INVESTIGACIÓN REVISTA MEXICANA DE FÍSICA 53 (4) 314–317 AGOSTO 2007

Contribución del momento magnético a la fuerza de reacción a la radiación en forma relativista

G. Ares de Parga, M. Ortiz-Domínguez y R. Mares
Dpto de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, U.P. Adolfo López Mateos, Zacatenco, 07738, México D.F., México,
e-mail: gonzalo@esfm.ipn.mx

Recibido el 29 de mayo de 2007; aceptado el 28 de junio de 2007

A partir de la fuerza de reacción a la radiación de origen magnético de Smirnov, se obtiene una ecuación relativista que describe el movimiento de una partícula cargada con momento magnético constante de espín $\overrightarrow{\mu}$. Se deduce otra ecuación tipo Landau-Lifshitz que incluye el momento magnético. Se encuentra una diferencia fundamental entre la propuesta de energía radiada clásica y la relativista.

Descriptores: Fuerza de reacción a la radiación; momento magnético; partícula cargada.

Starting with the magnetic Smirnov reaction force, a relativistic equation which describes the motion of a charged particle with constant magnetic moment of spin $\overrightarrow{\mu}$, is obtained. A Landau-Lifshitz-like equation is deduced with magnetic moment. A fundamental difference between the classical and relativistic radiation rate of energy is found.

Keywords: Reaction radiation force; magnetic moment; charged particle.

PACS: 03.30.+p; 03.50.-z; 03.50. De; 11.10.-z

1. Introducción

Como un ejemplo importante de la teoría microscópica de las fluctuaciones de un sistema cuántico en interacción con un termostato de índole gaussiano, propuesto por G.F. Efrenov y A.Y. Smirnov [1], Smirnov considera la interacción de un neutrón no relativista de momento magnético constante de espín $\overrightarrow{\mu}$ y acoplado a un termostato constituido por la radiación de un cuerpo negro [2]. El resultado fundamental consiste en la presencia de la fuerza de reacción a la radiación $\overrightarrow{F}_{\mu-rad}$, de índole puramente magnética, proporcional a la quinta derivada temporal del vector de posición o a la de orden tres respecto a la aceleración. De forma similar, pero a partir de consideraciones puramente clásicas, Heras [3] obtiene el mismo resultado. Lo anterior es una diferencia básica con relación a la expresión bien conocida de la fuerza de reacción a la radiación normal $\overrightarrow{F}_{rad}$ [4], que contiene hiperaceleraciones.

Por otra parte, E.J. Moniz y D.H. Sharp [5] obtuvieron la clásica expresión para $\overrightarrow{F}_{rad}$, partiendo del hamiltoniano estándar y en la representación de Heisenberg para una partícula cargada no-relativista con interacción con un campo electromagnético cuantizado, esto es, en el cuadro de una electrodinámica cuántica no-relativista. Es decir, para ambas fuerzas $\overrightarrow{F}_{\mu-rad}$ y $\overrightarrow{F}_{rad}$, se tienen deducciones cuánticas y clásicas y se pueden integrar como una sola fuerza total de reacción a la radiación $\overrightarrow{F}_T = \overrightarrow{F}_{\mu-rad} + \overrightarrow{F}_{rad}$. De lo anterior se deduce que las mismas técnicas para deducir la $\overrightarrow{F}_{rad}$ relativista podrán ser usadas para deducir la forma relativista de $\overrightarrow{F}_{\mu-rad}$ y por lo tanto también de $\overrightarrow{F}_T$.

Recientemente, Ares de Parga [6] y por otro lado Mares, Ortiz-Domínguez y Ares de Parga [7] han desarrolado una técnica que permite obtener a partir de la ecuación de Abraham la ecuación de Lorentz-Dirac [8] [LD] y a partir de esta última la ecuación de Landau-Lifshitz [9] [LL]. El propósito del presente trabajo consiste en extender y aplicar dicho formalismo al caso de $\overrightarrow{F}_{\mu-rad}$ y $\overrightarrow{F}_T$.

