Ecuaciones de fuerza de Lorentz como ecuaciones de Heisenberg para un sistema cuántico en el espacio euclidiano 4D

A.R. Rodríguez-Domínguez
Instituto de Física-UASLP,
Alvaro Obregón 64, 78000 San Luis Potosí , México,
e-mail: adnrdz@ifisica.uaslp.mx

Recibido el 14 de noviembre de 2006; aceptado el 11 de junio de 2007

En uno de sus trabajos anteriores, las ecuaciones dinámicas relativistas de una partícula cargada bajo la acción de campos electromagnéticos fueron formuladas en términos de momentos tanto externos como internos por R. Yamaleev [1]. Las ecuaciones de evolución de los momentos externos, esto es, las ecuaciones de fuerza de Lorentz, fueron derivadas de las ecuaciones de evolución de los momentos internos. El mapeo entre las observables de ambos momentos externos e internos está relacionado mediante la formulación polinomial cuadrática de Viète, que es el *polinomio característico* de la dinámica relativista. En este trabajo mostramos que el sistema de ecuaciones dinámicas, construidas en la Ref. 1, puede ser resuelto en el esquema de Heisenberg para un sistema cuántico de cuatro dimensiones. En este esquema las ecuaciones de los momentos internos juegan el papel de ecuaciones de evolución para un vector de estado, mientras que los momentos externos obedecen la ecuación de Heisenberg para un operador de evolución. Las soluciones de la ecuación de fuerza de Lorentz para el movimiento, dentro de un campo electromagnético constante, se presentan a través de las funciones pentagonométricas.

Descriptores: Ecuaciones de Lorentz; de Hisenberg; de evolución; momentos internos y externos; formulación cuaterniónica; espinorial; funciones pentagonométricas.

In an earlier work, the dynamic equations for a relativistic charged particle under the action of electromagnetic fields were formulated by R. Yamaleev [1] in terms of external, as well as internal momenta. Evolution equations for external momenta, the Lorentz-force equations, were derived from the evolution equations for internal momenta. The mapping between the observables of external and internal momenta are related by Viète formulae for a quadratic polynomial, the *characteristic polynomial* of the relativistic dynamics. In this paper we show that the system of dynamic equations, constructed in Ref. 1, can be cast into the Heisenberg scheme for a four-dimensional quantum system. Within this scheme the equations in terms of internal momenta play the role of evolution equations for a state vector, whereas the external momenta obey the Heisenberg equation for an operator evolution. The solutions of the Lorentz-force equation for the motion inside constant electromagnetic fields are presented via pentagonometric functions.

Keywords: Lorentz; Hisenberg and Evolution Equations; internal and external momenta; cuaternionic and espinorial formulations; pentagonometric functions.

PACS: 03.30.+p; 03.65.Pm; 03.65.Sq; 03.65.-w

1. Introducción

Recientemente R.M. Yamaleev ha construido una nueva formulación de la dinámica relativista. En este primer paso, se inició esta formulación con el propósito de crear un análogo de la mecánica clásica empleando el formalismo de espacio fase de Nambu. Posteriormente resultó concluyente el hecho que esta mecánica clásica no es otra que la mecánica relativista. De esta manera se puede construir una jerarquía de sistemas dinámicos, disponiendo en un primer nivel la mecánica newtoniana, en un segundo nivel la mecánica relativista y, en un tercer nivel, se encontraría una dinámica relativista generalizada basada en la teoría de las funciones elípticas[1-9].

La nueva formulación muestra una estructura compuesta de la dinámica que describe el movimiento de una partícula relativista. Se mostró que la dinámica completa de la partícula relativista dentro de un campo electromagnético puede ser formulada tanto en términos de momentos externos como internos. Las ecuaciones de evolución para los momentos externos, que son las ecuaciones de Lorentz, son derivables de las correspondientes ecuaciones de evolución para los momentos internos. El mapeo entre ambos tipos de momentos se obtiene por medio de las fórmulas de Viète para un polinomio cuadrático, que es el polinomio característico de la dinámica relativista.

En el presente trabajo exploramos nuevas posibilidades sobre las generalizaciones propuestas por Yamaleev. Mostramos que esta teoría permite formular el sistema de ecuaciones dinámicas como ecuaciones de Heisenberg para un sistema cuántico cuadridimensional. Dentro de este esquema, las ecuaciones para los momentos internos juegan el papel de ecuaciones de evolución para un vector de estado, mientras que los momentos externos obedecen la ecuación de Heisenberg para el operador de evolución.

Para dar una idea principal sobre los principios de la nueva dinámica, empezaremos con un caso unidimensional, el que corresponde a la proyección de las ecuaciones de Lorentz en dirección del movimiento (Sec. 2). Siguiendo los respectivos desarrollos mencionados demostramos que las ecuaciones relativistas, expresadas en términos del tiempo propio, se descomponen en términos de dos ecuaciones newtonianas con diferentes parámetros de evolución. Conversamente, la ecuación relativista puede considerarse como compuesta por dos ecuaciones de Newton.

A fin de desarrollar la teoría completa es necesario extender las componentes del espacio-tiempo al espacio euclidiano cuadridimensional. Una ventaja de este espacio euclidiano cuadridimensional es que nos permite el uso de técnicas de cuaterniones. Las ecuaciones básicas de la teoría son formuladas primeramente para los momentos internos, de las que se siguen las ecuaciones para la fuerza de Lorentz como una consecuencia (Sec. 3). En la Sec. 4, las ecuaciones de evolución se presentan en la forma de ecuaciones de Heisenberg en una mecánica cuántica cuadridimensional. En la Sec. 5 se establece la correspondencia con la representación espinorial. En la Sec. 6 se obtiene la solución de la ecuación de evolución para el movimiento dentro de un campo electromagnético constante, usando el conjunto de funciones pentagonométricas.

2. Grados de libertad internos de la dinámica relativista

Consideremos el movimiento de una partícula relativista con carga e bajo la acción del campo electromagnético $\{\vec{E}, \vec{B}\}$. Las ecuaciones relativistas del movimiento en términos del tiempo propio $\tau = \{x^\mu x_\mu\}^{1/2}/c$ están dadas por las siguientes ecuaciones de la fuerza de Lorentz:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \frac{e}{mc}(\vec{E}\,P_0 + [\vec{P}\times\vec{B}]), \quad \frac{dP_0}{d\tau} = \frac{e}{mc}(\vec{E}\cdot\vec{P}), \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{P_0}{mc}. \quad (2)$$

Estas ecuaciones implican la siguiente integral del movimiento M:

$$P_0^2 - P^2 = M^2c^2, \quad (3)$$

la cual en general vale la pena distinguir del parámetro de masa m de las ecuaciones de movimiento. En el caso de la dinámica de partículas con masa $M \neq 0$, ambos valores coinciden: $m = M$; en cambio, para partículas sin masa $M = 0$, se rompe esta conexión. Para una discusión más amplia ver la Ref. 17.

