

Convección natural de fluidos incompresibles y viscosos en cavidades rectangulares

B. Bermúdez

*Facultad de C. de la Computación, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Pue., México,
email: bbj@cs.buap.mx*

A. Nicolás

*Departamento de Matemáticas, 3er. Piso Ed. AT-Diego Bricio, UAM-I,
09340 México D.F., México,
email: anc@xanum.uam.mx*

Recibido el 4 de marzo de 2008; aceptado el 11 de marzo de 2008

Se presentan resultados numéricos para convección natural para fluidos viscosos incompresibles en cavidades rectangulares con diferentes razones geométricas. Esta clase de flujos puede ser gobernada por la aproximación de Boussinesq dependiente del tiempo en la formulación función corriente-vorticidad. Los resultados son obtenidos mediante un esquema numérico simple previamente reportado para fluidos isotérmicos/térmicos (convección mixta). El esquema numérico está basado principalmente en un proceso iterativo de punto fijo aplicado al sistema elíptico no lineal que resulta después de haber hecho una discretización de segundo orden en el tiempo. El proceso iterativo nos lleva a la solución de problemas elípticos, lineales, simétricos, bien condicionados y desacoplados. Los parámetros que influyen en la evolución del flujo son el número de Rayleigh Ra , en el intervalo $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, y la razón geométrica de la cavidad G , en el intervalo $1/3 \leq G \leq 3$. Se muestran también un resultado relacionado con inestabilidad de ojos de gato, $G = 16$, y otro como ejemplo de flujos térmicos dependientes del tiempo, $G = 1/16$. Hasta donde sabemos, algunos de los resultados con G diferente de la unidad se están reportando por primera vez.

Descriptores: Aproximación de Boussinesq; proceso iterativo de punto fijo; número de Rayleigh; cavidades rectangulares

Natural convection numerical results for incompressible viscous flows are presented in rectangular cavities with different aspect ratios. This kind of flows may be governed by the time-dependent Boussinesq approximation in the stream function-vorticity formulation. The results are obtained with a simple numerical scheme previously reported for isothermal/thermal (mixed convection) flows. The numerical scheme is based mainly on a fixed point iterative process applied to the non-linear elliptic system that results after a second order time discretization is made. The iterative process leads to the solution of uncoupled, well-conditioned, symmetric linear elliptic problems. The evolution of the thermal flow depends on the parameters given by the Rayleigh number Ra , in the range $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, and the aspect ratio of the cavity G , in the range $1/3 \leq G \leq 3$. There are also shown a result related with cat's eyes instability, $G = 16$, and other as an example of time-dependent thermal flows, $G = 1/16$. To the best of our knowledge, some results with G different of the unity are being reported for the first time.

Keywords: Boussinesq approximation; fixed point iterative process; Rayleigh number; rectangular cavities

PACS: 47.55.Mh; 47.85.-g; 02.60.-x

1. Introducción

La aproximación de Boussinesq no-estacionaria para fluidos térmicos en un sistema gravitacional, de la cual el fenómeno de convección natural es un caso particular, se basa en el hecho de que la estructura compresible de dichos fluidos se puede considerar como incompresible debido a las suposiciones que se hacen en las variables y parámetros que describen la evolución del fluido. Matemáticamente, las ecuaciones de conservación de momento y de masa están dadas por las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales a su vez están acopladas a la ecuación de energía térmica. En este trabajo también consideramos la simplificación en términos de variables función corriente y vorticidad, de manera que el cómputo de la presión se evita y la condición de incompresibilidad se satisface automáticamente.

Los resultados se obtienen con un método numérico bastante simple, podemos decir que es mucho más simple que

el reportado la Ref. 1 el cual se basa en una descomposición de operadores en la formulación de variables primitivas, con la cual parte de la mayor dificultad es consecuencia de la restricción de incompresibilidad. De hecho, los resultados que se presentan aquí se obtienen de una manera todavía más simple y clara respecto a la obtención, con modificaciones ligeras de este método, de flujos más complicados: flujos de fluidos isotérmicos puros [2]; flujos isotérmicos/térmicos (convección mixta) en cavidades rectangulares [3]; flujos de convección natural en medios porosos y homogéneos [4] en cavidades cuadradas [5] en cavidades rectangulares e inclinadas.