El trabajo se distribuye de la manera siguiente. En la Sec. 2 se presentan brevemente los resultados de Smirnov [2] (Heras [3]) y de Abraham [4] (Moniz-Sharp [5]). En la Sec. 3, se presenta el formalismo desarrollado por Ares de Parga [6] para obtener la ecuación de LL. En la Sec. 4, a partir de la fuerza de Smirnov [2] no relativista, se deduce la ecuación de movimiento relativista de una partícula cargada con momento magnético constante de espín $\overrightarrow{\mu}$. La Sec. 5 está dedicada a encontrar una generalización tipo LL para la nueva ecuación relativista. En las conclusiones, Sec. 6, se presenta una controversia sobre la energía radiada al infinito.

2. Resultados de Abraham y Smirnov

Sabemos que Abraham [4] obtuvo una expresión no relativista para la fuerza de reacción a la radiación que posteriormente fue generalizada a la relatividad especial y que se conoce como la ecuación de LD [8]. La expresión de Abraham es dada por

$$\overrightarrow{F}_{rad} = \tau_o m \frac{d\overrightarrow{a}}{dt}, \tag{1}$$

donde $\tau_o = 2q^2/3mc^3$ siendo q y m la carga y la masa de la partícula, y c la velocidad de la luz. Este mismo resultado lo obtienen Moniz y Sharp [5], partiendo de un hamiltoniano cuántico, utilizando la representación de Heisenberg y operadores Gaussianos. Por otro lado, Smirnov [2] utilizando un hamiltoniano cuántico y con métodos similares a los de Moniz y Sharp [5], encuentra la expresión para la fuerza de reacción a la radiación de índole puramente magnética dada por

$$\overrightarrow{F}_{\mu-rad} = -\frac{2(g\mu_o)^2}{15c^5}\frac{d^5\overrightarrow{r}(t)}{dt^5} = -(\tau_\mu)^3 m\frac{d^5\overrightarrow{r}(t)}{dt^5}, \quad (2)$$

donde g representa al factor-g de la partícula, $\mu_o = e\hbar/2mc$ es el magnetón de la partícula y $\tau_\mu = (2(g\mu_o)^2/15mc^5)^{1/3}$, en el caso del electrón $\tau_\mu = 12.8\ \tau_o$. Heras [3] encuentra el mismo resultado pero por métodos clásicos. Es decir, que los mismos razonamientos se utilizan para obtener las Ecs. (1) y (2). Esto nos permitirá deducir una expresión relativista de la fuerza $\overrightarrow{F}_{\mu-rad}$, además de obtener una nueva forma de presentarla.

3. Deducción de la ecuación de Landau-Lifshitz

Antes de deducir la expresión relativista de la fuerza de reacción a la radiación de origen magnético, describamos una técnica desarrollada por Ares de Parga [6] y posteriormente por Mares *et al.* [7], para obtener la ecuación de LL a partir de la fórmula de Larmor. Es bien sabido que la radiación emitida por una partícula al infinito puede ser representada por la fórmula de Larmor no relativista. Esta última se generaliza facilmente al caso relativista dando como resultado que la razón de radiación de energía-momentum, se expresa como

$$P^\alpha = -\tau_o m a^\beta a_\beta v^\alpha. \quad (3)$$

Sin embargo, este último resultado se obtiene suponiendo que el movimiento de la partícula obedece a la ecuación de Lorentz; es decir: no se ha considerado una fuerza de reacción a la radiación. Esto implica que para que la fórmula de Larmor sea válida, Eq. (3), hemos tenido que forzar a la partícula a moverse según la ecuación de Lorentz por medio de una fuerza externa. Si eliminamos a esa fuerza y considerando el principio de superposición como válido al eliminarla, podemos suponer que la razón de radiación de energía-momentum se expresa como

$$\begin{aligned} P^\alpha &= -\tau_o m\left[\frac{q}{cm}F^{\lambda\beta}L_\beta\right]\left[\frac{q}{cm}F_{\lambda\epsilon}L^\epsilon\right]L^\alpha \\ &= -\tau_o\frac{q^2}{c^2m}F^2L^\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