La forma covariante de las ecuaciones de Lorentz en notación tensorial es obviamente

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = \frac{e}{mc}F_{\mu\nu}p^\nu.$$

Para nuestro propósito, sin embargo, necesitamos las ecuaciones anteriores, escritas explícitamente en sus componentes. Estas ecuaciones dejan invariante la norma del cuadrimomento. Esta propiedad de la ecuación de la fuerza de Lorentz, formulada de manera tensorial, resulta obvia debido al tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$ presente en el miembro derecho.

Es importante mostrar la analogía entre la fuerza tridimensional del giroscopio $\vec{G}$ y la *fuerza de Minkowski* [7] cuadridimensional. La fuerza $\vec{G}$ no trabaja a lo largo de la trayectoria $d\vec{l}$, mientras que la fuerza de Minkowski no trabaja a lo largo de la trayectoria de la línea de mundo dl^μ. La fuerza $\vec{G}$ no intercambia energía cinética, mientras que la fuerza de Minkowski no contribuye al cambio de masa (3).

En seguida exploraremos la ecuación de fuerza de Lorentz proyectada en la dirección del movimiento. En este caso, las Ecs. (1) se reducen a

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{e}{mc}(\vec{E}\cdot\vec{n})\,P_0, \quad \frac{dP_0}{d\tau} = \frac{e}{mc}(\vec{E}\cdot\vec{n})P, \quad \vec{n} = \frac{\vec{P}}{P}. \quad (4)$$

En la dinámica relativista, el así llamado cascarón de masa (3) juega un papel preponderante. Esta relación podemos escribirla como sigue:

$$c^2P^2 = c^2P_0^2 - M^2c^4 = (cP_0 - Mc^2)(cP_0 + Mc^2). \quad (5)$$

En el límite no relativista

$$cP_0 - Mc^2 \to \frac{p^2}{2m},$$

esto es, la expresión en el primer paréntesis transforma en la energía cinética de una partícula newtoniana. Esto nos inspira la idea de identificar la expresión en el segundo paréntesis también como una energía cinética. Introducimos así dos energías cinéticas:

$$\mathcal{E}_p = \frac{p^2}{2m} = (cP_0 - Mc^2), \quad \mathcal{E}_q = \frac{q^2}{2\mu} = (cP_0 + Mc^2). \quad (6)$$

Para estas nuevas cantidades introducimos las siguientes unidades

$$dim[p] = [\text{dimension of momentum}],$$
$$dim[q] = dim[\mu] = [\text{dimension of energy}].$$

Por tanto, la masa m de la partícula p es la misma que la masa de la partícula relativista. Se sigue de esta definición que, la masa propia de la partícula relativista y la masa de la partícula newtoniana son las mismas. Hay que notar que podríamos manejar otra posibilidad, la de asignar a las partículas $p,\ q$ las masas propias $m_p,\ m_q$. En este caso, la masa de la partícula relativista habría quedado definida como $2m = \sqrt{m_p m_q}$ [1].

Las definiciones (6) y (5) conducen al siguiente mapeo:

$$c^2P^2 = \frac{p^2}{2m}\frac{q^2}{2\mu}, \quad cP_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{2\mu} + \frac{p^2}{2m}\right),$$
$$Mc^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2m}\right), \quad (7)$$

el cual, desde un punto de vista formal, no es otra cosa que el mapeo de Cartan de espinores de dos componentes a las respectivas coordenadas de un vector isótropo tridimensional dado por (iP_0, P, Mc). El mapeo inverso está dado por (6).

Nuestro propósito es el de obtener las ecuaciones de evolución para los momentos p y q, los que denominaremos como momentos internos de la partícula relativista. Las ecuaciones de evolución para los cuadrados p^2 y q^2 se siguen de la ecuación de P_0. De hecho, al tomar en cuenta que Mc es una constante del movimiento, de (6) obtenemos

$$\frac{d}{d\tau}\frac{p^2}{2m} = \frac{e}{mc}(\vec{n}\cdot\vec{E})P, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{q^2}{2\mu} = \frac{e}{mc}(\vec{n}\cdot\vec{E})P. \tag{8}$$

Estas ecuaciones nos permiten derivar las ecuaciones para el módulo de los momentos internos p y q. Al substituir la siguiente fórmula para P,

$$P = pq\frac{1}{2c\sqrt{m\mu}},$$

en (8) y al igualar las expresiones de p y q, respectivamente. Finalmente arribamos al siguiente sistema de ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \ \frac{dp}{d\tau} = \frac{e}{2mc}(\vec{n}\cdot\vec{E})\, q\sqrt{\frac{m}{\mu}},\\
&(b)\ \ \frac{dq}{d\tau} = \frac{e}{2mc}(\vec{n}\cdot\vec{E})\, p\sqrt{\frac{\mu}{m}},\\
&(c)\ \ \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{n}\frac{pq}{m}\frac{1}{2c\sqrt{m\mu}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Con la primera integral

$$\frac{q^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2m} = 2Mc.$$

Inversamente, de estas ecuaciones podemos reproducir las Ecs. (4) usando (7). En el caso de un campo potencial estacionario, con

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(r), \tag{10}$$

las ecuaciones de fuerza de Lorentz implican una nueva constante del movimiento, a saber, la energía de la partícula relativista

$$\mathcal{E} = cP_0 + V(r).$$

Correspondientemente las Ecs. (9) implican dos constantes de movimiento, las que poseen la forma de una energía newtoniana

$$\mathcal{E}_p = \frac{p^2}{2m} + V(r),\ \ \mathcal{E}_q = \frac{q^2}{2\mu} + V(r). \tag{11}$$

En el caso del potencial del oscilador armónico $V(x) = m\omega^2x^2/2$, la solución de (4) está dada por la integral elíptica

$$\phi - \phi_0 = \int_{y(\phi_0)}^{y(\phi)} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}},$$

con

$$\phi = \omega(\tau-\tau_0)\sqrt{\frac{\mathcal{E}+Mc^2}{2mc^2}}$$

y

$$\kappa = \frac{\mathcal{E}-Mc^2}{\mathcal{E}+Mc^2}.$$

Esta integral elíptica implica las soluciones de (2.4) para el potencial del oscilador en términos de las funciones elípticas de Jacobi [2]:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}-Mc^2)}{m\omega^2}}\ sn(\phi|\kappa),\\
P &= \sqrt{2(\mathcal{E}-Mc^2)}\ cn(\phi|\kappa)\ dn(\phi|\kappa).
\end{aligned}$$

