que permitiría lograr una incertidumbre de medición fraccional, $\Delta f_x/f_0$, aproximada a esta magnitud para un tiempo de medición $t_m \geq 10^4$ s [2].

La existencia de tal nivel de reproducibilidad en patrones de frecuencia posibilita el desarrollo de nuevos métodos de medición de frecuencia con incertidumbre de medición, comparables a ésta. Recientemente, se ha presentado un sistema comercial de medición de frecuencia con una incertidumbre de medición fraccional menor a 1×10^{-16} para un tiempo de medición de 10^4 s [3].

El método de medición de frecuencia que se basa en el conteo de pulsos durante una ventana de tiempo dada, presenta un error de medición debido al método, Δf_x , menor o igual a 1 Hz, cuando el tiempo de medición, t_m , es de 1 s [4]. El cual puede ser disminuido si el tiempo de medición es aumentado drásticamente.

A mediados de la década de los setentas, fue presentada en la literatura especializada la descripción matemática de un método para medir frecuencia basado en el principio de coincidencia de pulsos entre trenes de pulsos regulares independientes [5]. A principios de los ochentas se presentaron expresiones matemáticas para los errores en un medidor de frecuencia basado en el principio de coincidencia de pulso, que permiten evaluar los errores introducidos por los componentes. Su aplicación práctica permitiría reducir drásticamente el error metódico de medidores de frecuencia comerciales [6].

En este trabajo se presenta un método de medición de frecuencia basado en la comparación directa de señales usando el principio de coincidencia de pulsos, la representación de los códigos de medición en forma de aproximaciones racionales y el uso de la propiedad arquimediana de los números reales, lo que permite obtener niveles de incertidumbre de medición correspondientes a la reproducibilidad de patrones atómicos de frecuencia. Además de reducir drásticamente el tiempo de medición.

2. El uso de las aproximaciones racionales en la medición

Sean X , X_0 dos cantidades físicas cuyo valor, en general, es un número real positivo. Supóngase que el valor de X es desconocido y que el de X_0 es adoptado por la generalidad como un estándar, considere también que $X > X_0$.

El proceso de medición puede representarse como un experimento en el cual la magnitud de X es comparada con

la de X_0 . El algoritmo del experimento consiste en la subtracción consecutiva de X_0 a X y el conteo del número de subtracciones realizadas, N , hasta que la diferencia entre X y NX_0 sea menor que X_0 . Esto implica la aproximación de la razón entre de X y X_0 , cuyo resultado en general es número irracional, usando números enteros.

De acuerdo con la teoría de números este planteamiento se puede expresar matemáticamente mediante [7]

$$N + \Delta N = \left[\frac{X}{X_0} \right] + \left\{ \frac{X}{X_0} \right\}, \quad (1)$$

donde $[X/X_0]$ es la parte entera de X/X_0 y $\{X/X_0\} < 1$ es el residuo del cociente. Por lo que $N \in \mathbb{Z}$ es el resultado de la medición y $0 \leq \Delta N < 1$ es un número real que representa la incertidumbre de la medición debida al método usado, la cual genera una pérdida de información en el proceso.

Dado que la incertidumbre fraccionaria del estándar $\Delta X_0/X_0$ determina el límite teórico de la cantidad de información que puede ser obtenida del experimento, entonces es deseable que la incertidumbre fraccionaria de la medición sea reducida a hasta que su magnitud sea comparable con la del estándar. Esto sólo se puede lograr si se obtiene la mejor aproximación posible de un número real irracional, usando números enteros.

La teoría de número ofrece dos método para expansión de números reales usando números enteros, el primero es usando fracciones regulares y el segundo fracciones continuadas [7].

La expansión del número real irracional α mediante fracciones regulares, se puede escribir como

$$\alpha \cong a_0 + a_1/g + \dots + a_n/g^n = A/g^n, \quad (2)$$

donde $g > 1$ es la base de la expansión y $0 \leq a_i \leq g - 1$ son números enteros. Dicha expresión cumple con

$$\left| \alpha - \frac{A}{g^n} \right| \leq \frac{1}{g^n}, \quad (3)$$

con A un número entero.