donde se ha abreviado el doble producto por F^2 y se ha introducido al 4-vector L^α de campo que coincide con el valor del 4-vector velocidad a lo largo de la trayectoria de la partícula pero cuya derivada con respecto al tiempo propio es igual a la que valdría si siguiera a la ecuación de Lorentz, es decir,

$$m\frac{dL^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}L_\beta \ \text{ pero } \ m\frac{dv^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + f^\alpha_{rad}, \quad (5)$$

donde f^α_{rad} representa a la fuerza de reacción a la radiación. A lo largo de la trayectoria de la partícula los valores de L^α y v^α son iguales, sin embargo cuando se derivan con respecto al tiempo propio satisfacen ecuaciones distintas. En realidad es un abuso de lenguaje decir que se derivan con respecto al tiempo propio pues ese tiempo propio siempre se define con respecto a una trayectoria dada y aquí existen dos trayectorias, la de Lorentz y la del verdadero movimiento. Tendríamos pues que definir el tiempo propio de la trayectoria de Lorentz τ_L y el tiempo propio de la verdadera trayectoria τ. Es decir: $dL^\alpha/d\tau_L \neq dv^\alpha/d\tau$. Por simplicidad utilizamos sólo τ.

Si damos como válida a la expresión de la Ec. (4), la ecuación de movimiento para una partícula cargada puede escribirse como

$$ma^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + f^\alpha_{rad} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + D^\alpha + \tau_o\frac{q^2}{c^4m}F^2L^\alpha, \quad (6)$$

donde el término D^α es introducido con el propósito de realizar un balance de energía al contraer a la Ec. (6) con el 4-vector v_α de la velocidad. Nótese que se puede cambiar a L^α por v^α siempre y cuando no se tenga que derivar con respecto al tiempo propio. Por otro lado, la razón de radiación de energía-momentum, también se puede expresar como

$$P^\alpha = -\tau_o m a^2 v^\alpha = \tau_o m \dot{a}^\beta v_\beta v^\alpha. \quad (7)$$

Esto implica, siguiendo el mismo razonamiento que se usó para obtener la expresión de la Ec. (4), otra expresión equivalente para P^α; es decir,

$$P^\alpha = \tau_o\frac{q}{c}\frac{dF^{\lambda\beta}L_\beta}{d\tau}v_\lambda v^\alpha. \quad (8)$$

Así, se obtiene a la ecuación de movimiento expresada de la forma

$$ma^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + D^\alpha - \tau_o\frac{q}{c^3}\frac{dF^{\lambda\beta}L_\beta}{d\tau}v_\lambda v^\alpha. \quad (9)$$

La contracción de las Ecs. (6) y (9) con v_α, da como resultado al par de ecuaciones

$$D^\alpha v_\alpha + \tau_o\frac{q^2}{c^2m}F_L^2 = 0,$$

y

$$D^\alpha v_\alpha - \tau_o\frac{q}{c}\frac{dF^{\alpha\beta}L_\beta}{d\tau}v_\alpha = 0, \quad (10)$$

cuya substracción conduce a

$$\frac{dF^{\alpha\beta}L_\beta}{d\tau}v_\alpha + \frac{q}{cm}F_L^2 = 0. \quad (11)$$

Esto significa que la ecuación de movimiento se puede expresar como sigue:

$$ma^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + \tau_o\left[\frac{q}{c}\frac{dF^{\alpha\beta}L_\beta}{d\tau} + \frac{q^2}{c^4m}F_L^2v^\alpha\right]. \quad (12)$$

Realizando la derivada del segundo término de la derecha de la Ec. (12) y recordando que L^α satisface a la ecuación de

Lorentz, se obtiene la ecuación de LL. Es decir, la técnica para obtener a la ecuación de LL a partir de la ecuación de LD, se resume en sustituir a la aceleración y a la hiperaceleración por su valor con respecto a la ecuación de Lorentz en la ecuación de LD. Esto es,

$$a^\alpha \rightarrow \frac{q}{cm}F^{\alpha\beta}L_\beta \quad \text{y} \quad \dot{a}^\alpha \rightarrow \frac{q}{cm}\frac{dF^{\alpha\beta}L_\beta}{d\tau}. \tag{13}$$

recordando que cuando no se tenga que derivar L^α se podrá sustituir por v^α.

