

# Simulación de la turbulencia de un flujo que pasa alrededor de un cilindro de sección cuadrada a partir de la utilización de la simulación de grandes escalas y de fronteras inmersas

M. Salinas-Vázquez, W. Vicente-Rodríguez, E. Chol-Orea y V. Leyva García  
*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Torre de Ingeniería, Ciudad Universitaria, 04510, México D.F., México,  
e-mail: msalinasv@ii.unam.mx, wvicenter@ii.unam.mx,  
echlo@ii.unam.mx, vleyvag@ii.unam.mx*

Recibido el 26 de junio de 2007; aceptado el 27 de noviembre de 2007

Se estudia el flujo alrededor de un cilindro de sección cuadrada a bajo número de Reynolds utilizando la simulación de grandes escalas, basada en los modelos submalla de la función de estructura. Con el propósito de verificar su uso en casos de interés práctico en la industria y en la ingeniería, se implementaron fronteras inmersas que simulan el comportamiento de un cuerpo sólido, en este caso de un cilindro cuadrado. Igualmente se utilizaron aceleradores de paso de tiempo que permiten incrementar su valor. Los resultados obtenidos son de gran calidad sin el gasto requerido en tiempo y en memoria asociados a la simulación de grandes escalas. Esto permite una aproximación de gran precisión en el estudio de la transferencia de calor, la acústica y las vibraciones mecánicas en flujos reales con geometrías complejas.

*Descriptores:* Turbulencia; estela; simulación numérica.

A Large Eddy Simulation study of flow around a square cylinder at low Reynolds number is presented. The Large Eddy Simulation is based on structure function subgrid models. To assess this method's relevance to industrial and engineering flows, immersed boundary conditions are implemented to render the solid surface, *i.e.* the square rod. We also introduce an artificial acoustic stiffness reduction for fully compressible flows which allows a much higher time step to be implemented. Very high quality results are obtained without the usually high cost of process time and memory requirements associated with LES. The proposed method opens a new approach to high precision modeling for heat transfer, acoustics and mechanical vibrations problems of real flows with complex geometries.

*Keywords:* Turbulence; wake; numerical simulation.

PACS: 47.21./i; 47.27.Gs; 47.40.Dc

## 1. Introducción

Los flujos alrededor de cuerpos es un tema de importancia práctica en estructuras y cuerpos expuestos al flujo de un fluido, como edificios, puentes o tuberías en intercambiadores de calor. El correcto estudio de la turbulencia trae como beneficio la posibilidad de conocer las vibraciones mecánicas en las estructuras, así como el efecto instantáneo de ciertos fenómenos de transferencia de calor y acústica.

A partir de los trabajos de flujos alrededor de cilindros de sección circular, ampliamente estudiados, se han extendido conocimientos básicos de éstos para investigar las estructuras turbulentas de la estela tridimensional para un cilindro de sección transversal cuadrada. Diferentes trabajos [1-10] encontraron, mediante simulaciones numéricas o trabajos experimentales, que los modos de transición de este flujo son similares a los encontrados para un cilindro circular. A partir de un número de Reynolds  $Re \approx 50$ , se comienzan a formar grandes vórtices bidimensionales alternados llamados "camino de Von Karman" y que siguen una ley de Strouhal. A partir de un número de Reynolds de 200 sucede la tridimensionalidad del flujo. Esta tridimensionalidad se da a partir de inestabilidades transversales, modos A y B. Las ondulaciones creadas por estos modos propician que los vórtices alternados del camino de Von Karman detrás del cuerpo tengan partes que se encuentran en zonas con diferente velocidad longitudinal. Es-

to hace que las diferentes partes de los vórtices se convecten a diferentes velocidades, alargándose y produciendo gran vorticidad longitudinal. Este efecto de tridimensionalidad completa se puede observar claramente a partir de números de Reynolds relativamente bajos de 300 a 400, con la ventaja de que las estructuras son todavía de gran tamaño y su estudio puede ser más detallado. Además de que los fenómenos que interesan sobre vibraciones mecánicas, acústica y transferencia de calor en el cuerpo antes mencionados, son producidos principalmente por estos vórtices. Después de una cierta distancia, que se acorta en función del número de Reynolds, la tridimensionalidad de la turbulencia se generaliza, hasta que la turbulencia se transforma en una turbulencia cuasi-homogénea isóotra.

Una característica importante que diferencia al cuerpo de sección cuadrada con el de sección circular es que en el primer caso el desprendimiento de la capa límite sucede en puntos bien establecidos por la geometría del cuerpo, aristas de cuadrado. Con esto se crean dos zonas de recirculación bien definidas y casi estacionarias sobre las caras del cuadrado paralelas al flujo.

Como todo vórtice, los grandes vórtices del camino de Von Karman están ligados con subpresiones en su centro. Estas diferencias de presión, entre su centro y sus alrededores, generan fuerzas alrededor del cuerpo que propician el ruido y las vibraciones mecánicas. Debido a que la aparición de las

grandes estructuras es periódica, sigue una ley de Strouhal, la frecuencia y magnitud de estos fenómenos se puede conocer a partir de un estudio estocástico de la turbulencia. Con el uso de la simulación de grandes escalas y de otras herramientas numéricas como las fronteras inmersas, se pretende estudiar flujos turbulentos con el fin de influir en la turbulencia a partir de cambios menores en las geometrías de los cuerpos o controlándola por medio de recursos mecánicos, como se hace en chorros [11]. Esto permitirá aminorar o corregir los problemas mecánicos, térmicos y acústicos antes mencionados en problemas reales, tales como los que suceden en edificios, partes de automóviles, intercambiadores de calor, entre otros.

En este trabajo se desarrolló un código numérico de alto orden en coordenadas generalizadas para flujos compresibles. A partir de una corrección en la ecuación de energía, se permite aumentar el paso de tiempo, por lo que se abre la posibilidad de simular flujos por debajo de números de Mach,  $M = 0.1$ , donde los efectos compresibles son prácticamente nulos. Con esta herramienta se estudia el comportamiento turbulento de una estela a bajos números de Reynolds ( $250 \leq Re \leq 1000$ ) detrás de un cilindro de sección cuadrada, con el fin de entender mejor la dinámica de las estructuras turbulentas en este tipo de flujo. A diferencia de trabajos anteriores de otros autores, en el presente se incorporan fronteras inmersas y aceleradores de paso de tiempo que permitirán el estudio de flujos alrededor de geometrías complejas.

