

# Condiciones para la existencia de una bifurcación Hopf en la estructura de control con modelo interno

D.I. Rosas Almeida

*Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California,  
Blvd. Benito Juárez s/n, Mexicali, Baja California, 21280 México,  
e-mail: drosas@uabc.mx,  
Tel. y fax (686) 5 66 4270*

J. Alvarez

*Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones,  
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada,  
Km 107 Carretera Tijuana-Ensenada, 22860 Ensenada, Baja,  
California, México  
e-mail: jqalvar@cicese.mx,  
Tel. (61) 745050, Fax (61) 745155*

Recibido el 15 de agosto de 2007; aceptado el 28 de noviembre de 2007

Se presentan condiciones suficientes para la existencia de una bifurcación Hopf en la estructura de control con modelo interno y su ilustración experimental a través de la realización de un circuito electrónico analógico que cumple dichas condiciones. Los resultados pueden ser utilizados en el diseño de osciladores.

*Descriptores:* Control con modelo interno; control de bifurcaciones; circuitos electrónicos.

We present sufficient conditions for the existence of a Hopf bifurcation in the internal model control structure. We present also an experimental illustration using an analogical electronic circuit that satisfies these conditions. The results can be used in the design of oscillator.

*Keywords:* Internal model control; bifurcation control; electronic circuits.

PACS: 05.45.-a; 07.05.Bx; 84.30.-r

## 1. Introducción

Una gran cantidad de sistemas dinámicos se puede modelar por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $\mu \in \mathbb{R}^k$  es un vector de parámetros y  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial diferenciable. Algunas variaciones en los valores de  $\mu$  pueden ocasionar una infinidad de cambios en el comportamiento del sistema. Estos cambios pueden ser cuantitativos o cualitativos, a estos últimos se les llama bifurcaciones.

Las bifurcaciones son fenómenos frecuentemente nocivos para el desempeño de un sistema. Sin embargo, en algunas otras situaciones pueden ser de utilidad, por lo que el diseño de controladores para la supresión o la generación de este fenómeno es un problema importante.

El control de bifurcaciones se refiere a la tarea de diseñar un controlador que pueda modificar las propiedades de bifurcación de un sistema no lineal dado y de esta manera conseguir un comportamiento deseado. Algunos de los objetivos de control son los siguientes: retardar un conjunto inherente de bifurcaciones, eliminar una bifurcación existente, introducir una nueva bifurcación en un valor adecuado del parámetro, optimizar el desempeño del sistema cerca de un punto de bifurcación o alguna combinación de estos objetivos.

Las bifurcaciones existen en una gran variedad de sistemas de control retroalimentado. Por ejemplo, un sistema de control clásico con una no linealidad estática como la saturación [3] o un péndulo simple controlado por un controlador lineal proporcional derivativo (PD) presentan varios tipos de bifurcaciones [4]. También las bifurcaciones se presentan en sistemas que no están sujetos a una acción de control. Por ejemplo, los sistemas de potencia generalmente presentan fenómenos que son ricos en bifurcaciones [2]. Un doble péndulo es un ejemplo de un sistema mecánico que presenta bifurcaciones, algunas de ellas de alto grado de degeneración [11]. Así mismo, algunos problemas en medicina se pueden ver con este enfoque, como por ejemplo, ciertas anomalías en el ritmo cardiaco [9].

Las bifurcaciones son fenómenos inherentemente no lineales. Es de esperarse, entonces, que las técnicas de control lineal puedan ser inadecuadas para su control. Esto depende, por supuesto, del objetivo de control. Por otra parte, es frecuente que las técnicas de control, lineal o no lineal, requieran de un modelo con un cierto grado de exactitud para lograr un buen desempeño.

Una estructura de control para sistemas no lineales que ha mostrado propiedades interesantes de robustez y convergencia al punto de referencia deseado es el llamado control con modelo interno (CMI) [1]. Esta técnica también es utilizada frecuentemente en control de procesos [10]. Esta es-

estructura está formada por la planta, un modelo de la planta, un filtro y un controlador que puede ser diseñado mediante alguna técnica de control para sistemas no lineales. La estructura tiene la propiedad de que, si en lazo cerrado se garantiza la existencia de un punto de equilibrio estable, entonces la salida de la planta converge a la referencia, sin importar en dónde está ubicado dicho equilibrio, aun cuando la planta y el modelo sean diferentes.

La estructura pierde su estabilidad cuando este equilibrio desaparece o sufre algún tipo de bifurcación. Dada su propiedad de robustez, es de esperarse que esta estructura pueda resolver satisfactoriamente el control de algunos tipos de bifurcaciones. Por otra parte, puesto que su buen desempeño depende de la existencia de equilibrios estables, la operación normal está relacionada directamente con la ausencia de bifurcaciones del sistema en lazo cerrado.