El método numérico consiste en una discretización temporal totalmente implícita, después de aplicar una aproximación adecuada de segundo orden en las derivadas temporales involucradas, con lo cual se obtiene un sistema elíptico no lineal. La no linealidad y el acoplamiento entre las ecuaciones se manejan eficientemente a través de un proceso iterativo de

punto fijo que nos lleva a resolver, en cada iteración, de cada nivel de tiempo, problemas de tipo elíptico, lineales, bien condicionados y desacoplados. Para la solución de este tipo de problemas existen resolvidores eficientes, independientemente de la discretización espacial.

Específicamente, los resultados que aquí se reportan corresponden a flujos de convección natural en cavidades rectangulares diferenciadas por su razón geométrica G (razón de la altura al ancho de la cavidad), con $1/3 \leq G \leq 3$, y para números de Rayleigh Ra en el intervalo $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. Dichos resultados se obtienen como el estado estacionario al cual converge la solución del problema no-estacionario cuando t se aproxima a $+\infty$ (tiempo suficientemente grande en la práctica). Como se observará en la sección de resultados numéricos, el tiempo para alcanzar el estado estacionario es relativamente corto, comparado con el de convección mixta [3]; junto con el hecho de poder usar mallas espaciales considerablemente gruesas, así como pasos de tiempo no tan pequeños, como consecuencia del buen condicionamiento de los problemas elípticos que a su vez se refleja en la solución eficiente de los correspondientes sistemas algebraicos mediante un método iterativo, conlleva el uso de recursos de cómputo con poca memoria y poco CPU, obteniendo los resultados en un tiempo del orden de pocos minutos.

El estudio de flujos de convección natural en cavidades cerradas se divide principalmente en dos clases, aquellas que se calientan por abajo y aquellas que se calientan por un lado (lateral); siendo esta última clase la que se conoce como cavidades “diferencialmente calentadas”. Esta configuración modela varias aplicaciones en ingeniería, por ejemplo: sistemas para almacenar energía, aislamiento de reactores nucleares, ventilación de edificios y enfriamiento de mecanismos electrónicos, por mencionar algunas. Dicho fenómeno tiene entonces considerable importancia tanto práctica como teórica y se ha convertido en un problema clásico en transferencia de calor convectivo en la literatura de la mecánica de fluidos [6].

En varios trabajos de convección natural se mencionan aspectos de turbulencia a partir de un cierto número de Rayleigh crítico, digamos Ra_o ; sin embargo, dicho Ra_o depende de la adimensionalización que se use en las ecuaciones. Por ejemplo, en la Ref. 5 se considera la adimensionalización que se usa aquí y otra que fue planteada en la Ref. 7 y abordada en varios trabajos [8,9], por mencionar un par de ellos. En estos trabajos y en las referencias que mencionan se puede conocer más sobre el tema. Aquí, el tema de turbulencia no se aborda. Por otro lado, en otros trabajos se presentan resultados para cavidades rectangulares pero enfocados a otros aspectos: análisis de la interrelación entre los parámetros (número de Rayleigh, número de Prandtl, ángulo de inclinación y razón geométrica) la Ref. 11, o resultados con análisis de escalamiento, como en Patterson e Imberger [11] donde también se presentan algunos resultados numéricos pero solamente para cavidades cuadradas, resultados de carácter experimental como en la Ref. 12, o bien resultados analíticos como en la Ref. 13.

Nuestra contribución en este trabajo consiste en ver cómo es la deformación en cavidades rectangulares de flujos de convección natural bastante conocidos en cavidades cuadradas, así como el tiempo T_{ee} en el cual se alcanza el correspondiente estado estacionario (si existe), un aspecto poco considerado hasta ahora al resolver el problema no-estacionario, y la repercusión en la transferencia de calor a través de los números de Nusselt local y global. Enfatizando, por otro lado, que los resultados se obtienen con un método numérico muy simple. A continuación recalamos sobre tres aspectos:

- 1) Como un complemento de la validación en cavidades cuadradas previamente reportado en la Ref. 1, en variables primitivas, y en la Ref. 4, en variables función corriente-vorticidad; aquí comparamos también nuestros resultados con el trabajo de reportado en la Ref. 14, con lo cual se muestra la concordancia de los patrones de flujo así como la congruencia física de la transferencia de calor a través del número de Nusselt global, a pesar de la diferencia de los métodos numéricos (en la Ref. 14 aplica al problema estacionario el “transitorio falso”, con lo cual las derivadas temporales van acompañadas de una escala $\neq 1$).
- 2) Acerca de T_{ee} , en varios trabajos publicados donde se reporta no es claro la forma en que se mide; en nuestro caso, su concepto físico [15], se mide a través del consecuente concepto matemático discreto dado por la norma absoluta discreta punto a punto L_∞ en la cerradura de la cavidad Ω .
- 3) En relación a si el estado estacionario existe o no para un flujo determinado, y la consecuente determinación o no de T_{ee} , se presentan dos resultados: $G = 16$ y $G = 1/16$.

El caso $G = 16$ se discute en relación a los resultados en la Ref. 16 y 17 sobre la inestabilidad de ojos de gato: sorprendentemente nuestro resultado coincide con el resultado en la Ref. 16 pero difiere del resultado en la Ref. 17 respecto al número de ojos. Aunado a este grado de inestabilidad, dicho caso alcanza su estado estacionario y en consecuencia se determina el tiempo T_{ee} , pero no así el caso $G = 1/16$, no reportado en estas referencias, lo que muestra, en esta etapa de la investigación, que dicho flujo térmico es dependiente del tiempo.

2. Planteamiento del problema

Sea $\Omega \subset R^N (N = 2, 3)$ la región de flujo de un fluido térmico viscoso y dependiente del tiempo y sea Γ la frontera de esta región. Las hipótesis de la aproximación de Boussinesq suponen que las variaciones de temperatura son suficientemente pequeñas para poder considerar la densidad como constante a través del fluido, excepto en el término de flotación ρg , donde g es la fuerza gravitacional y ρ , de la ecuación de estado $\rho = \rho(P, T)$, está dada linealmente por

$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$, donde T es la temperatura, ρ_0 y T_0 denotan densidad y temperatura de referencia. Los cambios de densidad ocasionados por cambios de presión se desprecian; propiedades del fluido, como viscosidad dinámica μ , coeficiente de expansión térmica $\beta = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)_P$, conductividad térmica κ , difusividad térmica η , y el calor específico c_p se consideran constantes; y la disipación de energía mecánica se desprecia[15,18]. Matemáticamente la aproximación de Boussinesq, con estructura incompresible, se describe por las ecuaciones adimensionales

$t > 0 :$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{e} \quad \text{en } \Omega \quad (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega \quad (b) \\ \theta_t - \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (c) \end{aligned} \quad (1)$$

donde \mathbf{u} , p y θ son la velocidad, presión y temperatura respectivamente. Como se observa, la ecuación de momento (1a) y de conservación de masa, o condición de incompresibilidad (1b) están acopladas a la ecuación de temperatura (1c). Los parámetros adimensionales Re , Ra y Pr son los números de Reynolds, Rayleigh y Prandtl, respectivamente, y \mathbf{e} es el vector unitario en la dirección de la gravedad. Dichos parámetros adimensionales están dados por $Re = Ul/\nu$,

$$Ra = \frac{\beta l^3 \kappa g \rho_0^2}{\mu^3 c_p} (T_l - T_0),$$

$Pr = \kappa/\mu c_p$, donde las temperaturas de referencia T_0 y T_1 , con $T_0 < T_1$, pueden ser las temperaturas de las paredes laterales de la región de flujo, cuando ésta es una cavidad rectangular, l y U son la longitud y velocidad de referencia o característica, $\nu (= \mu/\rho_0)$ es la viscosidad cinemática y g la constante gravitacional. La temperatura θ y velocidad \mathbf{u} adimensionales están dadas por $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}/U$, la posición adimensional \mathbf{x} por $\mathbf{x} = \mathbf{x}/l$.