## 2. Ecuaciones de movimiento

En un marco de referencia cartesiano  $x, y, z$ , las ecuaciones de movimiento para un flujo compresible pueden ser escritas en la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = S, \tag{1}$$

donde  $U$  es un vector de cinco componentes definido por

$$U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e)^T, \tag{2}$$

donde  $u = (u_1, u_2, u_3)$  es el vector velocidad y  $\rho$  es la densidad. La Ec. (1) representa la evolución de la densidad (ecuación de continuidad), de la cantidad de movimiento y de la energía. Para un gas ideal la energía total está definida como

$$\rho e = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2), \tag{3}$$

y los flujos  $F_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$  para un fluido newtoniano están dados por

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu S_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu S_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu S_{i3} \\ (\rho e + p) u_i - 2\mu u_j S_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

donde  $k = \rho C_p \kappa$  es la conductividad térmica y  $\kappa$  la difusividad térmica. El símbolo  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $S_{ij}$

es la componente deviatorica del tensor de deformación. El término  $S_{ij}$  se escribe

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot u) \delta_{ij} \right). \tag{5}$$

La viscosidad molecular se establece a través de la ley empírica de Sutherland [12],

$$\mu(T) = \mu(T_{ref}) \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{S}{T_{ref}}}{1 + \frac{S}{T}}, \tag{6}$$

donde  $S, T_{ref}$  y  $\mu(T_{ref})$  son propiedades del gas. La conductividad térmica  $k(T)$  se obtiene asumiendo que el número molecular de Prandtl es

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{C_p \mu(T)}{k(T)}. \tag{7}$$

Para este análisis se considera  $Pr=0.7$ . La ecuación clásica de estado para un gas ideal referente a la presión estática  $p$ , la temperatura  $T$  y la densidad  $\rho$ ,

$$p = R \rho T, \tag{8}$$

cierra el sistema, con  $R = C_p - C_v$ . También se debe recordar que  $\gamma = C_p/C_v$  es constante e igual a 1.4.  $C_p$  y  $C_v$  son la capacidad térmica específica a presión y volumen constante, respectivamente

### 2.1. Modelo de turbulencia

La técnica de simulación de grandes escalas (*Large-Eddy Simulation, LES*, por sus siglas en inglés) consiste en simular de forma directa, sin necesidad de un modelo de turbulencia, únicamente las grandes escalas del flujo, esto es, las escalas mayores al tamaño local de la malla. Las pequeñas escalas, o menores al tamaño local de la malla, son filtradas y su efecto sobre el movimiento de las grandes escalas es modelado a partir de un modelo sub-malla. Las ecuaciones de LES son encontradas por la aplicación de un filtro espacial  $G_\Delta(x)$  de tamaño  $\Delta$  en las ecuaciones de movimiento. A partir del filtrado se tiene una parte filtrada libre de pequeñas escalas y una parte submalla. La variable original estará dada por la suma de la parte filtrada ( $\bar{f}$ ) más la parte sub-malla ( $f'$ ):

$$f = \bar{f} + f'. \tag{9}$$

Sustituyendo las variables originales por su definición LES [Ecs. (1)-(8)] y realizando un promedio de tipo Favre en las ecuaciones de movimiento, aparecen términos submalla que son función únicamente de la parte submalla de la variable [13]. Estos términos similares a los esfuerzos de Reynolds, se llaman esfuerzos submalla y se obtienen a partir de un modelo submalla. Este modelo se basa en la aproximación de Boussinesq que considera que los efectos de las pequeñas escalas sobre las grandes estarán dados por una viscosidad turbulenta y el tensor de deformación filtrado.

El modelo utilizado en este trabajo es el modelo de la función de estructura selectivo que es una extrapolación al espacio físico del modelo espectral [14-16].

### 3. Esquema numérico

El sistema en coordenadas generalizadas se resuelve por medio de una extensión del esquema explícito McCormack, de segundo orden en el tiempo y cuarto orden en el espacio, desarrollado por Gottlieb & Turkel [17]. Este esquema numérico es un esquema corrector – predictor que usa coordenadas generalizadas. La adaptación a las coordenadas generalizadas se realiza introduciendo una matriz jacobiana que transforma una geometría compleja de malla no uniforme o geometría curvilínea, en un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , dentro de una geometría ortogonal simple con malla uniforme en el sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [13].

#### 3.1. Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales imponen a las variables termodinámicas, temperatura y presión (o densidad), valores constantes e iguales a su valor de referencia  $T_0, P_0$ . Las dos componentes transversales de la velocidad se consideran nulas, mientras que la velocidad longitudinal es igual a su valor de referencia  $U_0$ , que es el valor de la velocidad de entrada del flujo al dominio.

Las condiciones de frontera se basan en relaciones entre las ondas que se propagan en las fronteras [18,19]. Este método permite la implementación de diferentes tipos de condiciones de frontera de gran precisión. En la dirección longitudinal se impuso una condición de entrada manteniendo el valor de las velocidades y el de la temperatura constantes:  $U_{ent} = U_0, V_{ent} = 0, W_{ent} = 0, T_{ent} = T_0$ . Igualmente se impuso una salida parcialmente no reflexiva, donde se requiere que se fije la presión en el infinito igual a la presión de referencia  $P_0$  y un valor proporcional a la cantidad de información que se quiere que se refleje desde la salida a partir de la constante  $K=0.1$  [19]. En la dirección normal  $z$  se impusieron condiciones de frontera que permiten que el fluido salga y entre libremente. En la dirección transversal se impusieron condiciones de frontera periódicas, lo que implica físicamente un cilindro de largo infinito o una nula influencia de paredes en esta dirección.

#### 3.2. Fronteras inmersas

La utilización de geometrías complejas inmersas en la malla de cómputo [20] se ha empleado comúnmente desde hace algunos años en esquemas de tipo volumen o elemento finito. Sin embargo, esto trae como consecuencia que se tengan que utilizar esquemas altamente disipativos y/o de bajo orden que permitan la simulación.

Una aproximación diferente consiste en usar simples mallas cartesianas en esquemas de alto orden, principalmente basados en las diferencias finitas, a partir de agregar términos fuente a las ecuaciones de transporte. En flujos incompresibles se ha demostrado que al imponer velocidades nulas en las zonas bloqueadas o zonas dentro del cuerpo sólido, e interpolando el valor de las variables a los puntos cercanos a

estos nodos bloqueados, se puede conseguir una convergencia adecuada de la simulación (*ghostpoints*).