En este sentido, en este artículo se presentan un conjunto de condiciones suficientes para que la estructura de control con modelo interno presente una bifurcación tipo Hopf. Es decir, se describe cómo encontrar las condiciones sobre la planta, el modelo y el filtro que forman la estructura del CMI para que el sistema en lazo cerrado presente dicho tipo de bifurcación. Los resultados analíticos sobre la existencia de esta bifurcación se ilustran mediante la realización en circuitería analógica de un sistema que presenta dicho fenómeno.

La organización del documento es la siguiente. En la Sec. 2 se presenta la forma normal de una bifurcación Hopf y el teorema de Poincaré-Andronov-Hopf, mientras que en la Sec. 3 se describe la estructura de control con modelo interno como parte de los antecedentes. En la Sec. 4 se presentan las condiciones para que la estructura de control con modelo interno presente una bifurcación Hopf. Los resultados son ilustrados en forma numérica y experimental en las Secs. 5 y 6, respectivamente. En la Sec. 7 se presentan las conclusiones.

### 2. Bifurcación Hopf

Una representación estándar de un sistema que presenta una bifurcación Hopf es la siguiente [8]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned} \tag{2}$$

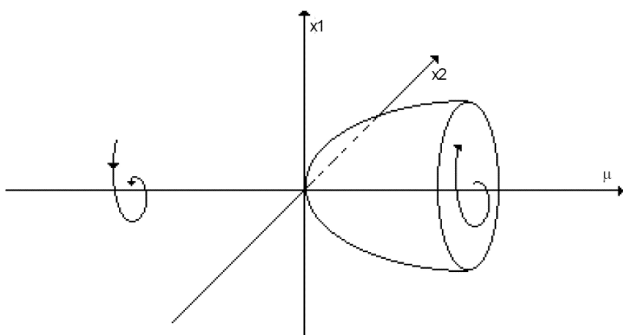


FIGURA 1. Bifurcación Hopf.

La bifurcación se presenta cuando, al variar el parámetro  $\mu$  del sistema, un punto de equilibrio del mismo cambia su estabilidad, apareciendo un ciclo límite cuya amplitud y frecuencia dependen del valor del parámetro. En  $\mu = 0$  hay un intercambio de estabilidad y además nace un ciclo límite que rodea al equilibrio inestable y tiene amplitud  $\sqrt{\mu}$ . Una representación de este fenómeno se muestra en la Fig. 1. El teorema de Poincaré-Andronov-Hopf da las condiciones para la existencia de este tipo de bifurcación.

*Teorema 1.* Considere el sistema (1), donde  $f \in C^2, f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  [7]. Suponga que

1.  $f(\bar{x}, \mu_0) = 0$ ;
2.  $D_x f(\bar{x}, \mu_0)$  tiene un único par de valores propios imaginarios  $\lambda(\mu_0) = \pm j\beta$  y ningún otro valor propio con parte real cero, y
3.  $d(\text{Re}\lambda(\mu_0))/d\mu \neq 0$  para  $\mu$  cercano a  $\mu_0$ .

Entonces existe un nacimiento de un ciclo límite en  $(\bar{x}, \mu_0)$ . El periodo inicial de la oscilación con amplitud cero es  $T_0 = 2\pi/\beta$ .

### 3. Estructura de control con modelo interno

La dinámica de una clase importante de sistemas puede ser descrita por la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{d^n x_p}{dt^n} + F\left(x_p, \frac{dx_p}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_p}{dt^{n-1}}\right) \\ = G\left(x_p, \frac{dx_p}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_p}{dt^{n-1}}\right)u, \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones suaves y  $u$  es la entrada de control. Una selección adecuada de variables de estado convierte este sistema a la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p_i} &= x_{p_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, n - 1), \\ \dot{x}_{p_n} &= f_p(x_p) + g_p(x_p)u, \\ y_p &= x_{p_1}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $x_p = (x_{p_1}, \dots, x_{p_n})$  es el estado,  $f_p$  y  $g_p$  son funciones dadas por  $f_p = -F_p(x_p)$  y  $g_p = G_p(x_p)$ .

Una herramienta clásica para controlar sistemas como (4) es la técnica de linealización por retroalimentación [6]. La aplicación de esta técnica es simple y directa; sin embargo, necesita un modelo exacto y la disponibilidad del estado completo, ya que si se usa un modelo aproximado no se produce un sistema lineal en lazo cerrado y debido a esto requiere de un análisis extra de estabilidad del sistema en lazo cerrado. En implementaciones prácticas, el estado completo generalmente no está disponible o puede resultar costoso tenerlo, así que se requiere un observador. Desafortunadamente, el diseño de un observador no lineal no es un problema fácil y se necesita un modelo exacto de la planta para tener un error tolerable [1].

