

Hologramas tipo Lohmann multiplexados

M. Araiza E.^a, S. Guel S.^b, C. Sifuentes G.^a, A. Lastras^b y J. Nieto^b

^a Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales, Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zac.- 98000,

Tel: +(492) 9239407, ext. 1518,

^b Instituto de Investigación en Comunicación Óptica (IICO), Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), San Luis Potosí, S.L.P.- 78000,

Tel: +(444) 8250183,

e-mail: arazama@uaz.edu.mx

Recibido el 31 de julio de 2006; aceptado el 23 de mayo de 2007

Basado en el método propuesto por Lohmann para la fabricación de hologramas generados por computadora (HGC), se presenta una forma de multiplexado haciendo algunas modificaciones a las celdas base, conocidas como celdas tipo I. Con esta variación es posible almacenar hasta 3 imágenes en un solo holograma. Las imágenes se recuperan simultáneamente en la misma dirección y en el mismo orden de difracción. Los resultados demuestran que el procedimiento propuesto es efectivo en su aplicación en el procesamiento de imágenes, si bien con algunas limitaciones técnicas.

Descriptores: Hologramas generados por computadora; detour; transformada de Fourier (TF); celda; multiplexado; procesado de imágenes.

Based on Lohmann's method to create computer generated holograms (CGH) a multiplexing scheme is presented by making some modifications to basic cells, known as type I cells. With this variation, it is possible to storage up to 3 images in a hologram. At the reconstruction stage, the images are recovered simultaneously in the same direction and same diffraction order. Results show that the proposed procedure is effective for applications in image processing with some limitations.

Keywords: Computer generated holograms; detour; Fourier transform (FT); cell; multiplexing; images processing.

PACS: 42.40.Jv

1. Introducción

Desde su invención los HGC han sido una interesante rama de la óptica moderna, gracias en parte por sus varias aplicaciones [1,2], por lo que a lo largo de su desarrollo han surgido diferentes métodos de codificación [3].

Probablemente los HGC más conocidos sean los hologramas *detour*, propuestos por Lohmann, *et al.* [4], que conceptualmente pueden resumirse como sigue: se digitaliza una imagen y se obtiene su transformada de Fourier (TF) punto a punto. La amplitud y fase de cada onda así obtenidas se codifican por medio de celdas base (tipo I [3]), como la que se muestra en la Fig. 1. Por medio de un algoritmo, se asigna a cada celda un rectángulo cuya área es proporcional a la amplitud de la onda y cuya posición es proporcional a su fase. Se genera así una matriz de $N \times M$ celdas del tamaño de una hoja de impresión, que en realidad es la simulación de un holograma de Fourier. El patrón de celdas generado es graficado y fotográficamente reducido para obtener una transparencia que difracte la luz en forma adecuada. Cuando a la transparencia (holograma) se le hace incidir un haz de luz coherente, la imagen original codificada puede reconstruirse con ayuda de una lente.

Estructura de celda base tipo I, para representar una onda en plano de Fourier (ν_x, ν_y) , según el método de Lohmann. Los parámetros W y P codifican la amplitud y la fase de la onda, respectivamente. El ancho de la celda es $\delta\nu$, igual a su alto.

Con el tiempo han surgido novedosos métodos para codificar no solo una sino varias imágenes, es decir métodos de multiplexado; cada uno con diferentes características. Entre éstos los hay aquellos que codifican simultáneamente dos o cuatro objetos [5–8], las cuales pueden ser recuperadas en las direcciones ortogonales [5–7] o en la misma dirección [8,9].

En este trabajo se muestra, un método de multiplexado que permite codificar hasta tres imágenes [10], siendo un método simplificado con respecto a los mencionados en el párrafo anterior. Para esto es necesario introducir varias modificaciones a las celdas base mencionadas; modificaciones

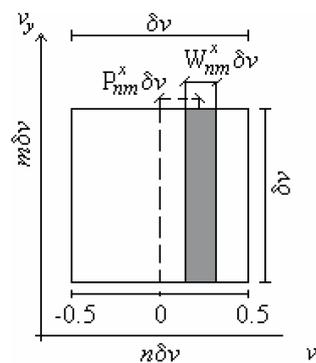


FIGURA 1. Estructura de celda base tipo I, para representar una onda en plano de Fourier (ν_x, ν_y) , según el método de Lohmann. Los parámetros W y P codifican la amplitud y la fase de la onda, respectivamente. El ancho de la celda es $\delta\nu$, igual a su alto.