Basándose en estas consideraciones del bloqueo de celdas, se implementó el método que se presenta a continuación. Si bien desde un punto de vista hidrodinámico este método no acarrea mayor problema, en flujos compresibles la acústica debe de ser tratada correctamente con el fin de evitar la reflexión o creación de ondas espurias. Con este fin se procedió de la siguiente forma:

1. Se imponen condiciones duras a la velocidad y a la temperatura, al mantenerlas en todo tiempo iguales a cero e iguales a su valor de referencia, respectivamente, dentro del cuerpo sólido. Esto se logra agregando un término fuente que anule el movimiento natural del fluido en esta zona. Este término fuente será del tipo  $S\phi = C_\phi dt(\phi^* - \phi_0)$ , donde  $\phi^*$  es el valor calculado en el paso de tiempo,  $\phi_0$  es el valor fijo de la variable (cero para las velocidades y  $T_0$  para la temperatura),  $dt$  el paso de tiempo y  $C_\phi$  una constante que depende del subpaso de tiempo del esquema de integración temporal.
2. Las ondas acústicas generadas por esta imposición se absorben dentro del cuerpo, haciendo que la presión tienda a su valor de referencia en el centro del mismo. Esto se logra agregando un término fuente que mantiene atado el valor de presión a su valor de referencia, pero sin imponérselo. Este término es del tipo  $S\phi = CpC_\phi dt(\phi^* - \phi_0)$ , donde todas las variables son similares a las del punto anterior ( $\phi_0 = P_0$ ) y  $Cp$  es una función de la forma del cuerpo que vale cero en las fronteras y fuera del cuerpo y uno en su centro geométrico. La transición de cero a uno es lineal dentro del cuerpo.
3. La densidad, debido a su relación con la presión y la temperatura a partir de la ecuación de los gases ideales, se va amoldando en función de la presión.

Este método puede generar fuertes gradientes, principalmente de velocidad, en tiempos muy cercanos a la inicialización, los cuales afectan el cálculo a tal grado que lo lleven a divergir. A pesar de que para el presente trabajo no se tuvieron problemas, se observó que para números de Reynolds altos, del orden de  $10^3$  ó  $10^4$ , los cálculos divergían. La solución fue impedir que ciertas variables, principalmente la densidad, sobrepasara o disminuyera de un cierto valor en un corto tiempo después de la inicialización y hasta que el flujo tomara su estado estacionario. Otra forma encontrada fue imponer una inicialización más real a partir de la imposición de perfiles medios de estelas turbulentas.

### 4. Método de aceleración del cálculo

Debido a que un estudio correcto de la turbulencia necesita que la discretización temporal sea explícita, se tienen importantes restricciones en el valor del paso de tiempo. Con el

fin de evitar pasos de tiempo pequeños, como consecuencia de la simulación correcta de la acústica del problema, se utilizó el método de Wang & Trouvé [21]. Este método consiste en agregar sólo en la ecuación de energía la parte acústica de la dilatación,

$$D_{ac} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \right), \quad (10)$$

de la forma siguiente:

$$\left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{\gamma P}{\gamma - 1} D_{ac}, \quad (11)$$

donde  $\alpha$  es un número real mayor que 1 y su valor máximo depende del flujo y del tratamiento de las condiciones de frontera. Para este caso se utilizaron valores máximos de  $\alpha=10$ . Con esta modificación la velocidad del sonido del problema se transforma en  $c' = c/\alpha$ . Esto permite simular flujos a números de Mach por debajo de  $M = 0.1$  con pasos de tiempo hasta 10 veces mayores.

## 5. Características de las simulaciones

El dominio computacional tiene las dimensiones de  $18L \times 6L \times 14L$  en las tres direcciones respectivamente, longitudinal  $x$ , transversal  $y$  y normal  $z$ .  $L$  es el lado del cuadrado. El número de nodos es de  $200 \times 80 \times 139$ , lo que hace que se tengan un total de poco más de dos millones de nodos. Basados en las variables de referencia  $U_0, T_0, P_0$  en las condiciones a la entrada y en el lado del cuadrado  $L$ , se tienen los siguientes números adimensionales:  $Re=U_0L/\nu(T_0) = 500$  y  $M = U_0/(\gamma RT_0)^{1/2} = 0.1$ ;  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $\gamma$  es el coeficiente adiabático y  $R$  la constante particular del gas a estudiar [Ec. (8)]. Se realizó un refinamiento de la malla, cerca de las paredes del cilindro, siguiendo una función tangente hiperbólica, con lo que se tiene que el primer punto desde cualquier pared está a  $0.01L$ . La presente configuración se obtuvo mediante un estudio de la independencia de los resultados con respecto a la malla a diferentes resoluciones, teniendo en cuenta la calidad en la simulación y los recursos computacionales. Se debe tener en cuenta que un mayor refinamiento de la malla permite la solución directa de un mayor número de escalas de la turbulencia, lo que trae consigo resultados más cercanos a la realidad. Sin embargo, como se planea la utilización de estos métodos en problemas prácticos y de ingeniería, se decidió el uso de mallas poco densas. El criterio de independencia de malla se obtuvo a partir de obtener los valores globales de los coeficientes de arrastre y sustentación, así como la frecuencia de aparición de los vórtices. Para las diferentes configuraciones se obtuvieron diferencias menores al 3%. Se realizaron cuatro simulaciones para diferentes números de Reynolds,  $Re=250, 500, 750$  y  $10000$ , con una configuración similar de la malla. Las simulaciones fueron desarrolladas en un servidor HP Integrity 4640 con dos procesadores Itanium II. El tiempo aproximado de cálculo para 100 unidades de tiempo es de entre 40 a 48 horas

de tiempo máquina de un sólo procesador. Los valores medios se obtienen promediando en el tiempo y en la dirección transversal, que es una dirección homogénea.

## 6. Resultados

### 6.1. Desarrollo temporal del flujo

Debido al carácter transitorio de la simulación de grandes escalas, aunada a las características uniformes de las condiciones iniciales, es posible hacer un estudio cualitativo del desarrollo temporal del flujo. Por este motivo se puede observar la transición de un flujo uniforme a un flujo simétrico cuasi-bidimensional alrededor del cilindro y a su vez a un flujo antisimétrico totalmente tridimensional. Este estudio muestra primero la formación de dos vórtices bidimensionales acomodados de forma simétrica detrás del cilindro (Fig. 2a). Después de un tiempo estos vórtices crecen (Fig. 2b). Como se puede observar, estos vórtices bidimensionales jamás toman un arreglo antisimétrico, como se encontró en un flujo a un número de  $Re > 50$  [1-10]. La creación de dos modos de estabilidad, A y B que se forman a  $Re \approx 50$  y  $200$  respectivamente, se empiezan a vislumbrar en la Fig. 2c. Las estructuras bidimensionales empiezan a ondularse, al tomar la forma de 's' repetidas (Fig. 2d). Diferentes partes de ella se encuentran en diferentes posiciones, y debido a que la velocidad en estos puntos sigue un perfil cortante, las diversas partes de la estructura turbulenta se convectan a velocidad variada, creando estructuras alargadas en la dirección del flujo. Este estiramiento es fuente de vorticidad longitudinal, por este motivo se identifican mejor los colores blancos y negros en las dos últimas figuras; colores que no se observaban en figuras anteriores. La Fig. 2f muestra este alargamiento, creándose el carácter antisimétrico del flujo, cuando la turbulencia se ha desarrollado totalmente.