Nótese que estas fórmulas nos permiten también introducir las siguientes expresiones para los momentos internos:

$$p = \alpha_1 cn(\phi|\kappa),\ q = \alpha_2 dn(\phi|\kappa).$$

Al usar estas variables podemos arribar a las Ecs. (9). En el caso de un potencial con fronteras monótonamente crecientes, las soluciones están definidas por funciones de doble periodo, los periodos están dados por las siguientes integrales:

$$T_0 = 2\int_{x(3)}^{x(2)} \frac{mc\,dx}{\sqrt{(\mathcal{E}_p - V(x))(\mathcal{E}_q - V(x))}},$$

$$T_1 = 2\int_{x(2)}^{x(1)} \frac{mc\,dx}{\sqrt{(\mathcal{E}_p - V(x))(\mathcal{E}_q - V(x))}},$$

donde $x(1),\ x(2),\ x(3),\ x(4)$ son soluciones de la ecuación

$$(\mathcal{E}_p - V(x))(\mathcal{E}_q - V(x)) = 0.$$

para el potencial del oscilador, las soluciones están dadas por las funciones elípticas de Jacobi [2]

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_p}{m\omega^2}}\ sn(\phi|\kappa),\\
p &= \sqrt{2\mathcal{E}_p m_p}\ cn(\phi|\kappa),\\
q &= \sqrt{2\mathcal{E}_q m_q}\ dn(\phi|\kappa),
\end{aligned}$$

donde

$$\phi = \Omega(\tau-\tau_0), \quad \Omega = \omega\sqrt{\frac{\mathcal{E}_q}{2mc^2}} \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_q}.$$

En este caso, las fórmulas para los períodos están dadas por las integrales elípticas

$$T_0 = \frac{2}{\Omega}\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}},$$

$$T_1 = \frac{4}{\Omega}\int_{1}^{1/\kappa} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}}.$$

Las Ecs. (9) pueden estructurarse como ecuaciones de Nambu, al definir como funciones de Hamilton-Nambu las siguientes $H_p = \mathcal{E}_p,\ H_q = \mathcal{E}_q,\ c = 1$, [1,2]:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial H_p}{\partial q}\frac{\partial H_q}{\partial x} - \frac{\partial H_q}{\partial q}\frac{\partial H_p}{\partial x},$$
$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H_p}{\partial x}\frac{\partial H_q}{\partial p} - \frac{\partial H_q}{\partial x}\frac{\partial H_p}{\partial p},$$
$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H_p}{\partial p}\frac{\partial H_q}{\partial q} - \frac{\partial H_q}{\partial p}\frac{\partial H_p}{\partial q}.$$

El sistema de Ecs. (9) puede separarse en dos ecuaciones de Newton con diferentes parámetros de evolución [5]. Reemplacemos el parámetro de evolución τ por el siguiente nuevo parámetro de evolución $dt_p = d\tau(q/2mc)\sqrt{m/\mu}$. Con respecto a este nuevo parámetro de evolución, las Ecs. (9) se transforman en las ecuaciones de Newton

$$\frac{dp}{dt_p} = -(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})V(r), \quad \frac{dr}{dt_p} = \frac{p}{m}, \tag{12}$$

y con ellas, la Ec. (2.9b) se convierte en la ley de conservación de la energía. La energía de este sistema de ecuaciones es

$$\mathcal{E}_p = \frac{p^2}{2m} + V(r). \tag{13}$$

Ahora, si reemplazamos en las Ecs. (9) el parámetro τ por el nuevo parámetro de evolución $cdt_q = d\tau p/2mc\sqrt{\mu/m}$. De esta manera arribamos a las otras ecuaciones de Newton,

$$\frac{d}{d(ct_q)}q = -(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})V(r), \quad \frac{dr}{d(ct_q)} = \frac{q}{\mu},$$

con energía

$$\mathcal{E}_q = \frac{q^2}{2\mu} + V(r).$$

Por supuesto, las Ecs. (12) y (13) no son del todo independientes, sino que ellas juntas describen el movimiento de la partícula relativista [17]. En el límite no relativista las Ecs. (12) se convierten naturalmente en las ecuaciones de Newton, mientras que las Ecs. (13) *desaparecen*. El presente ejercicio nos muestra que podemos definir la pareja $\{p, \mathcal{E}_p\}$ como el momento y la energía de la partícula p, y la pareja $\{q, \mathcal{E}_q\}$ como el momento y la energía de la partícula q respectivamente. Las ecuaciones dinámicas de la partícula compleja, compuesta por las subpartículas p y q se escriben con respecto a un tiempo único, el que en la mecánica relativista recibe el nombre *tiempo propio*. En ésta terminología las subpartículas p y q significan partículas no observables de una partícula real observable, denominada por R. Yamaleev *partícula corporal*.

Como conclusión de esta sección hagamos las siguientes observaciones.

1. Las Ecs. (7) no son otra cosa que las formulas de Viète de una ecuación cuadrática. De hecho, es fácil ver que las energías cinéticas $q^2/2\mu$, $p^2/2m$ son eigenvalores del polinomio

$$X^2 - 2cP_0\,X + c^2P^2 = 0, \tag{14}$$

que denominamos *polinomio característico* de la mecánica relativista.

2. La proyección de las ecuaciones de fuerza de Lorentz sobre el vector de momento nos permite la representación para los momentos externos

$$P = Mc\,\sinh(\phi),\ \ P_0 = Mc\,\cosh(\phi),$$

donde ϕ obedece la ecuación

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{e}{mc}(\vec{E}\cdot\vec{n}). \tag{15}$$

En esta representación obtenemos las siguientes fórmulas para p y q los momentos internos:

$$\frac{p}{\sqrt{2m}} = \sqrt{2M}c\,\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right),$$
$$\frac{q}{\sqrt{2\mu}} = \sqrt{2M}c\,\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Esta representación puede denominarse *representación polar*.

3. Nótese que $q^2/2\mu \geq\ p^2/2m$. El caso $q^2/2\mu = p^2/2m$ corresponde a la partícula sin masa con $M = 0$.

4. La velocidad con respecto al tiempo coordenado está definida como

$$\frac{v}{c} = \frac{P}{P_0} = \tanh(\phi), \tag{16}$$

donde ϕ obedece la Ec. (15). Nótese que en la cinemática relativista, la variable ϕ es conocida como la *rapidez*, a la cual nunca antes se le había encontrado una interpretación física.

La relación entre la velocidad y los momentos internos se obtiene de las Ecs. (16) y (7)

$$\frac{v}{c} = \frac{2\rho}{(1+\rho)^2}, \quad \rho = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{\mu}{m}}. \tag{17}$$

3. Ecuaciones dinámicas del movimiento en el espacio euclidiano $4D$, en base cuaterniónica

En la sección anterior hemos considerado el mapeo entre los módulos de los momentos internos y externos de una partícula relativista, considerando solamente las proyecciones de las ecuaciones en la dirección del movimiento. A continuación, siguiendo los trabajos [6,8,9] construiremos ecuaciones dinámicas covariantes y buscaremos un mapeo pleno entre ambas formulaciones de la mecánica relativista.