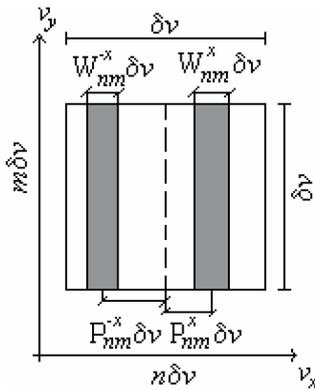


FIGURA 2. Diseño de celda tipo II, que duplica la cantidad de información contenida en un HGC.

que, como se verá, las hacen ser equivalentes como elementos de codificado. La organización de este trabajo es como sigue: en la Sec. 2, se describe brevemente el procedimiento de codificado de los hologramas detour utilizando una celda tipo I. En la Sec. 3, se analiza el método de multiplexado propuesto [3]. En la Sec. 4 se presentan los resultados experimentales; y finalmente en la Sec. 5 se mencionan algunas conclusiones y comentarios.

2. Método de codificación de la celda tipo I

La Fig. 1 muestra una de las $n \times m$ celdas, cuyas características ya se han explicado anteriormente [3]. El tamaño de la celda es $\delta\nu \times \delta\nu$, con coordenadas $(n\delta\nu, m\delta\nu)$. Los parámetros libres que codifican la amplitud y la fase de una onda dada, en términos del ancho y de la posición del rectángulo en la celda, son

$$W_{nm} = \frac{\sin^{-1}(A_{nm})}{\pi}, \tag{1}$$

$$P_{nm} = \frac{\phi_{nm}}{2\pi}, \tag{2}$$

donde A_{nm} y ϕ_{nm} corresponden a la amplitud y a la fase de dicha onda, mientras que el subíndice nm corresponde a las coordenadas de cada celda. Esto nos da un total de $2N \times M$ parámetros libres.

La amplitud de transmitancia binaria del total de las celdas, en el plano del holograma (ν_x, ν_y) , está dada por

$$H(\nu_x, \nu_y) = \sum_{n,m} \text{rect} \left[\frac{\nu_x - n\delta\nu - P_{nm}\delta\nu}{W_{nm}\delta\nu} \right] \times \text{rect} \left[\frac{\nu_y - m\delta\nu}{\delta\nu} \right], \tag{3}$$

siendo en la dirección ν_x dentro del área de la función rect diferente de cero, esto es, $\text{rect}(x) = 1$ cuando $|x| \leq 1/2$ e igual a cero en otros casos. Mientras que en la dirección ν_y , la función rect es constante e igual a $\delta\nu$. Notar que se obtiene la TF inversa (TFI) de la Ec. (3) y luego de algunas aproximaciones se llega a las Ecs. (1) y (2).

3. Método de multiplexado propuesto

Con el propósito de duplicar la cantidad de información contenida en un holograma, se propone un rectángulo en el lado izquierdo de la celda de la Fig. 1. Llamaremos a esta la celda II (ver Fig. 2). Con este esquema se propone codificar 2 imágenes bidimensionales $u_{-X}(x, y)$ y $u_X(x, y)$, la primera con parámetros $W_{nm}^{-X}\delta\nu$ y $P_{nm}^{-X}\delta\nu$, y la segunda con parámetros $W_{nm}^X\delta\nu$ y $P_{nm}^X\delta\nu$. Los rectángulos, uno a la izquierda y otro a la derecha del centro de la celda se identifican con las letras $-X$ y X , respectivamente. Las imágenes son recuperadas simultáneamente en el orden ± 1 . El total de parámetros libres aumenta al doble, siendo $4N \times M$.