Mientras que la expansión del número real irracional α mediante fracciones continuadas, está dada por

$$\alpha = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}, \quad (4)$$

donde b_0, b_1, \dots, b_n , son números enteros positivos excepto posiblemente el primero. La fracción convergente número n de (4) se puede expresa como el cociente de dos enteros P_n y Q_n . Los cuales cumplen con las condiciones [7]

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n^2} \quad (5)$$

y

$$P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n = \pm 1. \quad (6)$$

El método de medición de frecuencia por conteo de pulsos durante una ventana de tiempo dada o método clásico tiene un error de medición dependiente de la diferencia de

fase entre las señales involucradas de $\Delta f_x = 1$ Hz, cuando el tiempo de medición, t_m , es de 1 s [4], el cual puede ser disminuido a valores convenientes si el tiempo de medición es aumentado como $t_m = 10^n$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$. El método clásico de medición de frecuencia usa una aproximación mediante fracciones regulares.

3. Método de medición de frecuencia por coincidencia de pulsos

En la Fig. 1, se muestra el principio de medición del método de coincidencia de pulsos de dos flujos independientes de pulsos periódicos. En ella se puede observar que después de la comparación de los dos flujos regulares realizada mediante la operación lógica *and*, se generan una sucesión de pulsos de coincidencia no periódicos cuya frecuencia media está dada por [5]

$$\bar{f}_{X0} = 2\tau f_X f_0 = \frac{1}{T_{X0}}, \quad (7)$$

donde τ es el ancho de pulso de ambos flujos regulares, f_0 es la frecuencia del estándar y f_X es el valor de la frecuencia desconocida. Al comparar el tiempo entre dos coincidencias consecutivas con el número de periodos que transcurren de ambas señales se puede obtener

$$N_0 T_0 - N_X T_X \leq \Delta t_\Sigma, \quad (8)$$

con $0 \leq \Delta t_\Sigma < 2\tau$, donde N_X y N_0 son, respectivamente, el número de periodos de la señal a medir y del patrón que transcurren entre dos coincidencias consecutivas y Δt_Σ es la incertidumbre debida al método. La frecuencia medida con este método se puede expresar mediante [5,6]

$$f_X \cong \frac{N_X}{N_0} f_0. \quad (9)$$

Para cada par de coincidencias, se puede calcular un valor de frecuencia mediante (9), tomando como señal de inicio de la medición al primer pulso de coincidencia y como señal de fin de medición al segundo. El cociente de los códigos de medición N_X y N_0 , obtenidos al contar los pulsos de las señales I y II que existen entre los dos pulsos de coincidencia, representa una de las convergentes calculables con el método pero no necesariamente la óptima.

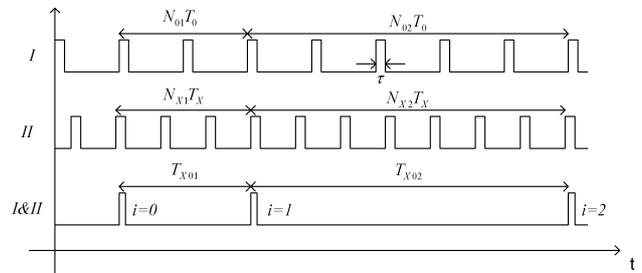


FIGURA 1. Principio de medición de frecuencia por coincidencia de pulsos.

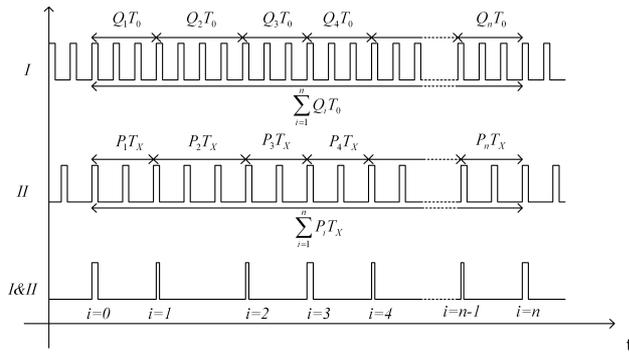


FIGURA 2. Principio de medición del método propuesto.

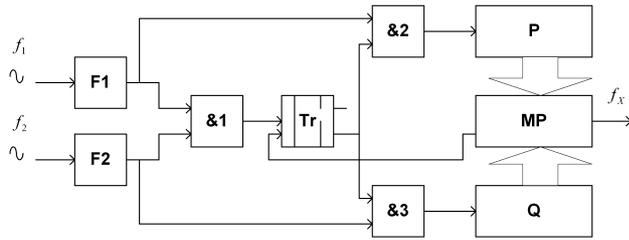


FIGURA 3. Diagrama a bloques de un medidor digital de frecuencia basado en el método propuesto.

La exactitud de la medición de frecuencia bajo este principio está limitada por el valor de τ o el ancho de los pulsos de las señales I y II de la Fig. 1.