El acoplamiento entre (1a) and (1c), incluyendo Re , corresponde a fenómenos de convección mixta. La elección $Re = 1$ corresponde a convección natural, una vez que se define $U = \nu/l$ debido a que en convección natural no hay velocidad característica[15,18]. El caso isotérmico se obtiene de (1a)-(1c) y corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes: sólo la ecuación de momento (1a) y la condición de incompresibilidad (1b) son consideradas y el lado derecho en (1a), digamos \mathbf{f} , representaría una concentración de fuerzas externas independiente de θ .

Las ecuaciones de momento (1a) y de temperatura (1c) deben ser complementadas con una condición inicial apropiada:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0), \quad (a) \\ \theta(\mathbf{x}, 0) &= \theta_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega, \quad (b) \end{aligned} \quad (2)$$

y condición de frontera, digamos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{sobre } \Gamma, t \geq 0 \quad \left(\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \right), \quad (a) \\ B\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, t \geq 0, \quad (b) \end{aligned} \quad (3)$$

donde B representa un operador de frontera para la temperatura, el cual puede involucrar condición de frontera de tipo Dirichlet, Neumann o mixta.

Restringiendo las Ecs. (1a-1c) a una región bidimensional Ω , tomando el rotacional en ambos lados de las ecuaciones de momento y tomando en cuenta las relaciones

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

donde $(u_1, u_2) = \mathbf{u}$ y ψ es la función corriente, lo cual se sigue de la condición de incompresibilidad, entonces la componente en la dirección $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ da el sistema de ecuaciones escalares

$t > 0 :$

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= -\omega \quad \text{en } \Omega, \psi|_{\Gamma} = 0 \quad (a) \\ \omega_t - \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{en } \Omega, \omega|_{\Gamma} = \omega_{cf} \quad (b) \\ \theta_t - \gamma \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0 \quad \text{en } \Omega, B\theta|_{\Gamma} = 0, \quad (c) \end{aligned} \quad (5)$$

donde ω es la vorticidad, la cual de $\omega \mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{u} = -\Delta \psi \mathbf{k}$, está dada por

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Con ω_{cf} denotamos la condición de frontera para ω , la cual se construye más adelante; ω también requiere de una condición inicial $\omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x})$ en Ω , que debe satisfacer

$$\frac{\partial u_{20}}{\partial x} - \frac{\partial u_{10}}{\partial y}$$

si $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (u_{10}(\mathbf{x}), u_{20}(\mathbf{x}))$ denota la velocidad inicial. Se ha reemplazado $Re = 1$, y $\gamma = 1/Pr$.

El sistema (5) representa la aproximación de Boussinesq en variables función corriente y vorticidad del sistema (1) en variables primitivas \mathbf{u} y p . En (5) la presión p no aparece, ya que el rotacional del gradiente es $\mathbf{0}$, y por (4) la condición de incompresibilidad (1b) se satisface automáticamente en Ω . Los hechos de que en (5) se evita calcular p y que la condición de incompresibilidad se satisfaga automáticamente pueden verse como una ventaja contra la desventaja de no tener a la mano condición de frontera ω_{cf} para la vorticidad ω : en la frontera Γ , ψ está sobredeterminada (se conocen $\psi|_{\Gamma}$ y también $(\partial\psi/\partial n)|_{\Gamma}$)[19,20], pero no se tiene condición de frontera para ω ; sin embargo, existen varias alternativas para construirla. En la Ref. 20 se da un procedimiento para construir ω_{cf} en regiones arbitrarias.

Replanteando el problema dado por el sistema (5) en cavidades rectangulares $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ con $a, b > 0$, se

tiene que, por viscosidad, la condición de frontera para la variable primitiva \mathbf{u} es $\mathbf{0}$ en paredes sólidas. Para convección natural en Ω , todas las paredes que conforman la frontera son sólidas. Por (4), ψ es constante y consideramos esta constante como 0, esto es, $\psi|_{\Gamma} = 0$, como se establece en (5a). Para ω_{cf} , restringimos a convección natural la condición de frontera para convección mixta en la Ref. 3, la cual a su vez se basa en la alternativa dada en la Ref. 21 y 2 para fluidos isotérmicos en cavidades rectangulares: ω_{cf} se construye mediante una expansión de Taylor de ψ en la frontera (hacia el interior) y usando (5a). Entonces, para ω_{cf} se obtienen las siguientes relaciones $\{O(h_x^2), O(h_y^2)\}$, las cuales están dadas por los valores (todavía desconocidos) de ψ en Ω :