La amplitud de transmitancia binaria de la Fig. 2 es

$$H(\nu_x, \nu_y) = \sum_{n,m} \left\{ \text{rect} \left[\frac{\nu_x - n\delta\nu - P_{nm}^X\delta\nu}{W_{nm}^X\delta\nu} \right] \times \text{rect} \left[\frac{\nu_y - m\delta\nu}{\delta\nu} \right] + \text{rect} \left[\frac{\nu_x - n\delta\nu + P_{nm}^{-X}\delta\nu}{W_{nm}^{-X}\delta\nu} \right] \times \text{rect} \left[\frac{\nu_y - m\delta\nu}{\delta\nu} \right] \right\}, \tag{4}$$

como se puede ver, se tiene una suma de transmitancias binarias, que tiene en cuenta la colocación de los rectángulos dentro de la celda.

En el plano de la imagen, la TFI de $H(\nu_x, \nu_y)$ es

$$h(x, y) = \iint H(\nu_x, \nu_y) \exp[2\pi i(x\nu_x + y\nu_y)] d\nu_x d\nu_y = \sum_{n,m} \left\{ (x\delta\nu W_{nm}^X \pi) \text{sinc}(x\delta\nu W_{nm}^X \pi) \times \exp[2\pi i x(n + P_{nm}^X)\delta\nu] + (x\delta\nu W_{nm}^{-X} \pi) \text{sinc}(x\delta\nu W_{nm}^{-X} \pi) \times \exp[2\pi i x(n + P_{nm}^{-X})\delta\nu] \right\}. \tag{5}$$

Al igual que para el caso de una celda I (Fig. 1) se desea que la amplitud compleja $h(x, y)$ en el plano de la imagen, describa las imágenes $u^X(x, y)$ y $u^{-X}(x, y)$, con los parámetros libres $W_{nm}^X, P_{nm}^X, W_{nm}^{-X}, P_{nm}^{-X}$. Después de algunas aproximaciones se obtienen los siguientes parámetros libres:

$$\sin(\pi W_{nm}^X) = A_{nm}^X, \tag{6}$$

$$2\pi P_{nm}^X = \phi_{nm}^X, \tag{7}$$

$$\sin(\pi W_{nm}^{-X}) = A_{nm}^{-X}, \tag{8}$$

$$-2\pi P_{nm}^{-X} = \phi_{nm}^{-X}, \tag{9}$$

como se puede ver el término de la Ec. (9) corresponde al complejo conjugado de la imagen codificada con el rectángulo $-X$, esto es,

$$\exp(i\phi_{nm}^{-X}) = \exp(-2\pi i P_{nm}^{-X}) = [\exp(2\pi i P_{nm}^{-X})]^*, \tag{10}$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado. Nótese que el rectángulo $-X$ cambia de signo cuando se grafica a lado izquierdo del centro de la celda; por lo tanto el complejo conjugado de la Ec. (10) es omitido, de aquí se tiene

$$P_{nm}^{-X} = \frac{\phi_{nm}^{-X}}{2\pi} \tag{11}$$

Esto es, se ejecuta un doble complejo conjugado en el rectángulo $-X$, el cual se pone de manifiesto al momento de graficar, como se mostrará más abajo en los resultados.

A continuación se propone la celda II modificada (IIM) de la Fig. 3. En este caso se muestran dos rectángulos en el lado derecho del origen, definidos por $X1$ y $X2$. De acuerdo al análisis matemático hecho a la celda de la Fig. 3, se obtienen los siguientes ecuaciones para calcular los parámetros libres:

$$\sin(\pi W_{nm}^{X1}) = A_{nm}^{X1}, \tag{12}$$

$$2\pi P_{nm}^{X1} = \phi_{nm}^{X1}, \tag{13}$$

$$\sin(\pi W_{nm}^{X2}) = A_{nm}^{X2}, \tag{14}$$

$$2\pi P_{nm}^{X2} = \phi_{nm}^{X2}. \tag{15}$$

Como se puede ver las Ecs. (12) - (15), son idénticas a las Ecs. (6) - (8), (11), respectivamente. Esto demuestra una equivalencia entre las celdas II y IIM (ver Figs. 2 y 3).