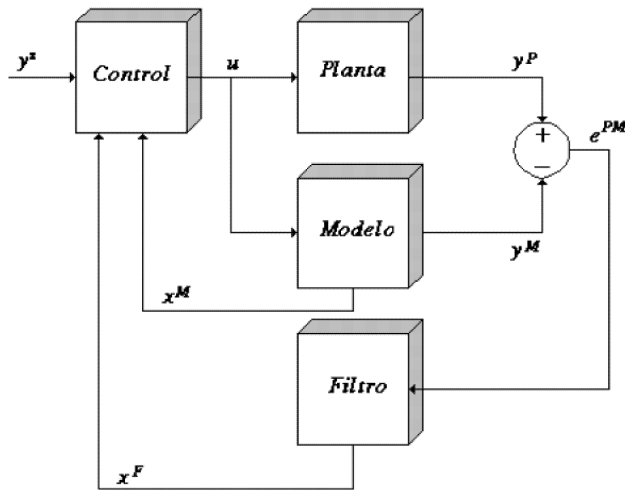


FIGURA 2. Diagrama general del controlador con modelo interno.

Otra técnica de diseño de controladores es la llamada estructura de control con modelo interno (CMI). Este esquema usa un modelo conectado en paralelo con la planta, retroalimentando la diferencia entre las salidas de la planta y el modelo, como se muestra en la Fig. 2. De esta manera, no se necesita un diseño explícito de un observador. Este esquema también asegura la convergencia de la salida de la planta a una referencia que converja exponencialmente a una constante. La clase de sistemas no lineales considerados en la Ref. 1 y que analizaremos en este trabajo corresponden a sistemas de una entrada y una salida, completamente linealizables por transformación de coordenadas y retroalimentación de estado. La ley de control no linealiza la planta, sino a un sistema extendido construido con la planta, su modelo aproximado y un filtro (Fig. 2). El error en estado estacionario de la planta es cero, aun con plantas que tienen incertidumbre paramétricas, a condición de que haya un punto de equilibrio asintóticamente estable en el sistema en lazo cerrado.

Considérese un sistema dinámico representado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + g(z)u, \\ y &= h(z), \end{aligned} \tag{5}$$

donde  $z(t) \in Z \subset \mathbb{R}^n$ ;  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control;  $f$  y  $g$  son campos vectoriales suaves definidos en  $Z$ , y  $h : Z \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave. Suponemos que el origen es un punto de equilibrio para el sistema no controlado, es decir,  $f(0) = 0$ , y  $h(0) = 0$ .

Para aplicar esta estructura de control la planta debe cumplir con la siguiente condición:

1.- Para toda  $z \in Z$ , el sistema tiene grado relativo igual a  $n$ .

De esta manera cualquier sistema que satisface esta condición puede ser descrito por un sistema de la siguiente for-

ma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p_i} &= x_{p_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, n - 1), \\ \dot{x}_{p_n} &= f_p(x_p) + g_p(x_p)u, \\ y_p &= x_{p_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

También se supone que se dispone de un modelo de (6),

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m_i} &= x_{m_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, n - 1), \\ \dot{x}_{m_n} &= f_m(x_m) + g_m(x_m)u, \\ y_m &= x_{m_1}, \end{aligned} \tag{7}$$

donde  $x_m = (x_{m_1}, \dots, x_{m_n}) \in X_m \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X_p \subset X_m$ , y  $f_m$  y  $g_m$  son funciones suaves. También se supone que el sistema (7) tiene grado relativo igual a  $n$ , es decir,

2.-  $g_m(x_m) \neq 0$  para toda  $x_m \in X_m$ , además  $f_m(0) = 0$ .  
Sea  $e^{PM}$  el error de salida planta-modelo igual a

$$e^{PM} = y_p - y_m \tag{8}$$

y considere otro sistema cuyo objetivo es filtrar ese error, con la forma lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_{f_i} &= x_{f_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, n - 1), \\ \dot{x}_{f_n} &= -a_f x_f + a_{f_1} e^{PM}, \\ y_f &= x_{f_1}, \end{aligned} \tag{9}$$

donde  $x_f = (x_{f_1}, \dots, x_{f_n}) \in \mathbb{R}^n$  y  $a_f = (a_{f_1}, \dots, a_{f_n}) \in \mathbb{R}^n$  es tal que el filtro sea estable. Se considera que la única señal disponible de la planta es la salida, con el siguiente objetivo de control.

3.- La salida de la planta debe seguir una señal suave  $y^*$  que converge exponencialmente a una constante  $\bar{y}^*$ .