4. Método de medición propuesto

Sea P_i y Q_i el número de pulsos que se pueden contar en las señales I y II entre los pulsos de coincidencia $i - 1$ e i de la señal I&II de la Fig. 2. Entonces $P_i T_X$ y $Q_i T_0$ son los intervalos de tiempo números i entre dos coincidencias consecutivas, los cuales en forma general no tienen la misma longitud debido a que las coincidencias entre pulso pueden ser parciales.

Ahora,

$$\sum_{i=1}^n P_i T_X \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n Q_i T_0$$

son los intervalos de tiempo entre la coincidencia de referencia para el conteo ($i = 0$) y la coincidencia número n entre los trenes de pulsos, los cuales cumplen con la condición de

$$0 < \left| T_X \sum_{i=1}^n P_i - T_0 \sum_{i=1}^n Q_i \right| \leq 2\tau, \quad (10)$$

donde τ es el ancho de los pulsos de las señales I y II.

El caso ideal para (10) sería cuando ambos segmentos de tiempo comparados tienen la misma duración; sin embargo, en la práctica, esta condición no es alcanzable debido a la inestabilidad de las señales involucradas en la medición. De donde, a lo más, se podrían encontrar dos intervalos de tiempo cuya diferencia entre sí sea muy cercana a cero.

En consecuencia, bajo este principio se puede obtener una aproximación de un número irracional por medio de números racionales, la cual cumple la condición

$$\left| \frac{T_0}{T_X} - \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\sum_{i=1}^n Q_i} \right| \leq \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n Q_i \right)^2}, \quad (11)$$

de donde, el valor de frecuencia que se puede calcular usando el método propuesto se puede escribir en función de la convergente calculada con el método mediante

$$f_X = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\sum_{i=1}^n Q_i} f_0. \quad (12)$$

El criterio de inicio de medición es el primer pulso de coincidencia de la señal I & II y el de fin de la medición es derivado de la propiedad arquimediana de los reales. Este criterio es dependiente de la reproducibilidad de la frecuencia de referencia y está dado por

$$\sum_{i=1}^n P_i = 10^m, \quad (13)$$

donde m es un número entero positivo y está asociado al número de cifras significativas a la derecha del punto decimal que contienen información fidedigna del valor de la frecuencia del estándar.

El diagrama de bloques de un medidor de frecuencia digital basado en este principio se presenta en la Fig. 3 y su funcionamiento se describe a continuación.

En el medidor, la señal de referencia y la señal a medir entran a los formadores de trenes de pulsos F1 y F2. Los trenes de pulsos resultantes llegan a cada una de las compuertas lógicas *and*, pero las compuertas &2 y &3 se encuentran bloqueadas por el estado de salida del disparador Tr. Después de la primera coincidencia el estado de salida de la compuerta &1, cambia el estado del disparador Tr, permitiendo que los trenes de pulsos pasen por las compuertas &2 y &3 hacia los contadores P y Q, donde los códigos de medición

$$\sum_{i=1}^n P_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n Q_i$$

son obtenidos. Cuando la condición expresada en (13) es cumplida, el microprocesador MP genera la señal que cambia el estado del disparador y toma la información de los contadores para calcular la frecuencia medida mediante (12).

5. Simulación del método propuesto

El algoritmo utilizado para la realización de la simulación, permite el cálculo de la diferencia entre los segmentos de tiempo definidos por

$$\sum_{i=1}^n P_i T_X \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n Q_i T_0,$$

de la que se derivan los códigos de medición

$$\sum_{i=1}^n P_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n Q_i$$

que cumplen con la Ec. (10) y con los que se calcula la frecuencia medida mediante la Ec. (12).

Para realizar la simulación se supone que la frecuencia patrón es de $f_0=10$ MHz y que tiene una reproducibilidad de $\Delta f_0/f_0=1 \times 10^{-13}$. La frecuencia hipotética a medir es de $f_X=5878815.277629991$ Hz, asociada al periodo $T_X=1.701023 \times 10^{-7}$ s. El ancho de pulso utilizado es $\tau=1 \times 10^{-9}$ y el error de coincidencia máximo es supuesto de $\Delta T=1 \times 10^{-12}$.

Los resultados de la simulación se muestran en la Fig. 4, para una medición de frecuencia cuando ambas señales están en fase y cuando no lo están. Se puede observar que los resultados son independientes de la diferencia de fase, debido a que el conteo de pulso comienza a partir de la primera coincidencia, como se muestra en la Fig. 2.