La Fig. 4 muestra la celda tipo III, a la que se le ha añadido un rectángulo adicional, con la idea de triplicar la cantidad de información contenida en un holograma, cuyos parámetros libres pueden resumirse como sigue:

$$W_{nm}^{Xi} = \frac{\sin^{-1}(A_{nm}^{Xi})}{\pi}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{16}$$

$$P_{nm}^{Xi} = \frac{\phi_{nm}^{Xi}}{2\pi}, \tag{17}$$

donde $i = 1, 2, 3$, indica el número de imágenes codificadas. Como se verá en los resultados experimentales, el efecto de multiplexado también trabaja con esta celda, si bien con algunos problemas de ruido.

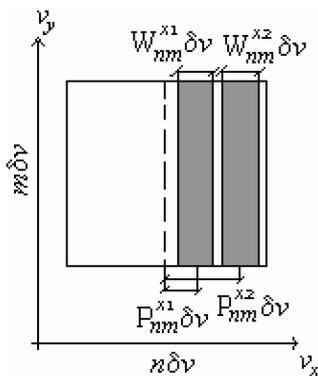


FIGURA 3. Diseño de celda IIM, que duplica la cantidad de información en un holograma.

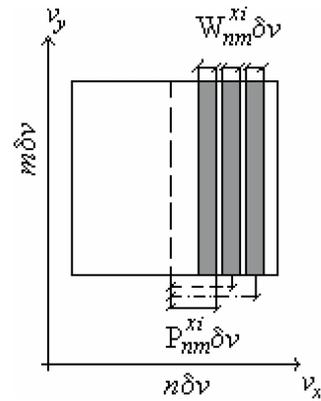


FIGURA 4. Celda III, usada para codificar 3 imágenes en un HGC.

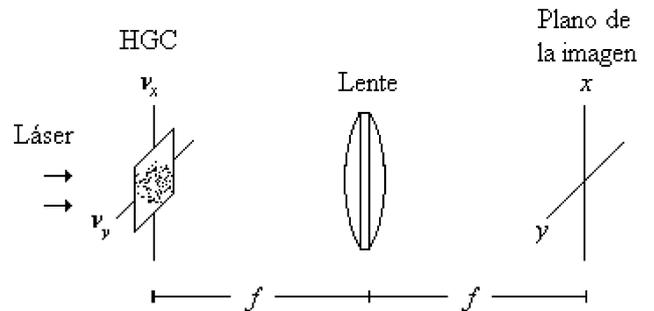


FIGURA 5. Sistema óptico para la reconstrucción de un HGC.

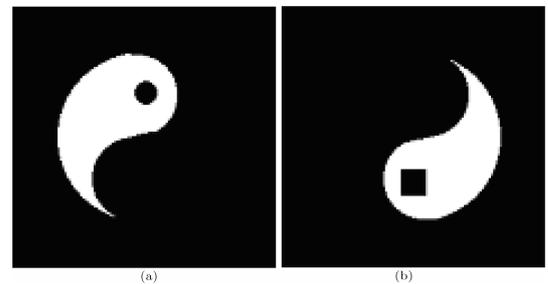


FIGURA 6. (a) y (b) Imágenes digitales de 200×200 píxeles.

4. Procedimiento y resultados experimentales

Los hologramas fueron calculados en el Software de Matlab y se graficaron con la ayuda del Software de Postscript. Se utilizó una impresora LaserJet 6M con resolución de 600×600 -dpi. El tamaño de los hologramas generados es de 128×128 y de 200×200 celdas. Los hologramas una vez impresos fueron reducidos fotográficamente en transparencias de 1.0 y 1.5 cm^2 , respectivamente. Cuando el holograma es colocado en un sistema óptico como el que se muestra en la Fig. 5, se le hace incidir un haz de luz coherente. Las imágenes codificadas aparecerán en el plano de la imagen.