En la Ref. 1 se propone una ley de control que linealiza una relación entrada / salida global. Se definen las variables auxiliares

$$y_{i+1} = \frac{d^i y_m}{dt^i} + \frac{d^i y_f}{dt^i} - \frac{d^i y^*}{dt^i} \quad (i = 0, \dots, n - 1)$$

y una salida global  $y_g = y_1$ , y se propone la ley de control

$$u = \frac{f_m(x_m) - a_f \cdot x_f + a_{f_1} e^{PM} - \frac{d^n y^*}{dt^n} + a \cdot y}{g_m(x_m)}, \tag{10}$$

donde  $y = (y_1, \dots, y_n)$  y  $a = (a_1, \dots, a_n)$  es un vector real tal que  $\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_1$  es estrictamente Hurwitz. Un hecho importante relacionado a la convergencia exponencial de la salida global  $y$  a cero se establece en el siguiente lema:

*Lema 2* Suponga que las suposiciones 2 y 3 se satisfacen y el sistema en lazo cerrado dado por (6), (7), (9) y (10) tiene un punto de equilibrio  $\bar{x} = (\bar{x}_p, \bar{x}_m, \bar{x}_f) \in \mathbb{R}^{3n}$ . Entonces la salida de la planta correspondiente a este punto de equilibrio es  $\bar{y}_p = \bar{y}^* = \lim_{t \rightarrow 0} y^*(t)$ .

En la Ref. 1 se muestra que la ley de control (10) puede estabilizar y regular eficientemente plantas de la forma (6), aun cuando ésta no se conozca con exactitud. La condición

importante es que para un caso nominal exista un equilibrio estable del sistema en lazo cerrado y que éste se conserve (aunque cambie de posición) cuando la planta sufra una variación en algunos de sus parámetros. Puesto que la existencia de equilibrios estables garantiza la convergencia de la salida de la planta a la referencia, esto es un motivo importante para analizar el desempeño de la estructura de control frente a bifurcaciones de equilibrios, situación en la que ocurren cambios en la existencia, número o estabilidad de los mismos.

#### 4. Condiciones para la aparición de una bifurcación Hopf en la estructura de control con modelo interno

Sea una planta que depende de un parámetro  $\mu$ , un modelo y un filtro, todos ellos escalares, que forman el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= f(x_p, \mu) + g(x_p, \mu)u, \\ \dot{x}_m &= f(x_m) + g(x_m)u, \\ \dot{x}_f &= -a_f x_f + a_f(x_p - x_m), \end{aligned} \tag{11}$$

donde  $u$  es la entrada de control de la forma (10). Haciendo el cambio de coordenadas  $\xi_1 = x_p - x_m$ ,  $\xi_2 = x_f$ ,  $\xi_3 = x_m + x_f - y^*$ , y aplicando la entrada de control se tiene el nuevo sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \phi_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu), \\ \dot{\xi}_2 &= -a_f \xi_2 + a_f \xi_1, \\ \dot{\xi}_3 &= -a \xi_3, \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $\phi_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu) = \phi_e$  está dada por

$$\begin{aligned} \phi_e &= f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu) - \frac{g(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu)}{g(\xi_2, \xi_3, y^*)} f(\xi_2, \xi_3, y^*) \\ &+ a_f \xi_2 \left( \frac{g(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu)}{g(\xi_2, \xi_3, y^*)} - 1 \right) \\ &+ a_f \xi_1 \left( 1 - \frac{g(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu)}{g(\xi_2, \xi_3, y^*)} \right) \\ &+ a \xi_3 \left( 1 - \frac{g(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu)}{g(\xi_2, \xi_3, y^*)} \right) \\ &+ \frac{dy^*}{dt} \left( \frac{g(\xi_1, \xi_2, \xi_3, y^*, \mu)}{g(\xi_2, \xi_3, y^*)} - 1 \right) \end{aligned}$$

y los puntos de equilibrio del sistema (12) están dados por

$$\bar{\xi} = (\nu(\cdot), \nu(\cdot), 0),$$

donde  $\nu(\cdot)$  es una solución para  $\phi_e = 0$  con  $\bar{\xi}_3 = 0$  y  $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2$ .

La tercera ecuación del sistema (12) está desacoplada y por diseño  $a$  es un número positivo, lo que implica que  $\xi_3$  tiene un comportamiento exponencialmente estable y tiende a cero, entonces la dinámica en estado estacionario del sistema (12) está determinada por el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \phi_e(\xi, \mu, y^*), \\ \dot{\xi}_2 &= -a_f \xi_2 + a_f \xi_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Los valores propios de la linealización de (13) están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_f + \frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu)}{\partial \xi_1} \pm \sqrt{\left(a_f - \frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu)}{\partial \xi_1}\right)^2 + 4a_f \left(\frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu)}{\partial \xi_2}\right)}}{2}. \tag{14}$$

A partir de las Ecs. (12), (13), (14) y del Teorema 1 se obtienen las condiciones para la existencia de una bifurcación Hopf en la estructura de control con modelo interno, las cuales se presentan a continuación.