Por cuestiones de facilidad introduzcamos la siguiente renormalización de los momentos internos y del parámetro de evolución:

$$p = \frac{p}{\sqrt{2m}}, \quad q = \frac{q}{\sqrt{2\mu}}, \quad s = \tau\frac{e}{mc}.$$

Con ello, las Ecs. (7) toman una forma mas simple, tomando incluso $c = 1$:

$$P^2{=}p^2q^2, \quad P_0{=}\frac{1}{2}(q^2 + p^2), \quad M{=}\frac{1}{2}(q^2 - p^2). \quad (18)$$

Considerando las simplificaciones mencionadas y de la Ec. (8) para el módulo al cuadrado de los momentos internos, tenemos

$$\frac{d}{ds}\, p^2 = (\vec{E}\cdot\vec{P}) = \frac{d}{ds}\, q^2. \quad (19)$$

Es necesario imponer la condición de que el espacio de las variables internas $\{p, q\}$ deba poseer tal estructura, a fin que la transición entre las ecuaciones de estas variables y las ecuaciones de $(P_0,\ P)$ sean satisfechas irrestrictamente. Puede mostrarse que esta condición se cumple solamente si las variables $\{p,\ q\}$ constituyen un vector del espacio euclidiano $4D$. Introduzcamos la pareja de vectores euclidianos $\{\vec{p}, p_4;\ \vec{q}, q_4\}$ tales que

$$p^2 = (\vec{p}^2 + p_4^2), \quad q^2 = (\vec{q}^2 + q_4^2),$$

entonces, el mapeo (7) es generalizado al siguiente, con $c = 1$,

$$P_0 = \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + p_4^2 + \vec{q}^2 + q_4^2),$$
$$P^2 = P_4^2 + \vec{P}^2 = (\vec{p}^2 + p_4^2)(\vec{q}^2 + q_4^2).$$

Una vez establecidas esta relaciones procedemos a introducir el álgebra de cuaterniones. La base cuaterniónica $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ se define por las siguientes relaciones:

$$\kappa_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3;$$
$$\kappa_3\kappa_2 = -\kappa_2\kappa_3 = \kappa_1,$$
$$\kappa_2\kappa_1 = -\kappa_1\kappa_2 = \kappa_3,$$
$$\kappa_1\kappa_3 = -\kappa_3\kappa_1 = \kappa_2.$$

Incluso podemos también usar una representación matricial; a saber, la base de las matrices de Pauli: $\{I, i\vec{\sigma}\}$, con la siguiente correspondencia:

$$\kappa_1 = i\sigma_1, \quad \kappa_2 = i\sigma_2, \quad \kappa_3 = i\sigma_3.$$

De esta manera podemos definir los cuaterniones asociados a los momentos internos

$$\mathbf{p} = \{p_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})\}, \quad \mathbf{q} = \{q_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{q})\}$$

y al momento externo

$$\mathbf{P} = P_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{P}) = \mathbf{pq}. \quad (20)$$

Separando en componentes, la expresión anterior se transforma en

$$P_4 = p_4q_4 - (\vec{p}\cdot\vec{q}), \quad \vec{P} = \vec{p}q_4 + p_4\vec{q} - [\vec{p}\times\vec{q}].$$

Correspondientemente, el mapeo (18) expresado en la base cuaterniónica queda definido como

$$P_0{=}\frac{1}{2}(\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}), \quad M{=}\frac{1}{2}(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}), \quad \mathbf{P}{=}\mathbf{pq}. \quad (21)$$

A fin de poder formular todas las ecuaciones del movimiento en esta base cuaterniónica, construiremos de igual forma los cuaterniones asociados al campo electromagnético, como una generalización de trivectores $\{\vec{E}, \vec{B}\}$:

$$\mathbf{B} = B_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{B}), \quad \mathbf{E} = E_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{E}).$$

Una vez introducidas estas definiciones podemos reescribir las Ecs. (19) como sigue

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\bar{\mathbf{E}}), \quad \frac{d}{ds}(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{P}}\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}}\mathbf{P}).$$

Derivando con respecto al nuevo parámetro de evolución s, e igualando las expresiones asociadas a los cuaterniones $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, respectivamente, arribamos a las ecuaciones

$$\frac{d}{ds}\mathbf{p} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}\,\mathbf{E}, \quad \frac{d}{ds}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\,\bar{\mathbf{p}}\,. \quad (22)$$

En el caso de la dinámica de una partícula dentro de un campo electromagnético, R.Yamaleev propone el conjunto de ecuaciones

$$\frac{d}{ds}\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{q}}\mathbf{E} - \mathbf{p}\mathbf{B}), \quad \frac{d}{ds}\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{B}\mathbf{q}). \quad (23)$$

Estas ecuaciones deben quedar acopladas a las ecuaciones cuaterniónicas de la velocidad

$$m\frac{d}{d\tau}\,\mathbf{r} = \mathbf{P} = \mathbf{pq}, \quad \mathbf{r} = r_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}). \quad (24)$$

Los módulos al cuadrado de los momentos externos satisfacen la relación

$$P_0^2 - \vec{P}^2 - P_4^2 = M^2. \quad (25)$$

Las Ecs. (23) resultan en cierto sentido más fundamentales que las ecuaciones de la fuerza de Lorentz, porque de las primeras podemos derivar estas últimas. A partir de las Ecs. (23) podemos derivar las siguientes ecuaciones de evolución para $\mathbf{P}$, P_0 y M:

$$\frac{d}{ds}\,\mathbf{P} = (\mathbf{BP} - \mathbf{PB} + \mathbf{E}\,P_0)\,, \quad (26)$$

$$\frac{d}{ds}\,P_0 = \Big(B_4\,M + (\vec{E}\cdot\vec{P}) + E_4P_4\Big)\,, \quad (27)$$

$$\frac{d}{ds}\,M = (\ B_4\,P_0\ )\,. \quad (28)$$

Estas ecuaciones no son, por supuesto, las ecuaciones convencionales de la fuerza de Lorentz. Ello se debe a que hemos empleado las componentes indefinidas $E_4,\ B_4$ del campo electromangético. A fin de regresar a las ecuaciones convencionales, debemos obviamente tomar $E_4 = 0,\ B_4 = 0$. Entonces, la Ec. (28) se convierte en la ley de la conservación de la masa, la Ec. (27) se reduce a la segunda de las Ecs. (1).