También se puede observar que a medida que el tiempo de medición crece $\Delta f_X \rightarrow 0$, además que para los tiempos de medición $T_m=0.171023$ s, $T_m=0.342046$ s y $T_m=0.513069$ s, se obtiene la condición ideal $\Delta f_X = 0$, bajo las condiciones de la simulación. Esto implica que usando este método de medición se puede obtener la mejor aproximación posible, planteada en (9), tomando en cuenta la reproducibilidad del patrón y la señal a medir. Esto es posible gracias a la aplicación de la propiedad arquimediana de los reales.

Los resultados de distintas simulaciones presentados en la Tabla I, para un tiempo de medición $T_m=0.171023$ y distintos valores de ΔT o condiciones de discriminación de coincidencia de pulsos. Se puede observar que en cada caso, para la coincidencia 20000, 2000, 200 y 20 se obtiene el valor de f_X , propuesto inicialmente para la simulación y que para cada una se cumple el criterio de fin de medición propuesto en (11). El diagrama a bloques del programa utilizado se presenta en el apéndice.

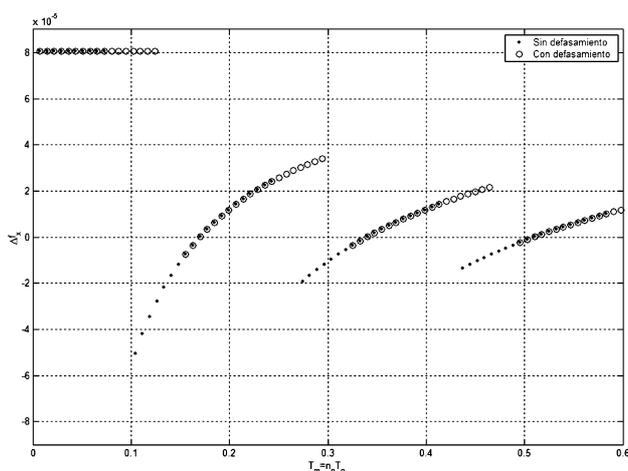


FIGURA 4. Error obtenido en la simulación basada en el modelo matemático del método de medición de frecuencia.

TABLA I. Resultados de simulaciones basadas en el principio propuesto para distintos valores de ΔT

ΔT	N	$\sum_{i=1}^n Q_i$	$\sum_{i=1}^n P_i$	f_X
1×10^{-9}	19999	1700875	999913	5878815.315646359
	20000	1701023	1000000	5878815.277629991
	20001	1701040	1000010	5878815.312984997
1×10^{-10}	1999	1699026	998826	5878815.274162962
	2000	1701023	1000000	5878815.277629991
	2001	1701188	1000097	5878815.274972549
1×10^{-11}	199	1685559	990909	5878815.277305630
	200	1701023	1000000	5878815.277629991
	201	1707674	1003910	5.878815277389010
1×10^{-12}	19	1628027	957087	5878815.277633602
	20	1701023	1000000	5878815.277629991
	21	1774019	1042913	5878815.277626677

6. Conclusiones

Se ha presentado un método alternativo de medición de frecuencia basado en el principio de coincidencia de pulsos, la representación de los códigos de medición mediante aproximaciones racionales y la propiedad arquimediana de los números reales.

Se han presentado los resultados de simulaciones basadas en el modelo matemático del método de medición propuesto, ilustrando la independencia de los resultados con la diferencias de fase entre la señal del patrón y la sometida a medición. Además de resultados de simulaciones para distintos valores de ΔT .

Con el método propuesto es posible obtener una medición de frecuencia con una incertidumbre de medición fraccionaria similar a la obtenida con el método clásico pero en un tiempo más corto. En la simulación presentada el tiempo de medición es de 0.171023 s, lo que supera considerablemente al método clásico.

Se ha propuesto un criterio de fin de medición basado la propiedad arquimediana de números reales y se ha presentado el diagrama a bloques de un medidor digital de frecuencia basado en el método propuesto.

En este método los pulsos de coincidencia son únicamente elementos de conteo, por lo que el resultado de la medición sólo es dependiente de la similitud de las magnitudes de los lapsos definidos por

$$\sum_{i=1}^n P_i T_X \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n Q_i T_0,$$

los cuales pueden variar únicamente por la reproducibilidad de la frecuencia de referencia y la sometida a medición. El resultado de la medición bajo este principio es óptimo cuando ambas reproducibilidades son idénticas.

Las mediciones de frecuencia realizadas bajo este método de medición no presentarían error instrumental debido al ancho de los pulsos de coincidencia, su forma o *el jitterc*.