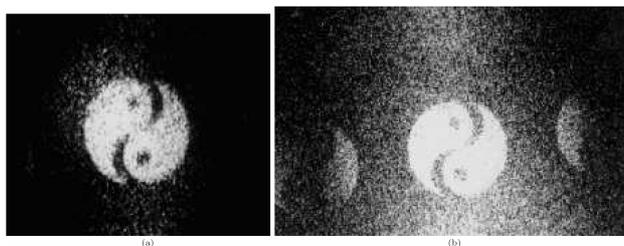


FIGURA 7. Imágenes reconstruidas: (a) fue obtenida usando celdas tipo II. (b) fue obtenida usando celdas IIM. Ambas fotografías muestran el mismo resultado, lo que demuestra que las celdas son equivalentes.

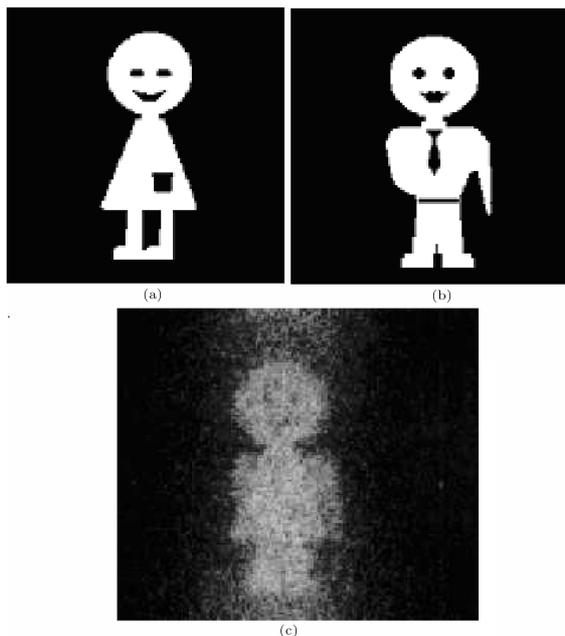


FIGURA 8. En (a) y (b) los dibujos aparecen al centro de la imagen. Después de almacenados y reconstruidos los dibujos se traslapan, como se ve en (c). No hay manera de evitar el traslape.

Para demostrar la equivalencia entre las celdas de las Figs. 2 y 3, se generan los hologramas usando las Ecs. (6)-(9), y (12)-(15), respectivamente. Las Figs. 6 y 7 muestran las imágenes utilizadas y las imágenes reconstruidas, respectivamente. Como se puede ver, los resultados son los mismos cuando se utilizan las celdas de las Figs. 2 y 3. Nótese, que no existe traslape entre las imágenes reconstruidas; ésto es porque las imágenes usadas tienen diferentes coordenadas una con respecto de la otra.

Las Figs. 8a y 8b muestra dos imágenes que coinciden en algunas de sus coordenadas. En este caso, como era de esperarse y como se ve en la Fig. 8c, las imágenes reconstruidas coinciden o presentan traslape en las mismas coordenadas. Este traslape puede evitarse cancelando uno de los signos negativos que están implícitos en el rectángulo $-X$ (ver Fig. 2). Esto se puede hacer de dos maneras: el signo menos es omitido en la Ec. (9) o el rectángulo $-X$ es graficado en el lado derecho de la celda de la Fig. 2. Por ejemplo, los dibujos de las imágenes digitales en las Figs. 8a y 8b son los mismos que

en las Figs. 9a y 9b; pero, en ésta última, los dibujos están colocados en el lado derecho del campo. La Fig. 9c muestra que mediante la aplicación del complejo conjugado es posible evitar el traslape en las imágenes reconstruidas, si bien una de ellas aparecerá girada 180° . Otra manera de evitar el traslape sería aplicando el teorema del desplazamiento [11].