La parte escalar de la ecuación cuaterniónica (26) corresponde a

$$\frac{d}{ds}\,P_4 = 0,$$

que expresa el hecho que P_4 es una constante del movimiento. Si escogemos $P_4 \neq 0$, entonces r_4 es proporcional al tiempo propio. En cambio, si tomamos $P_4 = 0$, en dicho caso r_4 se convierte en una constante arbitraria. Por tanto, a fin de obtener una correspondencia con la dinámica relativista convencional, debemos considerar el movimiento dentro de un campo electromagnético normal con $E_4 = 0,\ B_4 = 0$, e igualmente tomar la constante de movimiento $P_4 = 0$. Sustituyendo estos valores en las Ecs.(26)-(28) recuperamos con ello la forma convencional de las ecuaciones de fuerza de Lorentz dadas en (1), (2). Las Ecs. (26)-(28) implican que la masa propia y P_4 no son más constantes del movimiento, sino más bien variables dinámicas. La cuarta componente del campo magnético B_4 genera cambios en el cuadrado de la masa invariante de Lorentz. De la misma manera, la cuarta componente del campo eléctrico E_4 genera un cambio en P_4.

Como fue señalado por Land y Horwitz [14], tal cambio de masa requiere del fenómeno de aniquilación o creación de pares. Luego que postulamos la existencia de estas componentes del campo electromagnético, es posible para el movimiento pasar por el cono de luz, dando lugar a una posible aniquilación de pares. Stueckelberg [15] encontró que, aunque podría en principio ocurrir una creación o aniquilación clásica de pares en el marco de una teoría manifiestamente covariante, tales procesos no son inducidos por los campos de Maxwell ordinarios.

Cuando $E_4,\ H_4$ no se anulan en el espacio $4D$, entonces la formulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell queda dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left(\nabla_4 - (\vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla})\right)\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = j_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{j}),$$
$$\left(\nabla_4 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla})\right)\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} = -\rho + (\vec{\kappa}\cdot\vec{\rho}).$$

Estas ecuaciones han sido consideradas por un buen número de autores dentro de la formulación de doble potencial de las ecuaciones de Maxwell provistas de la monocarga magnética. Nos damos entonces cuenta que la existencia del monopolo magnético se encuentra directamente relacionada cuando hay intercambio de la masa propia.

En sus componentes, las ecuaciones cuaterniónicas de los momentos internos (23) están dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{q}}{ds} &= \frac{1}{2}(-[\vec{E}\times\vec{p}] + \vec{E}p_4) + [\vec{q}\times\vec{B}] - \vec{B}q_4),\\
\frac{dq_4}{ds} &= \frac{1}{2}[(\vec{E}\cdot\vec{p}) + (\vec{B}\cdot\vec{q})],\\
\frac{d\vec{p}}{ds} &= \frac{1}{2}(([\vec{E}\times\vec{q}] - \vec{E}q_4) + [\vec{p}\times\vec{B}] + \vec{B}p_4),\\
\frac{dp_4}{ds} &= \frac{1}{2}[(\vec{E}\cdot\vec{q}) - (\vec{B}\cdot\vec{p})].
\end{aligned}$$

4. Formulación de las ecuaciones dinámicas como ecuaciones de Heisenberg de un sistema cuántico 4D

Ya hemos explorado dos maneras de formular las ecuaciones dinámicas de Yamaleev, en términos de los momentos internos y externos. Además de la correspondencia entre este conjunto de variables, existe otra interrelación interesante entre ellas. En esta sección mostraremos que el sistema de ecuaciones dinámicas (23), (26) puede estructurarse en un esquema de Heisenberg de un sistema cuántico cuadridimensional. Dentro de este esquema, las ecuaciones en términos de los momentos internos juegan el papel de una ecuación de evolución para el vector de estado, mientras que los momentos externos obedecen la ecuación de Heisenberg para el operador de evolución.

Recordemos que, en el campo de los cuaterniones, la base del álgebra de Dirac está dada por las siguientes matrices [18]:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \kappa_k & 0 \\ 0 & -\kappa_k \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,$$

y

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{0k} = \Gamma_0\Gamma_k, \quad \Gamma_{lk} = \Gamma_l\Gamma_k, \quad \Gamma_{012} = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2,\\
&\Gamma_{123} = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3, \quad \Gamma_{230} = \Gamma_2\Gamma_3\Gamma_0,\\
&\Gamma_{301} = \Gamma_3\Gamma_0\Gamma_1, \quad \Gamma_{0123} = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3.
\end{aligned}$$

En esta base, definamos además las siguientes matrices:

$$\Pi = P_0\Gamma_0 + P_k\Gamma_k = \begin{pmatrix} (\vec{\kappa}\cdot\vec{P}) & P_0 \\ P_0 & -(\vec{\kappa}\cdot\vec{P}) \end{pmatrix},$$

así como

$$F = F^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -(\vec{\kappa}\cdot\vec{B}) & (\vec{\kappa}\cdot\vec{E}) \\ -(\vec{\kappa}\cdot\vec{E}) & -(\vec{\kappa}\cdot\vec{B}) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

La matriz Π puede ser representada como un producto de otras dos matrices,

$$\Pi = \Psi\Psi^{+} \tag{30}$$

donde

$$\Psi :=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{p} & \bar{\mathbf{q}} \\ -\bar{\mathbf{q}} & \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{+} :=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{q} & \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{p}} & -\mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Estas matrices cuaterniónicas satisfacen las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\frac{d}{ds}\Psi = F\,\Psi, \quad \frac{d}{ds}\Psi^{+} = -\,\Psi^{+}\,F. \qquad (32)$$

Sin embargo, estas ecuaciones no son otra cosa que las Ecs. (23) expresadas en forma matricial. Ellas juegan el papel de ecuaciones de evolución para el vector de estado de un sistema cuántico finito.

De estas ecuaciones es posible derivar la ecuación de fuerza de Lorentz, construida con la estructura de la ecuación de Heisenberg:

$$\frac{d}{ds}\Pi = [F, \Pi]. \qquad (33)$$

A fin de completar el análogo, en vez de Ψ^{+}, definamos la matriz adjunta $\bar{\Psi}$, la que satisface

$$\Psi\bar{\Psi} = -mc\,I. \qquad (34)$$

Notemos, sin embargo, que estas relaciones son verdaderas, solamente si $P_4 = 0$. Entonces

$$\Psi\Psi^{+} = \Psi\Gamma_0\bar{\Psi}. \qquad (35)$$

Aquí la matriz $\Pi_0 = mc\Gamma_0$ es la matriz del momento en el estado de reposo. Entonces, la matriz Ψ corresponde a un operador de evolución para un sistema cuántico finito, que parte de un estado inicial, arribando a un estado posterior de evolución. La matriz F sirve como el generador de traslación en la evolución del tiempo propio.

A la fórmula (30) puede asociársele otra interpretación [16]. Al usar $m\Lambda = \Psi$, es posible transformar cualquier propiedad del sistema de referencia en reposo al sistema del laboratorio del observador. Por ejemplo, cualquiera de los vectores ortonormales $\{e_\mu\}$, en el sistema en reposo, transformará como un cuadrivector en el correspondiente *vector de Frenet*

$$u_\mu = \Lambda e_\mu \Lambda^{+},$$

en el sistema del laboratorio.