4. Fuerza magnética de reacción a la radiación relativista

A partir de la ecuación de Abraham,

$$m\overrightarrow{a}=\overrightarrow{F}_{ext}+\overrightarrow{F}_{rad}=q\left[\overrightarrow{E}+\frac{\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}}{c}\right]+\tau_o m\dot{\overrightarrow{a}}, \tag{14}$$

Siguiendo un Ansatz análogo al de Pauli [10] y Landau-Lifshitz [9] que consiste en tomar a $\tau m\dot{\overrightarrow{a}}$ como parte de la expresión relativista, es decir,

$$ma^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + \tau_o m\dot{a}^\alpha + A^\alpha, \tag{15}$$

donde A^α se debe aumentar para poder tener un balance de energía en el sentido de contraer a la Ec. (15) con v_α y obtener

$$\tau_o m\dot{a}^\alpha v_\alpha + A^\alpha v_\alpha = 0. \tag{16}$$

Por otro lado, sabemos que $\dot{a}^\alpha v_\alpha + a^\alpha a_\alpha = \dot{a}^\alpha v_\alpha + a^2 = 0$, entonces podemos proponer entre muchos otros resultados, argumentando la hipótesis de simplicidad de Dirac [8], que

$$A^\alpha = \tau_o m\frac{a^2}{c^2}v^\alpha. \tag{17}$$

Se obtiene entonces la ecuación de Lorentz-Dirac. De la misma manera, si partimos de la fuerza de Smirnov-Heras [2,3], Ec. (2), se debe proponer el siguiente esquema:

$$ma^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta - (\tau_\mu)^3 m\dddot{a}^\alpha + B^\alpha, \tag{18}$$

donde B^α se deducirá a partir de una relación cinética. Es decir, a partir de

$$\dot{a}^\alpha v_\alpha + a^2 = 0, \tag{19}$$

se obtiene

$$\ddot{a}^\alpha v_\alpha + 3\dot{a}^\alpha a_\alpha = 0, \tag{20}$$

y derivando nuevamente

$$\dddot{a}^\alpha v_\alpha + 4\ddot{a}^\alpha a_\alpha + 3\dot{a}^2 = 0. \tag{21}$$

Utilizando la hipótesis de simplicidad de Dirac y de la misma forma que anteriormente, podemos proponer que

$$B^\alpha = -(\tau_o)^3 m\left[4\ddot{a}^\beta a_\beta + 3\dot{a}^2\right]\frac{v^\alpha}{c^2}. \tag{22}$$

Por lo que la generalización relativista del resultado de Smirnov [2] y Heras [3], es

$$F^\alpha_{\mu-rad} = -(\tau_\mu)^3 m\left[\dddot{a}^\alpha + \left[4\ddot{a}^\beta a_\beta + 3\dot{a}^2\right]\frac{v^\alpha}{c^2}\right]. \tag{23}$$

Llegamos entonces a una expresión general para la ecuación de movimiento de una partícula cargada con momento magnético constante de espín $\overrightarrow{\mu}$:

$$\begin{aligned} ma^\alpha &= \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta + \tau_o m\left[\dot{a}^\alpha + \frac{a^2}{c^2}v^\alpha\right] \\ &\quad - (\tau_\mu)^3 m\left[\dddot{a}^\alpha + \left[4\ddot{a}^\beta a_\beta + 3\dot{a}^2\right]\frac{v^\alpha}{c^2}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Aunque la generalización se obtiene a partir de la hipótesis de simplicidad de Dirac [8], queda abierta la posibilidad de aumentar cualquier término ortogonal al 4-vector v_α. Sin embargo, al igual que en el caso de la ecuación de LD, el aumentar otro término no tiene justificación física.