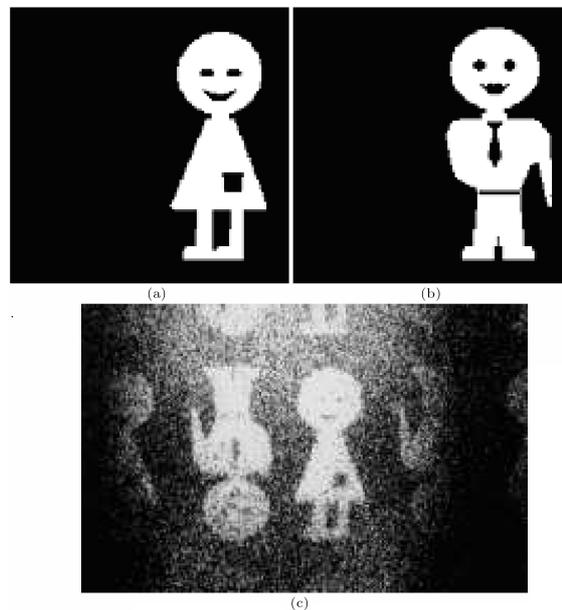


FIGURA 9. En (a) y (b) se muestran los mismos dibujos que en la Fig. 8, ahora a la derecha de la imagen. Usando el complejo conjugado de uno de ellos, es posible evitar el traslape, si bien el dibujo aparece invertido.

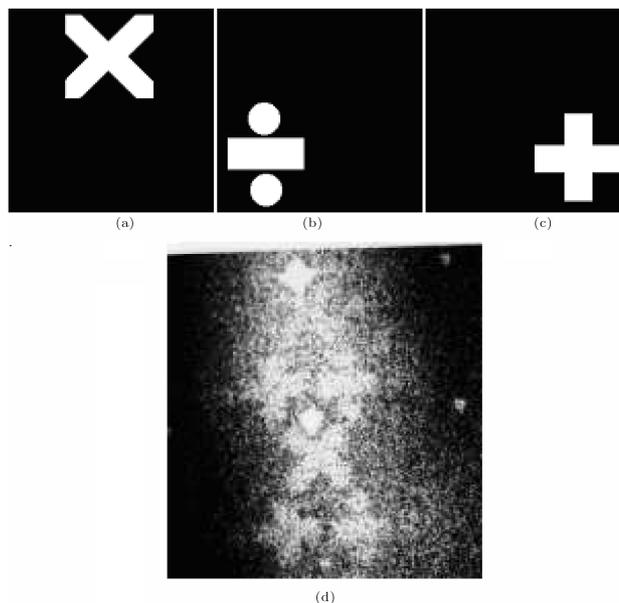


FIGURA 10. (a) - (c) Imágenes digitales. (d) Imagen recuperada usando la celda de la Fig. 4.

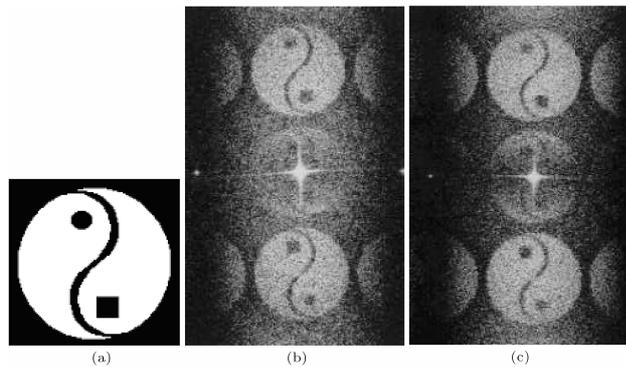


FIGURA 11. (a) Imagen obtenida de la suma de las imágenes de la Fig. 6b Imagen recuperada usando los dibujos de la Fig. 6 y la celda tipo II. (c) Imagen recuperada usando el dibujo de la Fig. 11a y una celda I. Como se ve la suma de imágenes se puede efectuar en el plano espectral (caso propuesto, 11b) o bien el plano real (caso normal, 11c).