1. En el punto de bifurcación  $\mu_0$  debe existir un punto de equilibrio  $\bar{\xi}$  en el sistema (13).
2. Se debe cumplir que

$$-a_f + \frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu_0)}{\partial \xi_1} = 0$$

y

$$\frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu_0)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu_0)}{\partial \xi_2} < 0,$$

y así se tendrá un par de valores propios complejos conjugados con parte real cero.

3. Finalmente, para cumplir la condición de transversalidad, para valores de  $\mu$  cercanos a  $\mu_0$ ,

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \phi_e(\bar{\xi}, \mu)}{\partial \xi_1} \right)}{\partial \mu} \neq 0.$$

A continuación se presenta un caso en el cual se satisfacen las tres condiciones anteriores.

#### 5. Ejemplo de la presencia de una bifurcación Hopf en la estructura de control con modelo interno

En esta sección se presenta un ejemplo cuyo objetivo es mostrar que las condiciones presentadas en la sección anterior

pueden ser satisfechas considerando una planta de primer orden.

Sea una planta, modelo y filtro de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \mu x_p - x_p^3 + c_p u, \\ \dot{x}_m &= -k x_m + c_m u, \\ \dot{x}_f &= -a_f x_f + a_f (x_p - x_m), \end{aligned} \tag{15}$$

con una entrada de control

$$u = \frac{k x_m + a_f x_f - a_f e - a y}{c_m}.$$

Sustituyendo la entrada y haciendo el cambio de coordenadas  $\xi_1 = x_p - x_m, \xi_2 = x_f, \xi_3 = x_m + x_f - y^*$ , el sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \mu(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3) - (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)^3 \\ &+ \frac{c_p k}{c_m}(-\xi_2 + \xi_3) + a_f \xi_2 \left( \frac{c_p}{c_m} - 1 \right) \\ &+ a_f \xi_1 \left( 1 - \frac{c_p}{c_m} \right) + a \xi_3 \left( 1 - \frac{c_p}{c_m} \right), \\ \dot{\xi}_2 &= -a_f \xi_2 + a_f \xi_1, \\ \dot{\xi}_3 &= -a \xi_3, \end{aligned} \tag{16}$$

el cual tiene como puntos de equilibrio

$$\bar{\xi}_1 = 0, \quad \bar{\xi}_2 = 0, \quad \bar{\xi}_3 = 0.$$

El análisis de bifurcaciones Hopf se hace a partir de los valores propios dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \mu - a_f \frac{c_p}{c_m} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( a_f \frac{c_p}{c_m} - \mu \right)^2 - 4ka_f \frac{c_p}{c_m}}.$$

Para un valor de  $\mu = a_f c_p / c_m = \mu_0$  se cumplen las condiciones para la existencia de una bifurcación Hopf como se muestra a continuación.

Condición 1.  $f(0, \mu_0) = 0$ .

Condición 2. Cuando  $\mu = a_f c_p / c_m = \mu_0$  la matriz jacobiana de  $f(\xi, \mu)$  evaluada en  $\bar{\xi}$  y  $\mu_0$  tiene un par de valores propios imaginarios puros conjugados en

$$\pm i \sqrt{ka_f \frac{c_p}{c_m}}.$$

Condición 3. Transversalidad, para valores de  $\mu$  cercanos a  $\mu_0$  la parte real de los valores propios es  $\mu - a_f c_p / c_m$ , y su derivada con respecto a  $\mu$  es

$$\frac{\partial \left( \mu - a_f \frac{c_p}{c_m} \right)}{\partial \mu} = 1.$$

Entonces hay un nacimiento de un ciclo límite en  $(\bar{\xi}, \mu_0)$ .

A continuación se muestran los resultados de una simulación para valores de  $c_p = c_m = a = a_f = k = 1$  y distintos

valores de  $\mu$ . Con estos valores de las constantes el valor de bifurcación es  $\mu = 1$ . En las Figs. 3 a 5 se muestra el retrato de fase del sistema en lazo cerrado. A este tipo de bifurcación Hopf se le llama supercrítica [7].

Si se cambia la planta a una que en lazo abierto presenta una bifurcación horquilla subcrítica  $\dot{x}^p = \mu x_p + x_p^3$ , y haciendo todo el análisis anterior se encuentran resultados muy parecidos. La única diferencia es que en este caso la bifurcación Hopf es del tipo subcrítica, es decir, para los valores

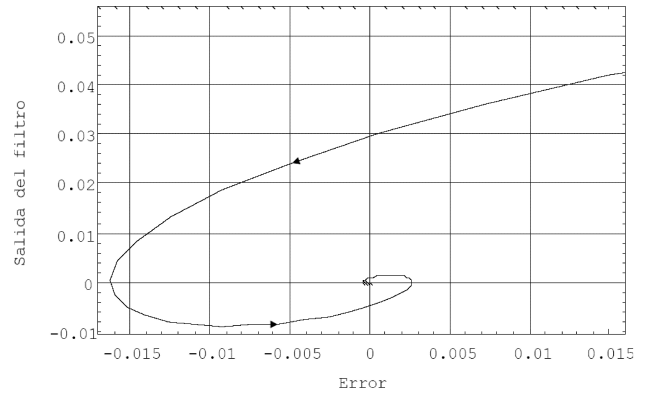


FIGURA 3. Retrato de fase del sistema (15) con  $\mu = 0$ .