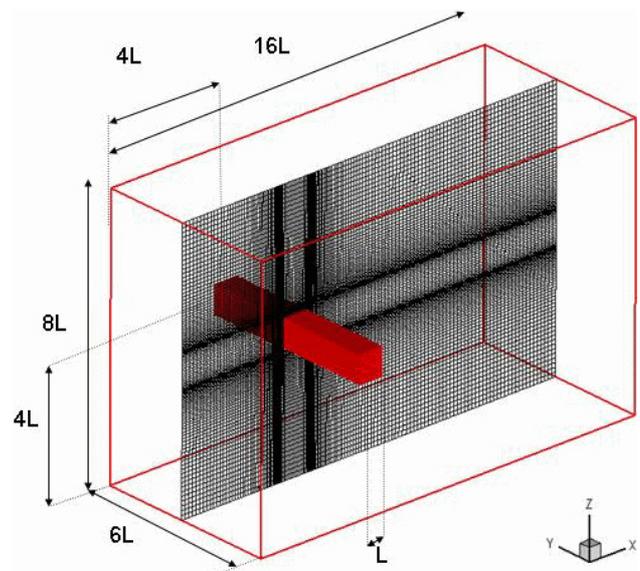


FIGURA 1. Esquema de la configuración del dominio de cálculo.

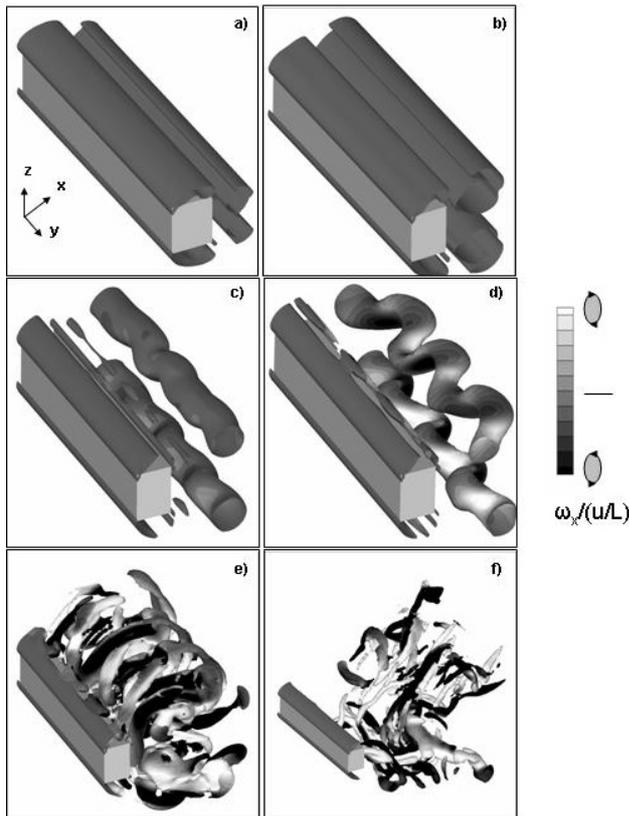


FIGURA 2. Isosuperficies de  $Q(L/U_0) = 1.5$ , para 6 tiempos diferentes a partir de las condiciones iniciales,  $Re=500$ .  $t/(U_0/L)=3, 5, 15, 21, 65$ . Las superficies están coloreadas por la vorticidad longitudinal e indican la dirección de giro de los vórtices longitudinales.

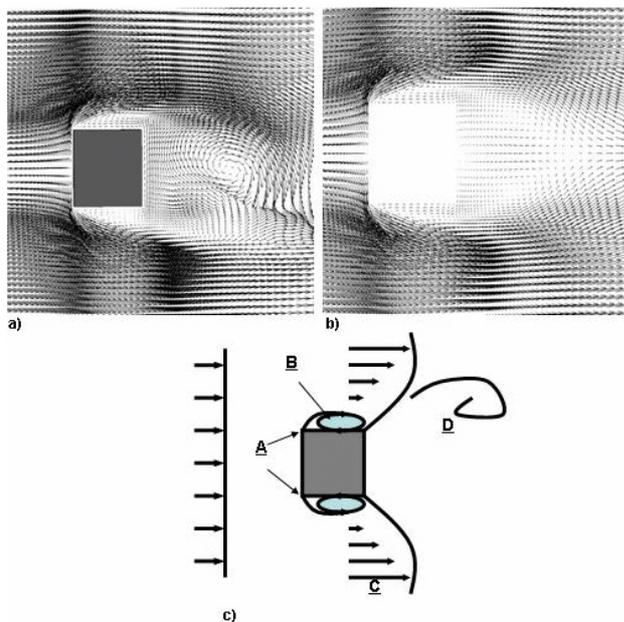


FIGURA 3. Configuración del flujo alrededor del cuerpo de sección cuadrada. a) Vectores de velocidad instantánea  $u_1-u_2$ . b) Vectores de velocidad media  $U_1-U_2$ . c) Esquema de la configuración del flujo.

A diferencia de lo que sucede en los estudios de estabilidad, cuando el número de Reynolds se cambia, en el presente trabajo el carácter antisimétrico de las grandes estructuras, es decir, el camino de Von Karman, no se crea hasta que el flujo se vuelve tridimensional totalmente. Comprobándose lo observado por Von Karman en sus trabajos de principio de siglo y reportado por el Levi [22]: “Cuando un cuerpo se pone en movimiento a partir del reposo, ... empieza a formarse algún tipo de ‘capa de separación’ (*trennungsschicht*); ésta se va enrollando poco a poco, primero simétricamente a ambos lados del cuerpo, hasta que alguna perturbación destruye su simetría, después de lo cual se inicia el movimiento periódico”.