5. Correspondencia con la formulación espinorial

Un primer intento para construir una teoría clásica apta para describir el movimiento de la partícula con carga y espín ha sido emprendido dentro del marco de la teoría de twistores. Los objetos así llamados *twistores* aparecieron en la mecánica relativista como el resultado de un procedimiento de desdoblamiento de pares: la pareja del impulso lineal y del momento angular, de una partícula sin masa, aparecieron desdobladas en una pareja de espinores. Al aplicar esta técnica de desdoblamiento, la ecuación de fuerza de Lorentz pudo ser reformulada en términos de *twistores* [11]. Previamente, la ecuación de fuerza de Lorentz había sido escrita en términos de espinores de Weyl y matrices de Pauli, y también fue escrita, a fin de contar con la conservación de paridad, en términos de matrices, y de espinores de Dirac [12, 13].

Es notorio que la descripción en términos de *twistores* del espacio fase de una partícula con masa, carga y espín involucra en un único marco a ambas: a la ecuación de fuerza de Lorentz y a la ecuación de Bargmann-Michel-Telegdi. El twistor, en su definición, corresponde a la partícula sin masa. A fin de describir a una partícula con masa, se requirió para ello de un par de *twistores*; habiéndoseles dado la siguiente interpretación: se considera a la partícula masiva relativista como un sistema compuesto, constituido por dos partículas sin masa. Esta interpretación podría aparecer poco plausible; sin embargo, notemos que a partir de un análisis de la ecuación de Dirac, podemos arribar a la misma conclusión.

La ecuación de Dirac posee dos representaciones, así llamadas *representaciones de alta y de baja energía*. En la representación de alta energía, la ecuación de Dirac consiste de dos bloques que se separan en dos ecuaciones de Weyl, cuando la masa tiende a cero; y de manera similar; en la representación de baja energía, se logran otros dos bloques, que se separan en dos ecuaciones de Pauli, cuando la velocidad de la luz tiende a infinito. A nivel de la dinámica clásica relativista desarrollada con la ecuación de fuerza de Lorentz, observamos una situación similar: la ecuación de fuerza de Lorentz puede constituirse a partir de dos ecuaciones de Newton. Por tanto, además de la representación en términos de *twistores*, la dinámica relativista nos permite la representación de baja energía, problema que ha sido precisamente resuelto por R. Yamaleev en su teoría.

En la presente sección estableceremos un puente entre ambos enfoques. A fin de reformular las Ecs.(23), en términos de espinores, remplazaremos primeramente la base cuaterniónica por la base de las matrices de espín de Pauli. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(q_4 + i(\sigma\cdot\vec{q})) = \frac{1}{2}\Big(& i(\sigma\cdot\vec{B})(q_4 + i(\sigma\cdot\vec{q})) \\ &+ i(\sigma\cdot\vec{E})(p_4 - i(\sigma\cdot\vec{p}))\Big), \qquad (36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(p_4 + i(\sigma\cdot\vec{p})) = \frac{1}{2}\Big(& -i(p_4 + i(\sigma\cdot\vec{p}))(\sigma\cdot\vec{B}) \\ &+ i(q_4 - i(\sigma\cdot\vec{q}))(\sigma\cdot\vec{E})\Big). \qquad (37)\end{aligned}$$

Emplearemos la representación estandard de las matrices de Pauli dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la base $\sigma_4 = I, \sigma_k, k = 1,2,3,4$ es invariante bajo conjugación compleja C combinada con la transformación matricial

$$\sigma_k = UC\sigma_k U, \;\; U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

El sistema de ecuaciones matriciales (5.1a,b) es separable en cuatro ecuaciones para los espinores de Dirac. Una forma explícita del conjunto de vectores ortonormales Ψ and $\bar{\Psi}$, obtenidos a partir de (31), usando las matrices de Pauli en su representación estándar, se expresan mediante las siguientes fórmulas:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \eta_{(1)} & \eta_{(2)} & \eta_{(3)} & \eta_{(4)} \end{pmatrix},$$
$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \eta^{(1)} & \eta^{(2)} & \eta^{(3)} & \eta^{(4)} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

donde

$$\eta^{(1)} = \;(q_4 + iq_z \quad iq_x + q_y \quad p_4 - ip_z \quad ip_x - p_y)$$
$$\eta^{(2)} = \;(iq_x - q_y \quad q_4 - iq_z \quad -ip_x + p_y \quad p_4 + ip_z)$$
$$\eta^{(3)} = \;(p_4 - ip_z \quad -ip_x - p_y \quad -q_4 - iq_z \quad -iq_x + q_y)$$
$$\eta^{(4)} = \;(-ip_x + p_y \quad p_4 - ip_z \quad -iq_x + q_y \quad -q_4 + iq_z),$$

y

$$\eta_{(1)} = \begin{pmatrix} -q_4 + iq_z \\ iq_x - q_y \\ p_4 + ip_z \\ ip_x - p_y \end{pmatrix}, \quad \eta_{(2)} = \begin{pmatrix} iq_x + q_y \\ -q_4 - iq_z \\ ip_x + p_y \\ p_4 - ip_z \end{pmatrix},$$
$$\eta_{(3)} = \begin{pmatrix} p_4 + ip_z \\ ip_x - p_y \\ q_4 - iq_z \\ -iq_x + q_y \end{pmatrix}, \quad \eta_{(4)} = \begin{pmatrix} ip_x + p_y \\ p_4 - ip_z \\ -iq_x - q_y \\ q_4 + iq_z \end{pmatrix}.$$

Estos espinores satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$i\frac{d}{ds}\,\eta^{(k)}_{\alpha} = \frac{1}{2}(F^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\mu})^{\beta}_{\alpha}\eta^{(k)}_{\beta}, \quad k,\alpha = 1,2,3,4. \tag{40}$$

Por tanto, hemos descompuesto las ecuaciones cuaterniónicas (23) en un sistema de cuatro Ecs. (40) para los espinores de Dirac. Estas ecuaciones son manifiestamente covariantes de acuerdo con el grupo $SL(2,C)$, el cual es localmente isomorfo al grupo de Lorentz, siendo éste su doble cobertura. La forma espinorial de estas ecuaciones muestra igualmente que las Ecs. (23), al igual que las Ecs. (40), describen el movimiento de una partícula relativista, con espín un medio.