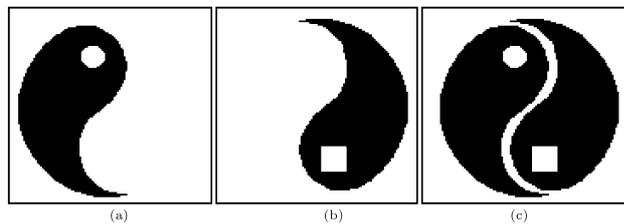


FIGURA 12. (a) y (b) Negativo de los dibujos de la Fig. 6. (c) Suma de las imágenes de las Figs. 12a y 12b.

Empleando la celda de la Fig. 4 y las imágenes de las Figs. 10a - 10c se lleva a cabo un triple multiplexado. El resultado se muestra en la Fig. 10d. Como se puede apreciar, se tiene menor resolución en las imágenes reconstruidas, ya que al aumentar el número de imágenes codificadas, se incrementan los traslapes entre los rectángulos que codifican a cada una de ellas, dentro de las celdas.

La Fig. 11a, muestra una imagen que es la suma de las Figs. 6a y 6b. Como es de esperar, la fabricación de su holograma requiere una celda I y su imagen recuperada es la que se muestra en la Fig. 11b. Sin embargo, éste es el mismo resultado que se muestra en la Fig. 11c, y que se obtuvo con una celda II cuando cada imagen fue codificada independientemente. Esto demuestra que se puede efectuar una suma de imágenes de dos maneras o bien sumándolas directamente en el espacio real o bien usando un holograma con celdas tipo II, (suma espectral).

Sin embargo, cuando se utiliza el negativo de estas mismas imágenes, (ver Fig. 12), se observa una diferencia entre ambos métodos. Esto es entre sumar previamente las imágenes (celda I) o realizar una suma espacial de imágenes (celda II). Comparando la Fig. 13a, codificada con una celda II, y la Fig. 13b codificada con una celda I, se observa que existe un bajo contraste en la primera, debido a un color de fondo.

Analíticamente, estos resultados pueden explicarse como sigue. La suma de las imágenes de las Figs. 6a y 6b dan como resultado la imagen de la Fig. 11a, cuyos pixeles tienen el valor de 0 ó 1. Mientras que la suma de las imágenes de

las Figs. 12a y 12b, resulta en 12c cuyos pixeles tienen los valores de 1 ó 2. La Tabla I ilustra este concepto, donde los renglones 1 - 3 cumplen con las Figs. 11b y 11c, mientras que los renglones 2 - 4 cumplen con las Figs. 13a y 13b.

Cabe hacer notar que al sumar celdas I, hay una probabilidad de que se traslapen los rectángulos dentro de las celdas individuales, ya que éstos se mueven libremente según les corresponda, y esta probabilidad es cada vez mayor a medida que aumente el número de imágenes. El porcentaje de traslapes en un holograma se midió mediante un programa en MatLab, obteniéndose los siguientes resultados: para celdas II y IIM el porcentaje de traslapes es de 57 % y para celdas III es de 89 %. Como ejemplo, la Fig. 10d muestra una gran cantidad de ruido, debido al gran número de traslapes ocurridos.

5. Conclusiones

El método de multiplexado propuesto en este trabajo muestra que es posible aumentar la capacidad de información que un HGC tipo Lohmann es capaz de manipular (sin modificar la estructura fundamental de sus celdas base). Esto podría ser de interés para algunas aplicaciones tecnológicas modernas, pues áreas como la informática requieren dispositivos opto electrónicos capaces de almacenar mayor cantidad de información, cada día.

TABLA I.