## 6.2. Topología del flujo

El flujo alrededor de un cuerpo se traduce como la formación de una capa límite alrededor del cuerpo, y la de una estela detrás del mismo debido a la formación de un perfil deficitario por la presencia del cuerpo. Si bien la obtención del punto de desprendimiento de la capa límite es un trabajo por sí solo complejo, en el caso de una sección transversal cuadrada este punto está bien definido y se encuentra en sus aristas (punto A en la Fig. 3c). En las Figs. 3a y 3b se muestra el campo de velocidades en un plano  $x-z$ , para un campo instantáneo y para el campo promedio. Se pueden observar los puntos de desprendimiento en ambos casos. Este desprendimiento crea dos recirculaciones (punto B en la Fig. 3c) cuasi-estacionarias, una en cada lado del cuadrado. Estas recirculaciones son en forma y magnitud muy semejantes desde un punto de vista instantáneo y promedio. Detrás del cuerpo se forma una estela debido al perfil deficitario (punto C en la Fig. 3c). En la figura del campo instantáneo, se observa la formación de un gran vórtice antisimétrico en la parte superior del cuadrado. Esta estructura es totalmente diferente a su contraparte promedio, la cual es simétrica, dos vórtices detrás del cuerpo, y varias veces menores en tamaño y magnitud.

La formación de estos vórtices instantáneos, como ya se dijo, implica la creación de zonas de baja presión en su centro. Su desprendimiento alternado es la causa de las vibraciones mecánicas y de los fenómenos acústicos sobre el cilindro. En la Fig. 4 se muestra el comportamiento de la presión dentro de los vórtices. En la Fig. 4a se observa una isosuperficie de baja presión  $P = 0.97P_0$ , principalmente en el centro de los vórtices de mayor intensidad. A partir de estas isosuperficies se puede observar la topología de estos vórtices alternados que se describirán mejor en la Fig. 5. En la Fig. 4b se observan los contornos de presión alrededor del cuerpo en un plano  $x-z$ . La diferencia de los valores entre el punto  $C_1$  y el  $C_2$  es la principal fuente de una fuerza paralela al flujo que arrastraría al cuerpo en la dirección del flujo, fuerza de arrastre y como se verá mas adelante, su valor se mantiene cuasi-constante en el tiempo. Mientras que la diferencia entre los punto  $D_1$  y  $D_2$  es la causante de una fuerza perpendicular al flujo que movería al cuerpo de abajo hacia arriba, fuerza de sustentación, la cual tiene un valor promedio prácticamente

nulo, pero con grandes fluctuaciones, las cuales están en función de la aparición alternada de los vórtices.

Como se mencionó anteriormente, los estudios de estabilidad permitieron establecer que a partir de un  $Re=200$ , la estela se vuelve tridimensional. En la Fig. 5 se observan isosuperficies de criterio  $Q$ , (segundo invariante del gradiente de velocidades,  $(Q=(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}))^{1/2}$ ,  $\Omega_{ij}$  parte antisimétrica y  $S_{ij}$  parte simétrica del tensor gradiente de velocidad) [23]. A partir de estas figuras se observa cómo se vuelve tridimensional la capa de mezcla que se forma por el desprendimiento de la capa límite (punto A). Esto genera que los vórtices transversales de gran tamaño (punto B), salgan con una cierta perturbación y se vuelvan tridimensional. Estas perturbaciones, relacionadas con los modos A y B de la estela, generan la formación e intensificación de vorticidad longitudinal (punto C) que conecta cada uno de estos grandes vórtices y propicia la formación de una turbulencia tridimensional. En la Fig. 5c las estructuras turbulentas se colorearon con valores de vorticidad longitudinal ( $\omega_x$ ), observándose que estas estructuras longitudinales tienen valores alternados, positivos-negativos, de esta componente de la vorticidad. Debido al bajo número de Reynolds utilizado, los resultados resaltan mejor la topología de la estela, punto muy importante y que se quiso destacar en el presente trabajo.

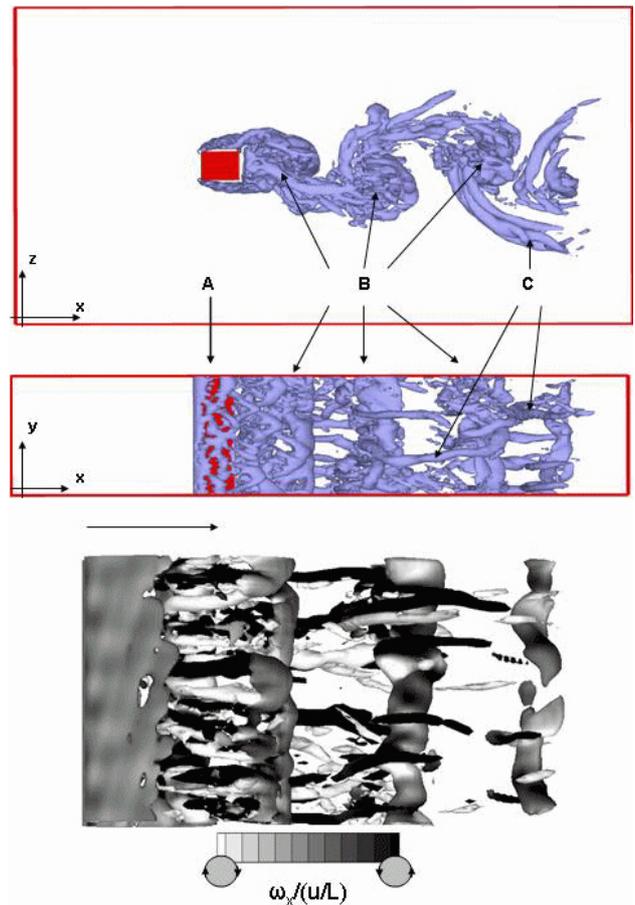


FIGURA 5. Topología de la turbulencia del flujo detrás de cuerpo de sección cuadrada,  $Re=500$ . a) Isosuperficies de  $Q=5$ , plano  $x-z$ . b) Isosuperficies de  $Q=5$ , plano  $x-y$ . c) Misma figura que la b, alargada en la dirección transversal  $z$  coloreada por la vorticidad longitudinal. Los colores negro y blanco indican la dirección de rotación en la dirección longitudinal,  $x$ .