Más aún, dentro del marco de esta estructura dinámica de ecuaciones para los momentos internos se encuentra codificada la información sobre la pareja partícula-antipartícula. La situación es exactamente similar como en el caso de la ecuación de Dirac. De hecho, definiendo la transformación de *carga* como consistiendo del operador dado por la matriz

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y acoplada con la operación de *conjugación compleja*. Denotando este operador por $\mathcal{U}_C$, podemos fácilmente checar que

$$\mathcal{U}_C\,(F^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\mu})\,\mathcal{U}_C^{-1} = F^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\mu}, \quad \mathcal{U}_C\;\eta^{(1)} = \eta^{(2)}.$$

Entonces, actuando con el operador $\mathcal{U}_C$ sobre ambos miembros de la Ec. (40) para $\eta_{(1)}$:

$$i\frac{d}{ds}\,\eta_{(1)\alpha} = \frac{1}{2}(F^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\mu})^{\beta}_{\alpha}\eta_{(1)\beta}, \tag{41}$$

obtenemos la ecuación par $\eta_{(2)}$:

$$i\frac{d}{ds}\,\eta_{(2)\alpha} = -\frac{1}{2}(F^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\mu})^{\beta}_{\alpha}\eta_{(2)\beta},$$

y *viceversa*.

Para las Ecs. (36) y (37), escritas en la base de las matrices de espín de Pauli, la situación se describe mediante la transformación (38). Bajo esta transformación, las Ecs. (36) y (37) toman la forma

$$\frac{d}{ds}(q_4 - i(\sigma\cdot\vec{q}))$$
$$= -\frac{1}{2}\left(i(\sigma\cdot\vec{B})(q_4 - i(\sigma\cdot\vec{q})) + i(\sigma\cdot\vec{E})(p_4 + i(\sigma\cdot\vec{p}))\right),$$
$$\frac{d}{ds}(p_4 - i(\sigma\cdot\vec{p}))$$
$$= -\frac{1}{2}\left(-i(p_4 - i(\sigma\cdot\vec{p}))(\sigma\cdot\vec{B}) + i(q_4 + i(\sigma\cdot\vec{q}))(\sigma\cdot\vec{E})\right).$$

Por tanto, como resultado obtenemos la carga con signo opuesto. Vemos entonces que, en la formulación cuaterniónica, esta transformación corresponde a la transición de una ecuación cuaterniónica en su contraparte conjugada.

6. Movimiento bajo un campo electromagnético constante

En esta sección buscaremos soluciones para la evolución del cuadrimpulso, en términos del tiempo propio. Considerando la ecuación de fuerza de Lorentz como una ecuación de evolución, podemos escribirla como sigue:

$$\frac{d}{ds}|P\rangle = [F]\,|P\rangle, \tag{42}$$

donde $s = (e/mc)\tau$, y

$$|P\rangle = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

y

$$[\,F\,] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

La ecuación para el correspondiente vector contravariante es

$$\frac{d}{ds}\langle P| = -\langle P|\,[F],$$

donde

$$\langle P| = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

La siguiente forma escalar bilinear define una métrica para el espacio de Minkowski

$$\langle P|\,P\rangle = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2. \tag{44}$$

La solución general para esta ecuación de evolución ha sido elaborada recientemente por R.Yamaleev en la Ref. 19. En seguida aplicamos esta teoría al caso de la ecuación de fuerza de Lorentz.

Sea $|P_0\rangle$ un cuadrivector inicial de momento. Entonces, la solución de la Ec. (6.1) viene dada por

$$|P\rangle = \exp([F]s)|P_0\rangle. \tag{45}$$

La expansión de la función exponencial con respecto a $[F]$ queda representada por el polinomio de tercer grado

$$\exp([F]s) = g_0 + [F]g_1 + [F]^2 g_2 + [F]^3 g_3, \tag{46}$$

donde $[F]$ obedece su propia ecuación polinomial característica

$$[F]^4 + a_2[F]^2 + a_0 = 0, \tag{47}$$

con $a_2 = (H^2 - E^2),\;\; a_0 = -(\vec{E}\cdot\vec{H})^2$. La Ec. (47) posee los siguientes autovalores:

$$\lambda_1 = +\left(\frac{a_2}{2} + \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_0}\right)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = +\left(\frac{a_2}{2} - \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_0}\right)^{1/2},$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2. \tag{48}$$

Para el polinomio (47) podemos poner en correspondencia una cierta matriz, consistente exclusivamente de los coeficientes del polinomio característico. Ella resulta ser

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Definamos el siguiente vector de *funciones pentagonométricas* [19]:

$$|G\rangle = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \tag{50}$$

que obedece la siguiente ecuación de evolución

$$\frac{d}{ds}|G\rangle = E|G\rangle. \tag{51}$$

Cuando se conocen los autovalores de la ecuación polinomial, las funciones pentagonométricas se expresan mediante las funciones seno-coseno hiperbólicas:

$$g_0 = \eta\left(-\lambda_2^2\cosh(\lambda_1 s) + \lambda_1^2\cosh(\lambda_2 s)\right),$$
$$g_1 = \eta\left(-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\sinh(\lambda_1 s) + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\sinh(\lambda_2 s)\right),$$
$$g_2 = \eta\left(\cosh(\lambda_1 s) - \cosh(\lambda_2 s)\right),$$
$$g_3 = \eta\left(\frac{1}{\lambda_1}\sinh(\lambda_1 s) - \frac{1}{\lambda_2}\sinh(\lambda_2 s)\right),$$

con $\eta = 1/\lambda_1^2 - \lambda_2^2$.

En el caso especial, cuando $\vec{E}||\vec{H}$, el polinomio (6.5) puede expresarse como

$$F^4 - [(iH)^2 + E^2]F^2 + (iH^2)(E^2) = 0.$$

Por tanto, $\lambda_2^2 = E^2,\;\; \lambda_1^2 = (iH)^2$. En este caso, las funciones pentagonométricas se expresan como combinaciones lineales de las funciones hiperbólicas usuales seno-coseno.

$$g_0 = \eta\left[H^2\cosh(Es) + E^2\cos(Hs)\right],$$
$$g_1 = \eta\left(\frac{H^2}{E}\sinh(Es) + \frac{E^2}{H}\sin(Hs)\right),$$
$$g_2 = \eta\left[\cosh(Es) - \cos(Hs)\right],$$
$$g_3 = \eta\left(\frac{1}{E}\sinh(Es) - \frac{1}{H}\sin(Hs)\right),$$

con $\eta = 1/(E^2 + H^2)$.

Las funciones hiperbólicas seno-coseno que dependen únicamente del campo eléctrico, representan la aceleración de la partícula en la dirección del campo; a su vez, las funciones hiperbólicas seno-coseno que dependen únicamente del campo magnético, representan un movimiento de rotación de la partícula bajo la acción de dicho campo.