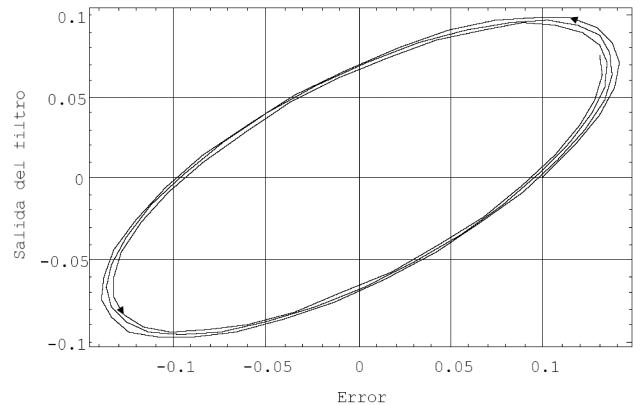


FIGURA 4. Retrato de fase del sistema (15) con  $\mu = 1$ .

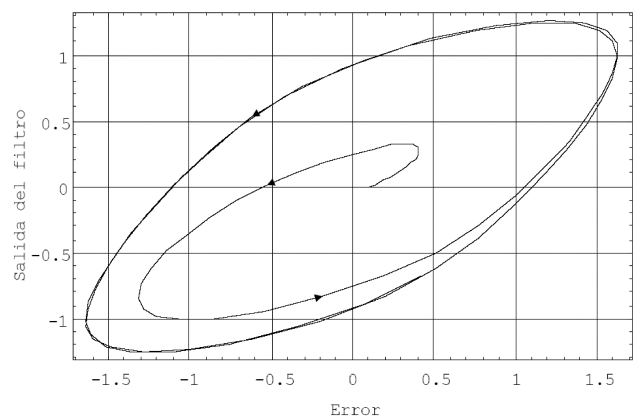


FIGURA 5. Retrato de fase del sistema (15) con  $\mu = 2$ .