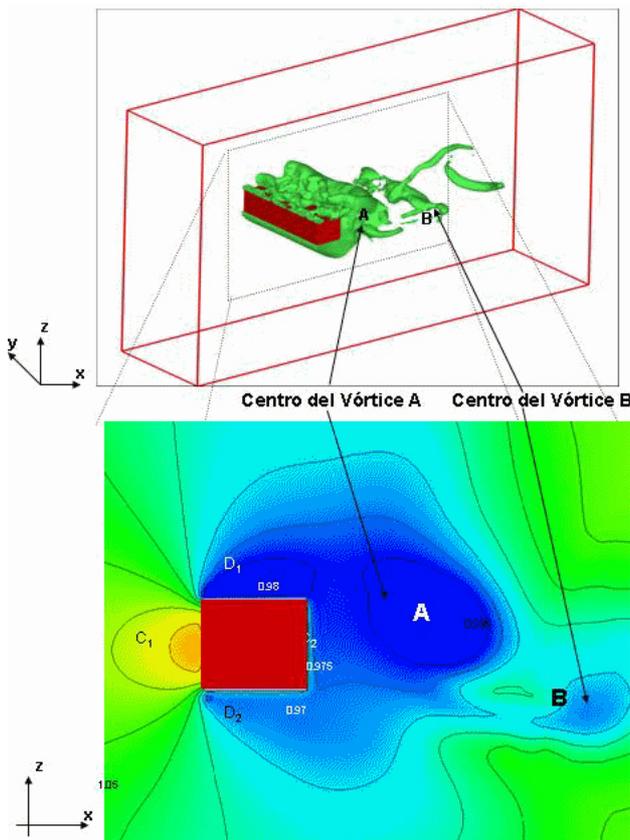


FIGURA 4. Subpresión en el centro de los vórtices que conforman el camino de Von Karman. a) Isosuperficie de presión,  $P=0.97P_0$ . b) Contornos de presión en un plano  $x-z$  mostrado en la figura a.

### 6.3. Cambios en la topología de la turbulencia debidos al número de Reynolds

Dentro del rango estudiado de números de Reynolds se pueden observar importantes cambios en las características de la turbulencia. En las Figs. 6a-6c se presentan las isosuperficies de criterio  $Q(L/U_0) = 10$  para tres diferentes números de Reynolds simulados. Para un  $Re=250$ , valor muy cercano del crítico  $Re \approx 200$ , se observa la formación de vórtices antisimétricos detrás del cuerpo. Sin embargo, las estructuras que forman el camino de Von Karman son de gran tamaño y poco energéticas. Esto se puede comprobar a partir de crear isosuperficies del criterio  $Q$  a diferentes valores. Al aumentar este valor se van vislumbrando sólo las estructuras más energéticas, razón por la cual para valores de  $Q(L/U_0)=1000$  todas las estructuras turbulentas de la estela han desaparecido para este número de Reynolds. Para números de Reynolds  $Re \geq 500$ , la turbulencia presenta todos los rasgos de turbulencia tridimensional. La diferencia más palpable que se observa es que a mayor número de Reynolds las estructuras turbulentas presentan una disminución en el grosor y en el tamaño,

pero un aumento en su intensidad. Este fenómeno es el que dará paso a una turbulencia homogénea isotrópica para números de Reynolds grandes. El incremento en la intensidad se comprueba, cualitativamente, al comparar los diferentes casos para  $Q(L/U_0)=1000$ ; se observa una mayor cantidad de estructuras para números de Reynolds  $Re \geq 500$ . De forma cuantitativa esto se comprueba al realizar un estudio estadístico de la turbulencia y comparar la magnitud de los esfuerzos de Reynolds tanto normales como tangenciales.

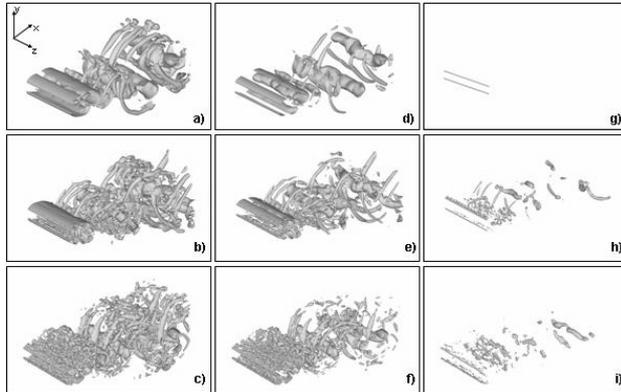


FIGURA 6. Topología de la turbulencia del flujo detrás de cuerpo de sección cuadrada, para diferentes números de Reynolds. Isosuperficies de  $Q=10 (L/U_0)$ : a)  $Re=250$ , b)  $Re=500$ , c)  $Re=1000$ . Isosuperficies de  $Q=100 (L/U_0)$ : d)  $Re=250$ , e)  $Re=500$ , f)  $Re=1000$ . Isosuperficies de  $Q=1000 (L/U_0)$ : g)  $Re=250$ , h)  $Re=500$ , i)  $Re=1000$ .

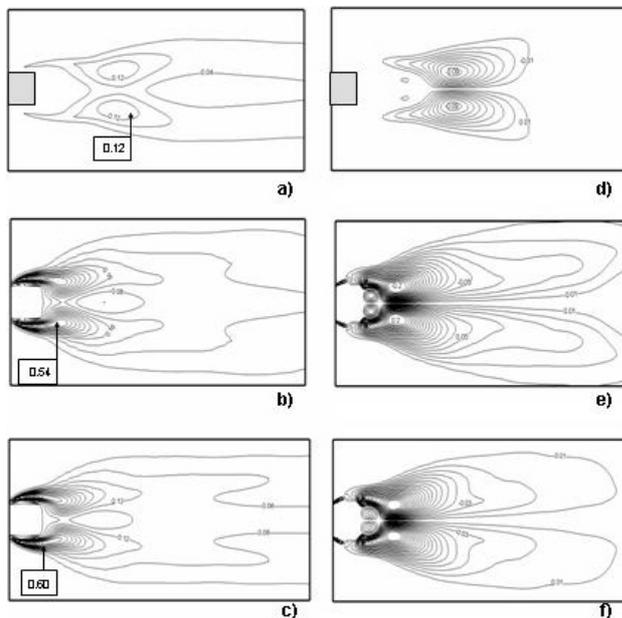


FIGURA 7. Esfuerzos de Reynolds en el plano x-y. Esfuerzo de Reynolds normal  $\langle u'_1 u'_1 \rangle / U_0^2$ : a)  $Re=250$ , b)  $Re=500$ , c)  $Re=1000$ . Paso de los contornos  $\langle u'_1 u'_1 \rangle / U_0^2 = 0.04$ . Esfuerzo de Reynolds tangencial  $\langle u'_1 u'_2 \rangle / U_0^2$ : e)  $Re=250$ , f)  $Re=500$ , g)  $Re=1000$ . Paso de los contornos  $\langle u'_1 u'_2 \rangle / U_0^2 = 0.01$ .