Apéndice

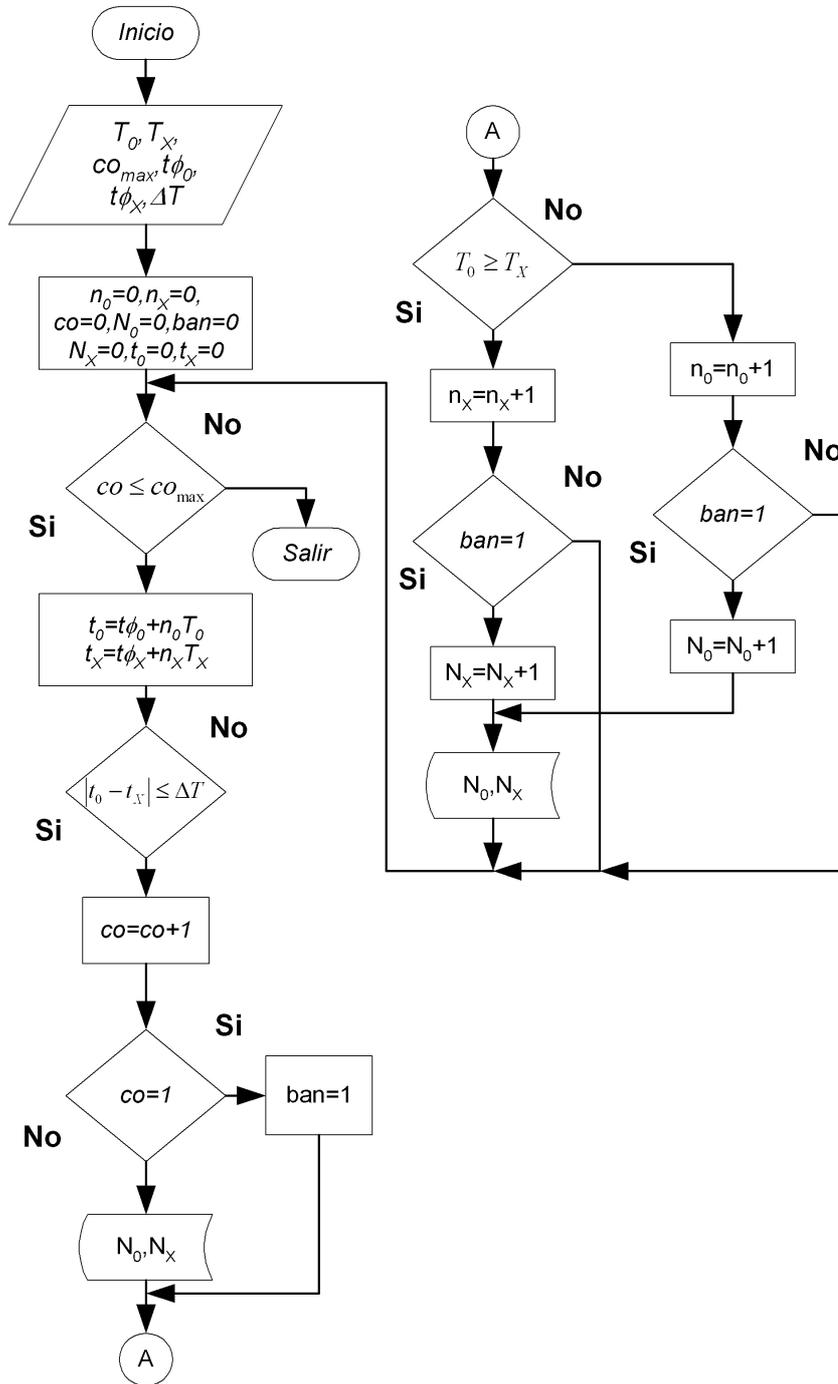


FIGURA 5. Diagrama a bloques del programa utilizado para la simulación del principio de medición y la obtención de los resultados presentados en la Fig. 4 y la Tabla I.

1. M.A. Lombardi, *The Mechatronics Handbook*, (2001) CRC Press LCC.
2. J.C. Berquist, S.R. Jefferts, *D. J. Phys. Today*, (2001) 37.
3. Quartzlock, Frequency, Phase & Phase Noise Measurement System, A7-A& A7-MX Datasheet.
4. Agilent Technologies, Understanding Frequency Counter Specifications, Applications, Note 200-4.
5. V.E. Tyrsa, *Meas. Techs.* (Izmer. Tekh. in Russian) **18** (1975) 357.
6. V.E. Tyrsa y V.V. Dyunyashev, *Meas. Techs.* (Izmer. Tekh. in Russian) **24** (1981). 308.
7. W.J. Le Veque, *Teoría elemental de los números*, Centro de Regional de Ayuda Técnica. Agencia Para el Desarrollo Internacional (México, 1968).