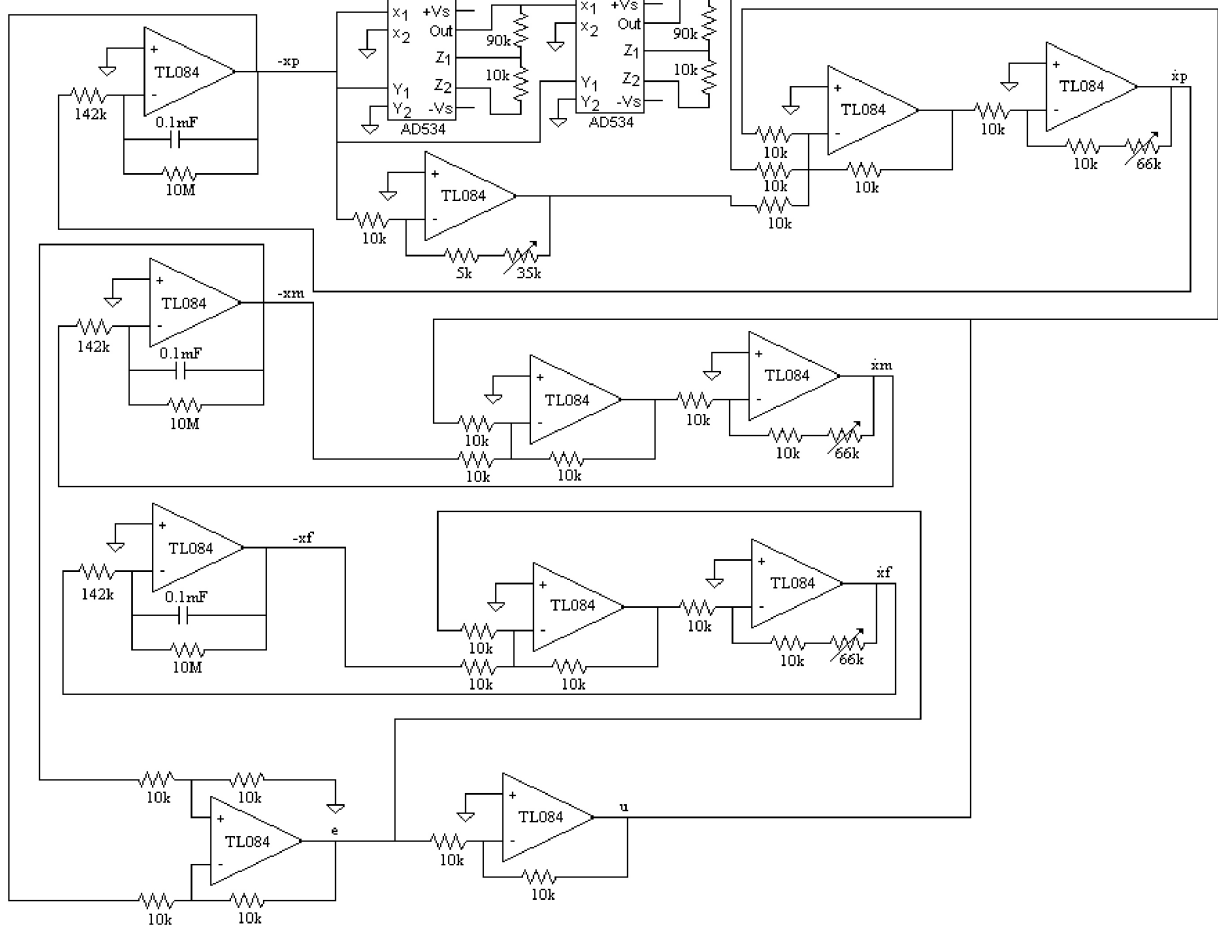


FIGURA 6. Diagrama del circuito del CMI que presenta una bifurcación Hopf.

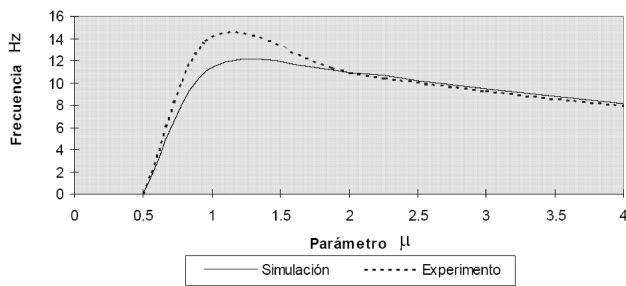


FIGURA 7. Evolución de la frecuencia con respecto a  $\mu$ , con  $A = 1$ .

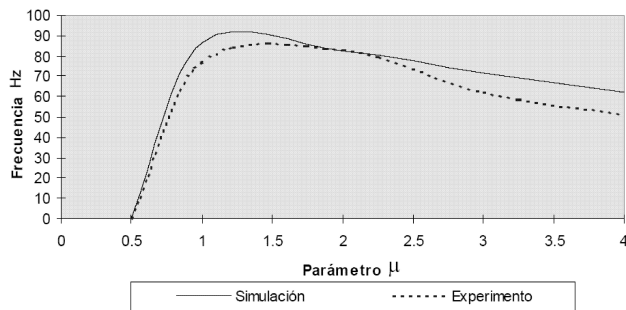


FIGURA 8. Evolución de la frecuencia con respecto a  $\mu$  con  $A = 7.6$ .

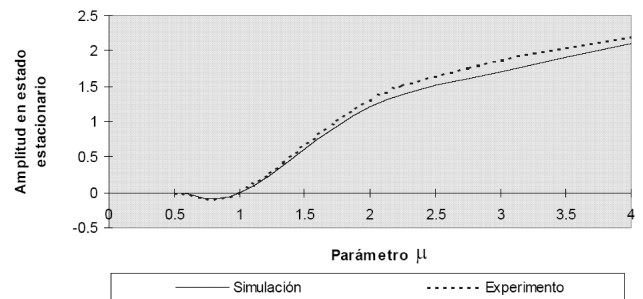


FIGURA 9. Evolución con respecto a  $\mu$  de la amplitud en estado estacionario con  $A = 1$ .

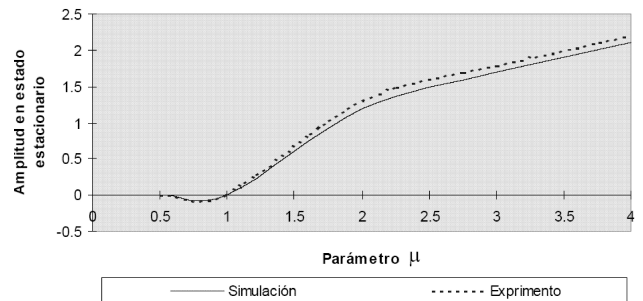


FIGURA 10. Evolución con respecto a  $\mu$  de la amplitud en estado estacionario con  $A = 7.6$ .

de  $\mu$  para los cuales el punto de equilibrio es estable hay un ciclo límite que es inestable, mientras que para valores de  $\mu$  en donde el punto de equilibrio es inestable no hay ciclo límite. Este tipo de bifurcación también se presenta cuando la planta en lazo abierto tiene una bifurcación transcítica, generando una bifurcación Hopf subcrítica.