En la Fig. 7 se comparan los esfuerzos de Reynolds normales  $\langle u'_1 u'_1 \rangle$ , y el tangencial  $\langle u'_1 u'_2 \rangle$  para  $Re=250, 500$  y  $1000$ . El primer punto interesante se presenta en los contornos para  $Re=250$ . En ellos se ve que los contornos están lejos del cuerpo y que cerca de éste los niveles turbulentos son muy pequeños, prácticamente nulos. Los valores máximos, tanto de  $\langle u'_1 u'_1 \rangle$  como de  $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ , se observan en la zona donde los vórtices del camino de Von Karman se producen. Como ya se vio, el tamaño de estos vórtices para este número de Reynolds es grande en comparación con el resto de las otras simulaciones, de ahí su alejamiento con el cuerpo. El efecto de la rápida conversión a tres dimensiones de las capas de mezcla de la estela se observa a partir de  $Re=500$ , ya que los mayores valores de  $\langle u'_1 u'_1 \rangle$ , se encuentran cerca de las paredes del cuerpo donde esto ocurre. Igualmente los contornos se pegan más al cuerpo conforme se aumenta el número de Reynolds. Esto nos muestra la creación de estructuras turbulentas más pequeñas, pero mucho más energéticas. Este punto sobre la intensidad de la turbulencia se comprueba fácilmente al observar que los valores obtenidos tanto de  $\langle u'_1 u'_1 \rangle$  como de  $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ , aumentan conforme se aumenta el número de Reynolds.

#### 6.4. Parámetros globales y validación

Las diferencias de presión creadas por el flujo, así como el esfuerzo cortante en la pared en la capa límite, crean las fuerzas de superficie en el cuerpo antes mencionadas. En este flujo, donde una de las direcciones es homogénea, se crea una fuerza paralela y otra perpendicular al flujo en la dirección  $z$ . La primera se conoce como fuerza de arrastre y la segunda como fuerza de sustentación. Para esta forma de cuerpo en particular, el efecto producido por los gradientes de presión es la principal aportación, dejando a la de los esfuerzos cortantes como marginal. Esto debido a la geometría del cuerpo que induce un desprendimiento de la capa límite temprano y localizado.

La Fig. 8 presenta el comportamiento temporal del coeficiente de arrastre y de sustentación:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 L}, \quad (12)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 L}, \quad (13)$$

promediados en la transversal, donde  $F_D$  y  $F_L$  son las fuerzas de arrastre y sustentación por unidad de ancho, para cada uno de los números de Reynolds estudiados. El valor medio de los coeficientes de arrastre encontrados se muestran en la Tabla I. Igualmente el rango de valores experimentales y numéricos tridimensionales encontrados por diferentes autores se presentan en la tabla [1-10]. El coeficiente de sustentación medio tiene valores prácticamente nulos (del orden de  $10^{-3}$  para cada simulación). Sin embargo, la importancia de este coeficiente radica en que a partir de él se puede obtener la frecuencia de aparición de los vórtices alternados

detrás del cuerpo [1]. Al aplicar una transformada de Fourier a la señal temporal antes presentada del coeficiente de sustentación (Fig. 8) se encuentra la frecuencia característica de aparición de los vórtices transversales detrás del cuerpo ( $f_s$ ), para cada caso. El número de Strouhal está dado por  $St = f_s / (L/U_0)$ . Los resultados son presentados en la misma Tabla I.

En el caso del coeficiente de arrastre se observa una sobre evaluación de su valor para valores  $Re \leq 500$ . Sin embargo, la tendencia es la misma que la observada en todos los trabajos

TABLE I. Comparación de variables globales con resultados de trabajos numéricos y experimentales anteriores (Exp/Num) [1-10]. Coeficiente de arrastre  $C_D$ , número de Strouhal  $St$  y desviación estándar del coeficiente de flotación  $C_L'$ .

	Re=250		Re=500	
	Presente	Exp/Num	Presente	Exp/Num
$C_D$	1.87	1.4-1.5	2.18	1.85-1.9
$St$	0.167	0.14-0.16	0.154	0.12-0.135
$C_L'$	0.25	0.2	0.73	1.2
	Re=750		Re=1000	
	Presente	Exp/Num	Presente	Exp/Num
$C_D$	2.22	$\approx 2.1$	2.31	$\approx 2.1$
$St$	0.152	0.12-0.125	0.143	$\approx 0.12$
$C_L'$	0.892	-	1.02	-

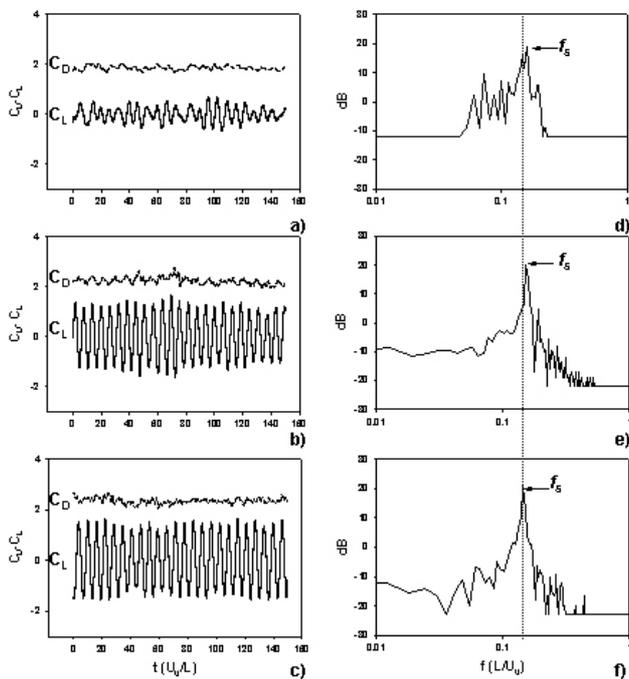


FIGURA 8. Parámetros globales. Evolución temporal de los coeficientes de arrastre y sustentación promediados en la transversal, eje z: a)  $Re=250$ , b)  $Re=500$  y c)  $Re=1000$ . Frecuencia característica  $f_s$  de la aparición de los vórtices detrás del cuerpo: d)  $Re=250$ , e)  $Re=500$  y f)  $Re=1000$ .

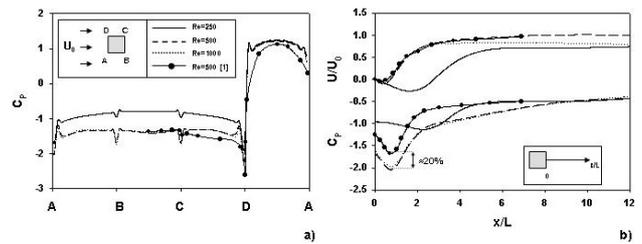


FIGURA 9. Parámetros globales. a) Coeficiente de presión en las paredes del cuerpo siguiendo su perímetro, para  $Re=250$ , 500 y 1000. b) Coeficiente de presión y velocidad media longitudinal detrás el cuerpo para  $y/L=7$ .

precedentes: un aumento del coeficiente de arrastre a partir de  $Re=200$  y una saturación del valor alrededor de  $C_D \approx 2.2$  para valores  $Re \geq 750$ . Aunque ligeramente mayores los valores del número de Strouhal con respecto a los resultados experimentales, el comportamiento es el mismo a los resultados experimentales: una disminución en su valor al incrementar el número de Reynolds. Esto indica que las fuertes inestabilidades tridimensionales que se incrementan en función del número de Reynolds propician una más lenta aparición de los vórtices transversales del camino de von Karman (menor frecuencia de aparición).