	X	Y	X + Y
Renglón 1	0	0	0
Renglón 2	1	0	1
Renglón 3	0	1	1
Renglón 4	1	1	2

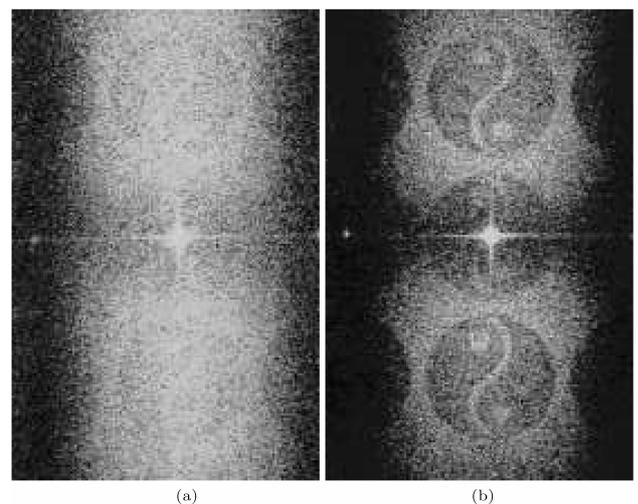


FIGURA 13. Imágenes recuperadas: (a) usando los dibujos de las Figs. 12a y 12b y la celda de la Fig. 2, (suma espacial); (b) usando el dibujo de la Fig. 12c y una celda I.

Aún más, la equivalencia entre las celdas II y IIM, muestra cierto grado de versatilidad del método, toda vez que es posible no solamente almacenar la información dentro del holograma, sino que ya que se ha determinado el tipo de imagen a procesar, es posible manipularla dependiendo de la manera como los resultados requieran. Entre éstos la suma de dos imágenes es un caso particular, la cual se puede efectuar de diferentes maneras; o bien superponiendo las dos imágenes (Fig. 8), o utilizando el complejo conjugado de alguna de ellas, para separarlas, etc., (ver Fig. 9). Esto último nos lleva también a considerar que el método propuesto puede ser de utilidad desde el punto de vista didáctico, como ayuda para entender estos conceptos en un curso de Procesado de Señales Ópticas.

No se hizo un estudio a fondo, comparativo, entre este método y los propuestos por otros autores (Hologramas de Lee, etc), tampoco se hizo un estudio a fondo de la capacidad difractiva de estos hologramas, ni de la relación señal-

ruido, como amablemente nos lo señala uno de nuestros árbitros; esto último es ciertamente importante, toda vez que el aumento de imágenes a procesar conlleva a un aumento en el número de traslapes entre rectángulos, dentro de cada celda, lo cual, de alguna manera, produce interferencia entre las ondas respectivas, que muy por seguro produce ruido, (tal y como se muestra en la Fig. 10d, donde se multiplexan hasta tres imágenes). Esto representa obviamente una limitación del método. Sin embargo gracias a esta sugerencia, se ha planteado un trabajo futuro con esta finalidad, que se encuentra actualmente en progreso en sus fases iniciales; y del cual se presentará los resultados en un trabajo futuro.

Agradecimientos

Se agradece a los referís sus valiosas sugerencias. Uno de los autores (MAE) agradece a PROMEP por el apoyo parcial brindado.

-
1. S.H. Lee, *Appl. Opt.* **26** (1987), 4350.
 2. G. Triccoles, *Appl. Opt.* **26** (1987), 4351.
 3. A.W. Lohmann y S. Sinzinger, *Appl. Opt.* **34** (1995), 3172.
 4. B.R. Brown y A.W. Lohmann, *Appl. Opt.* **5**(1966) 967.
 5. M. Araiza E. y S. Guel S., *Optics and Lasers in Eng.* **39** (2003) 629.
 6. D. Mendlovic, *Appl. Opt.* **35** (1996) 3887.
 7. R. ChaoHong, Z. Jin y G. WenQi, *Appl. Opt.* **36** (1997) 8844.
 8. M. Araiza E., S. Guel S. y J. Ojeda C., *Opt. Comm.* **230** (2004) 131.
 9. M. Araiza E. *et al.*, ENINVIE 2005, marzo de 2005, Zacatecas, Zac., 261 .
 10. M. Araiza E. y S. Guel S., 2000 IEEE/LEOS Summer Topical Meetings, July 2000, Miami, Florida, US., IEEE catalog # 00TH8497, ISBN #0-7803-6252-7.
 11. M. Araiza E., S. Guel S., L.A. Lastras y J. Nieto, *Rev. Mex. Fís.* **46** (2000) 300.