## 6. Ilustración experimental

Un primer paso para dar alguna aplicación a este resultado es poder manipular la frecuencia y amplitud de la oscilación cuando se presenta un ciclo límite estable. Para esto se realizó un circuito electrónico que resuelve las ecuaciones del sistema (15).

Los valores de las constantes que se propusieron son  $a = a_f = k = c_m = c_p = 1$ , lo que resulta en un valor de bifurcación  $\mu_0 = 1$ . Con estos valores de las constantes y con un valor de  $\mu = 2$  se obtiene una oscilación con una frecuencia de 0.137 Hz. Para fines prácticos se modifica esta frecuencia mediante un escalamiento en el tiempo para obtener una frecuencia de 10 Hz con este valor del parámetro. Finalmente el sistema que se construye es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= 72.55(\mu x_p - x_p^3 + u)A, \\ \dot{x}_m &= 72.55(-x_m + u)A, \\ \dot{x}_f &= 72.55(-x_f + e)A,\end{aligned}\quad (17)$$

donde  $A$  es una ganancia variable para manipular el escalamiento en el tiempo, su alcance de operación es  $1 \leq A \leq 7.6$  (el valor de 7.6 es debido a una limitación física de los componentes). Es decir, si  $A = 1$  y  $\mu = 2$  la frecuencia es igual a 10 Hz, mientras que para  $A = 7.6$  y  $\mu = 2$  la frecuencia es igual a 76 Hz.

El diagrama del circuito que resuelve las Ecs. (17) es el que se muestra en la Fig. 6.

Una comparación de los resultados experimentales y de las simulaciones numéricas se muestran en las Figs. 7 a 10. Se puede observar que para  $A = 1$  (Figs. 7 a 9), para valores

del parámetro mayores al valor de bifurcación, la frecuencia de la oscilación es casi idéntica a los resultados de las simulaciones mientras que la amplitud difiere por una constante. Esto se debe principalmente a la tolerancia existente en las ganancias de los amplificadores. Para  $A = 7.6$  (Figs. 8 y 10), en donde se busca la operación a mayores frecuencias, se presentan mayores diferencias tanto en la frecuencia como en la amplitud. Para  $\mu > 3$  esta diferencia parece constante, lo que puede ser producto de errores en el valor de la ganancia  $A$ . A pesar de estas diferencias, se ha ilustrado satisfactoriamente la presencia de una bifurcación Hopf en la estructura de control con modelo interno.

## 7. Conclusiones

Se ha demostrado que la estructura de control con modelo interno con plantas escalares puede presentar una bifurcación tipo Hopf y se han encontrado condiciones suficientes para que esto suceda. Este resultado es importante, ya que anteriormente no se había logrado obtener una oscilación sostenida en esta estructura de control y, en especial, este tipo de fenómeno. Además se han ilustrado los resultados en forma experimental para motivar el desarrollo de aplicaciones prácticas de éstos. El experimento tuvo como fin la ilustración cualitativa del fenómeno; sin embargo, los resultados también son buenos cuantitativamente, ya que para intervalos considerables de variación del parámetro  $\mu$  la diferencia entre los resultados teóricos y experimentales se mantiene pequeña y constante. Para disminuir estos errores se pueden utilizar componentes electrónicos de mejor calidad, en particular con menores tolerancias.

Es importante mencionar que el alcance de operación del circuito, tanto en amplitud como en frecuencia, se encuentra fuertemente limitado por las características de operación de los componentes, principalmente su alcance en el voltaje de salida si se desea que trabaje a altas frecuencias.

Se considera que este resultado es importante, ya que puede ser considerado como un método de diseño de osciladores.

- 
1. J. Alvarez y S. Zazueta, *Dynamics and Control*. **8** (1997) 123.
  2. H. Abed *et al.*, *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*. **3** (1993) 1169.
  3. J. Alvarez Gallegos, E. Curiel y F. Verduzco *Systems & Control Letters*. **31** (1997) 277.
  4. J. Alvarez Gallegos y F. Verduzco González, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*. **120** (1997) 146.
  5. J. Alvarez Gallegos y S. Zazueta, *Dynamics and control*. **8** (1997) 123.
  6. A. Isidori, *Non Linear Control System*, Segunda edición (Springer-Verlag, Berlin, 1994) 479 p.
  7. A. Nayfeh H. y B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, Primera edición (John Wiley & Sons, Inc., New York. 1995) 685 p.
  8. L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, 1991) p. 519.
  9. T. Ree Chay, *Int. Journal of Bifurcation and Chaos* **5** (1995) 1439.
  10. D.E. Seborg, *A Perspective on Advanced Strategies for Process Control*, in Frank, P.M. (Ed.), *Advances in Control* (Springer-Verlag, 1999).
  11. F. Verduzco González, *Bifurcaciones y Caos Homoclínico en Robots Manipuladores*. División de física aplicada. Dpto. de electrónica y telecomunicaciones. CICESE. México. Tesis de doctorado. 1998.