Otro parámetro sensible a comparar es el coeficiente de presión:

$$C_P = \frac{(P - P_0)}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2}. \tag{14}$$

En la Fig. 9, se puede observar el comportamiento de este coeficiente sobre las paredes alrededor del flujo. A pesar de que el coeficiente de presión tiene el mismo comportamiento para todos los números de Reynolds. Esto es, valores máximos y positivos, mayores al valor del medio ambiente  $P_0$ , en la cara de enfrente del cubo, donde choca el flujo. En esta zona se puede observar que los valores y la forma del perfil es similar para los tres números de Reynolds comparados. Se encuentran valores negativos en las otras tres caras, como consecuencia de la creación de los vórtices sobre estas caras (ver Fig. 4). Sin embargo, el valor del coeficiente tiene valores máximos para  $Re=250$  y mínimos para  $Re \geq 500$ . Esta diferencia está ligada con la intensidad y el tamaño de los vórtices que se crean detrás del cilindro. Los resultados de esta simulación comparan bien con resultados precedentes [1]. La Fig. 9b muestra el coeficiente de presión y la velocidad longitudinal media detrás del cuerpo. En estas gráficas se observa el cambio de tamaño de los vórtices medios detrás del cuerpo, al comparar la distancia entre la pared del cilindro y el valor mínimo de cada variable, para los diferentes números de Reynolds. Sin embargo, existe un desplazamiento de las gráficas de casi 20% del coeficiente de presión, entre lo encontrado por Sohankar [1] y lo encontrado por el presente trabajo. Esta diferencia es mostrada en la gráfica 9b, y es posible que se deba a la utilización de un código totalmente compresible, aunado con el uso de fronteras inmersas, que afecten de alguna forma la acústica del problema, sobre evaluando las caídas de presión. Un estudio se está realizando

para conocer si esta caída repentina de presión se debe a la frontera inmersa o a la resolución de la malla, aunque el estudio de independencia de malla no mostrara la influencia de este último punto.

## 7. Conclusiones

El presente trabajo pretende introducir la simulación de grandes escalas en el estudio de flujos de ingeniería e industriales, mediante el uso de fronteras inmersas que permiten la utilización de esquemas de alto orden. La utilización de estos métodos en geometrías complejas como edificios, puentes o intercambiadores de calor, entre otros, se pretende a partir de la validación en resultados obtenidos en geometrías sencillas.

Si bien este tipo de flujos tienen características totalmente turbulentas por sus altos números de Reynolds, en este trabajo se pretendió estudiar flujos a bajos números de Reynolds para conocer la precisión de los resultados, los cuales están influenciados por una gran cantidad de parámetros. Adicionalmente la sensibilidad de las simulaciones puede ser estudiada, ya que el cambio del valor de parámetros globales

como el coeficiente de arrastre y el número de Strouhal es muy drástico entre  $200 < Re < 1000$ . A partir de los resultados presentados aquí, se observa que tanto el código como el modelo de turbulencia son capaces de modelar correctamente este tipo de flujos. A pesar de que los valores se sobre evalúan en algunos casos hasta alrededor de un 20 %, el comportamiento de los parámetros globales es el mismo que el obtenido por otros trabajos. Igualmente se han encontrado las mismas estructuras turbulentas que se han observado tanto numérica como experimentalmente. La ventaja de este trabajo con respecto a los anteriores es el uso de fronteras inmersas aceleradores del cálculo y el uso de esquemas de alto orden que influyen directamente en el estudio numérico de flujos más complejos con mayor precisión y menores requerimientos computacionales.

## Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por la Dirección General de Asuntos del personal Académico, UNAM, bajo el proyecto PAPIIT-IN-109106-3.

- 
1. A. Sohankar, C. Norberg, and L. Davidson, *Phys. Fluids* **11** (1999) 288.
  2. Munson, Young, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Third Edition Update (Ed. John Wiley & Sons, Inc).
  3. S.C. Luo, Y.T. Chew, and Y.T. Ng., *Phys. Fluids* **15** (2003) 2549.
  4. A.K. Saha, G. Biswas, and K. Muralidhar, *Int. J. Heat Fluid Flow* **24** (2002) 53.
  5. C.H.K. Williamson, *J. Fluid Mech.* **328** (1996).
  6. J. Robichaux, S. Balachandar, and S.P. Vanka, *Phys. Fluids* **11** (1999).
  7. A. Sohankar, L. Davidson, and C. Norberg, *Numerical Simulation of unsteady flow around a square two-dimensional cylinder*, 12 Australasian Mechanics Conference, Australia (1995).
  8. A. Sohankar, L. Davidson, and C. Norberg, *Journal of Fluids Engineering* **122** (2000) 39.
  9. C. Da Silva and O. Métais, *Physics of Fluids* **14** (2002) 3798.
  10. F. White, *Viscous Fluid Flow*, second edition (Macgraw Hill international editions, 1991).
  11. M. Salinas Vázquez and O. Métais, *J. Fluid Mech.* **453** (2002) 202.
  12. P. Compte and M. Lesieur, *Large-eddy simulation of compressible turbulent flows. Turbulence in Compressible Flows*, AGARD/VKI Course, AGARD Rep. 819, 1997.
  13. O. Métais and M. Lesieur, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28** (1996) 45.
  14. E. David, *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques : Une approche instationnaire*. PhD Thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France 1993.
  15. D. Gottlieb and E. Turkel, *Mathematics of Computation*, Ed. American Mathematical Society **30** (1976) 703.
  16. T.J. Poissant and S.K. Lee, *J. Computational Physics* **101** (1992).
  17. K.W. Thompson, *J. Comp Phys* **89** (1990) 439.
  18. R. Ghias, R. Mittal, and T.S. Lund. *A non-body conformal grid method for simulation of compressible flows with complex immersed boundaries*. 42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit (2004).
  19. Y. Wang and Trounev, *Combustion Theory and Modelling* **8** (2004) 633.
  20. E. Levi, *El agua según la ciencia*, primera edición (CONACYT-Ediciones Castell Mexicana S.A., 1989).
  21. Y. Dubief and F. Delcayre, *Journal of Turbulence*, Ed. Taylor & Francis Grupe **1** (2000) 001.