Tomando en cuenta (40), el vector $|P(s)\rangle$ puede expresarse como sigue:

$$|P(s)\rangle = [g_0 + Fg_1 + F^2g_2 + F^3g_3]$$
$$|P_0\rangle = [|P_0\rangle,\; F|P_0\rangle, \quad F^2|P_0\rangle, \quad F^3|P_0\rangle]|G(s)\rangle.$$

Entonces

$$|P(s)\rangle = [\ |P_0\rangle\ F|P_0\rangle,\ F^2|P_0\rangle,\ F^3|P_0\rangle\ ]\ |G(s)\rangle. \quad (52)$$

Es claro que el vector $|P(s)\rangle$ obedece una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\left(\frac{d^4}{ds^4} - (E^2 - H^2)\frac{d^2}{ds^2} - (\vec{E}\cdot\vec{H})^2\right)\ |P(s)\rangle = 0. \quad (53)$$

Esta proposición se sigue de la ecuación

$$\frac{d}{ds}|P\rangle = F|P\rangle.$$

Esta ecuación nos permite escribir directamente las relaciones

$$\frac{d^2}{ds^2}|P\rangle = F^2|P\rangle, \quad \frac{d^3}{ds^3}|P\rangle = F^3|P\rangle. \quad (54)$$

Consideremos ahora la siguiente matriz:

$$[PC(s)] := [|P(s)\rangle, F|P(s)\rangle, F^2|P(s)\rangle, F^3|P(s)\rangle]. \quad (55)$$

Si escogemos $s_0 = s$ como el instante en que inicia la evolución, entonces la ecuación

$$|P(s')\rangle = [\ PC(s)\ ]\ |G(s')\rangle \quad (56)$$

describirá la relación entre $|P(s')\rangle$ y $|G(s')\rangle$ para un instante $s' > s$.

Notemos que el vector $|G(s)\rangle$ es definido únicamente por los invariantes del campo electromagnético. Al tomar en cuenta las ecuaciones (6.16), la matriz $[PC(s)]$ puede igualmente escribirse como sigue:

$$[PC(s)] = [\ |P(s)\rangle, |P'(s)\rangle, |P''(s)\rangle, |P'''(s)\rangle\ ] \quad (57)$$

Esta matriz no es otra cosa que la matriz de Wronskian. Por tanto, su determinante $Det[PC(s)]$, el que también es denominado el wronskiano, obedece el siguiente teorema.

Teorema

El wronskiano $Det[PC(s)]$ de la ecuación de evolución

$$\frac{d}{ds}|P\rangle = F|P\rangle \quad (58)$$

es una constante del movimiento.

Demostración

Desarrollemos la derivada del determinante $Det[PC(s)]$. Al tomar en cuenta la fórmula del determinante aunada con la Ec. (6.11), concluimos que

$$\frac{d}{ds}Det[PC(s)] = Det\left[|P\rangle, \frac{d}{ds}|P\rangle, \frac{d^2}{ds^2}|P\rangle, \frac{d^4}{ds^4}|P\rangle\right].$$

Toda vez que

$$\frac{d}{ds^4}|P\rangle = [F]^4|P\rangle = \frac{d^2}{ds^2}|P\rangle + (\vec{E}\cdot\vec{H})^2|P\rangle,$$

obtenemos

$$\frac{d}{ds}Det[PC(t)] = 0.$$

Fin de la demostración

Por tanto, el volumen $Det[PC(s)]$ se conserva durante el movimiento de la partícula cargada relativista.

7. Conclusiones

En el marco de la nueva formulación de la dinámica relativista, construida por R.M. Yamaleev, las ecuaciones dinámicas de la partícula cargada relativista pueden formularse en términos de momentos tanto externos como internos. Esta situación nos refleja una verdadera estructura compleja de la partícula relativista. Esta teoría despliega nuevos aspectos, los que quedaron en el pasado escondidos en los desarrollos de técnicas tradicionales. Una condición para obtener una correspondencia entre las variables internas y externas es que requerimos de un espacio cuadridimensional con métrica euclideana. Ésta es la única hipótesis de la teoría. La existencia de las variables internas se sigue de la ecuación cuadrática para el cascarón de masa, y del hecho que encontramos, además, otra ecuación cuadrática cuyos coeficientes son los momentos externos, y cuyos autovalores son precisamente los momentos internos, a dicha ecuación la denominamos ecuación característica de la dinámica relativista.

Hemos mostrado que el nuevo sistema de ecuaciones dinámicas puede encuadrarse en el esquema de Heisenberg de un sistema cuántico cuadridimensional. En este esquema, las ecuaciones para los momentos internos juegan el papel de una ecuación de evolución para el vector de estado, mientras que los momentos externos obedecen la ecuación de evolución para un operador. Las soluciones de la ecuación de fuerza de Lorentz para el movimiento, dentro de campos electromagnéticos constantes, han sido desarrolladas por medio de las funciones pentagonométricas, y se puede mostrar que existe una nueva constante adicional del movimiento, el volumen dado por $Det[PC(s)]$, el que se conserva durante el movimiento de la partícula cargada, relativista.

1. R.M. Yamaleev, *J. Ann. Phys.* **285** (2000) 141.
2. R.M. Yamaleev, *J. Ann. Phys.* **277** (1999) 1.
3. R.M. Yamaleev, *J. Ann. Phys.* **292** (2001) 157.
4. R.M. Yamaleev, *Proceeding of 24 coll. group theor. methods in phys. 2002*, 2003, Ed. R. Kerner, 279-288.
5. R.M. Yamaleev, *Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* **50** (2004) 999, Ed. A.Ñikitin.
6. R.M. Yamaleev, *J. Advances in Applied Clifford algebras* **13(2)** (2003) 183.
7. R.M. Yamaleev, *Ann. Found.L.Broglie* 2004; **29** Hors série 2 1017.
8. R.M. Yamaleev, *Horizons in world physics* **244** (2004) 1-27. Ed. A. Reimer.
9. R.M. Yamaleev, *Horizons in world physics* **1** (2004) 1. Ed. V. Dvoeglazov.
10. V. Bargman, L. Michel y V. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.* **2** (1959) 435.
11. A. Bette, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 4617.
12. A. Proca, *J. Phys. Radium* 15 (1954) 5.
13. A.O.Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles* (Dover Publications, INC., New York).
14. M.C. Land y L.P. Horwitz, *J. Math. Phys.* **4** (1993) 61.
15. E.C.G. Steuckelberg, *Helv.Phys.Acta.* **14** (1941) 316.
16. W.E. Baylis, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 4293.
17. R.M. Yamaleev, A.Fernández Osorio y A.R. Rodríguez Dgz, *Rev. Mex. Fís.* **50** (2004) 443.
18. M.Sokolovsky, *J. Advances in Applied Clifford algebras* **11(1)** (2001) 109.
19. R.M. Yamaleev, *J. Math. Anal. Appl.* **14** (2005) 1; R.M. Yamaleev, *J. Advances in Applied Clifford algebras* **15(1)** (2005) 123.