5. Ecuación de tipo Landau-Lifshitz

La ecuación de LD poseé soluciones que presentan dificultades físicas. En efecto, al ser una ecuación de tercer orden aparecen soluciones llamadas divergentes o autoaceleraciones (runaway solutions) y preaceleraciones. Por ello, el método descrito en la Sec. 3 es interesante pues se obtiene una ecuación de segundo orden que no presentará ningun tipo de problemática física. Como la ecuación generalizada, Ec. (24), es una ecuación de quinto orden en la posición, podríamos pensar que se tiene también una problemática semejante a la presentada en la ecuación de LD. Por ello nos proponemos utilizar la técnica desarrollada en la Sec. 3 que consiste simplemente en reemplazar el valor de la aceleración por el de la fuerza de Lorentz, representada por la transformación (13)

$$ma^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}v_\beta \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &+ \tau_o\left[\frac{q}{c}\frac{dF^{\alpha\beta}L_\beta}{d\tau} + \frac{q^2}{c^4 m}F_L^2 v^\alpha\right] \\ &- (\tau_\mu)^3\left[\frac{q}{c}\frac{d^3F^{\alpha\beta}L_\beta}{d\tau^3} + \frac{q^2}{c^4 m}\right. \\ &\left.\times\left[4\frac{d^2F^{\lambda\beta}L_\beta}{d\tau^2}F_{\lambda\epsilon}v^\epsilon + 3F^2\right]v^\alpha\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Recordemos que cuando no se tenga que derivar L^α, este último se sustituye por v^α.

6. Conclusiones

Finalmente la Ec. (25) representa una propuesta que describe el movimiento de una partícula clásica con momento magnético de espín constante $\overrightarrow{\mu}$. Al ser una ecuación de segundo orden no presentará ningún tipo de autoaceleraciones ni preaceleraciones. Sin embargo, todavía hace falta realizar el análisis de la energía radiada al infinito. En efecto, al igual que para el caso de LD, se sabe que la energía radiada al infinito está representada por la fórmula de Larmor relativista. Esta última aparece en la ecuación de movimiento como la razón de radiación al infinito del vector de energía-momentum para el caso de LD.

$$P = \tau_o m a^2 \;\rightarrow\; P^\alpha = -\tau_o m a^2 \frac{v^\alpha}{c^2}. \tag{27}$$

Para el caso puramente magnético, el resultado no relativista [3] y el relativista son

$$P{=}(\tau_\mu)^3 m \dot{a}^2 \;\rightarrow\; P^\alpha{=}(\tau_\mu)^3 m \left[4\ddot{a}^\beta a_\beta + 3\dot{a}^2\right] \frac{v^\alpha}{c^2}. \tag{28}$$

Existe pues una diferencia entre la propuesta de Heras [3] y la generalización relativista de la Ec. (24). En efecto, aunque el término con $\ddot{a}^\alpha a_\alpha$ pueda considerarse una corrección relativista, existe una diferencia fundamental con la propuesta de Heras [3] debido al término multiplicado por 3. Sin embargo, el utilizar el método de Pauli [10] para encontrar la expresión de la fuerza en forma relativista, a partir de la expresión de la fuerza no relativista, asegura un resultado que contiene al balance de energía. Por lo tanto la expresión relativista descrita por la Ec. (23) es correcta y en consecuencia aplicando el método desarrollado en la Sec. 5, podemos concluir que la ecuación relativista buscada está representada por la Ec. (25).

Acknowledgement

Este trabajo ha sido parcialmente patrocinado por COFAA, EDI Y EDD (IPN).

1. G.F. Efremov y A.Y. Smirnov, *Sov. Phys.-JETP* **53** (1981) 547.
2. A.Y. Smirnov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 1135.
3. J.A. Heras, *Phys. Rev. E* **58** (1998) 5047.
4. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 2nd edn., 1975) Chap. 17
5. E.J. Moniz y D.H. Sharp, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2850.
6. G. Ares de Parga, *Found. Phys.* **36** (2006) 1474.
7. Mares, Ortiz-Domínguez y Ares de Parga, enviado al J. *Phys. A: Math and Gen.* (2007).
8. P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **167** (1938) 148.
9. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 2nd. edn.(Pergamon, London, 1962) § 76.
10. W. Pauli, *Relativitätstheorie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaflen* (Teubuer-Leipzig, 1921) Vol 5, art. 14.