$$\begin{aligned} \omega(0, y, t) &= -\frac{1}{2h_x^2} [8\psi(h_x, y, t) - \psi(2h_x, y, t)], \\ \omega(a, y, t) &= -\frac{1}{2h_x^2} [8\psi(a - h_x, y, t) - \psi(a - 2h_x, y, t)], \\ \omega(x, 0, t) &= -\frac{1}{2h_y^2} [8\psi(x, h_y, t) - \psi(x, 2h_y, t)], \\ \omega(x, b, t) &= -\frac{1}{2h_y^2} [8\psi(x, b - h_y, t) - \psi(x, b - 2h_y, t)], \end{aligned} \quad (6)$$

donde h_x y h_y denotan el tamaño de paso para la discretización espacial en las direcciones X y Y respectivamente.

Los signos negativos que anteceden a los lados derechos en (6) son consecuencia del signo negativo antes de ω en (5a). Estos signos no aparecen en las correspondientes expresiones en la Ref. 4. Ésto se debe a que ahí estamos considerando la definición bidimensional de la vorticidad dada por

$$\omega = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

a la cual le aplicamos (4) para obtener (5a); es decir, ω aquí es el negativo de dicha expresión. Aquí estamos considerando la restricción bidimensional de la definición tridimensional, y vectorial, de la vorticidad dada por el rotacional de \mathbf{u} . Esta definición es más general que la bidimensional en el sentido de que concuerda con los resultados que se obtienen con variables primitivas, lo cual entre otras cosas, es esencial para obtener resultados de convección mixta [3].

El número de Nusselt local Nu mide la transferencia de calor en cada punto de la pared donde la temperatura está especificada y el número de Nusselt global \overline{Nu} mide la razón de transferencia total en dicha pared. Estos parámetros adimensionales se definen como número de Nusselt local:

$$Nu(y) = \left. \frac{b}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0,a},$$

número de Nusselt global:

$$\overline{Nu} \Big|_{x=0,a} = \int_0^b Nu(y) dy.$$

3. Método numérico

Las derivadas temporales ω_t y θ_t que aparecen en (5b-5c) se aproximan mediante

$$f_t(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t) \approx \frac{3f^{n+1} - 4f^n + f^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

donde $n \geq 1$, Δt denota el tamaño de paso en el tiempo y $f^r \approx f(\mathbf{x}, r\Delta t)$. Se sabe que (7) es una aproximación de segundo orden para una función f suficientemente suave.

Una vez que dichas derivadas temporales se aproximan con (7), el sistema totalmente implícito resultante está dado por

$$\begin{aligned} &\text{en } \Omega : \\ &\Delta \psi^{n+1} = -\omega^{n+1}, \quad \psi^{n+1}|_{\Gamma} = 0, \\ &\alpha \omega^{n+1} - \Delta \omega^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \omega^{n+1} = \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} + f_{\omega}, \\ &\omega^{n+1}|_{\Gamma} = \omega_{cf}^{n+1}, \\ &\alpha \theta^{n+1} - \gamma \Delta \theta^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \theta^{n+1} = f_{\theta}, \\ &B \theta^{n+1}|_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\alpha = \frac{3}{2\Delta t}, \quad f_{\omega} = \frac{4\omega^n - \omega^{n-1}}{2\Delta t}, \quad f_{\theta} = \frac{4\theta^n - \theta^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Las componentes u_1 y u_2 de \mathbf{u} , en términos de ψ , están dadas por (4).

Renombrando $\{\psi^{n+1}, \omega^{n+1}, \theta^{n+1}\}$ por $\{\psi, \omega, \theta\}$, en cada nivel de tiempo se tiene que resolver un sistema no lineal de ecuaciones elípticas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{en } \Omega : \\ &\Delta \psi = -\omega, \quad \psi|_{\Gamma} = 0 \\ &\alpha \omega - \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} + f_{\omega}, \quad \omega|_{\Gamma} = \omega_{cf} \\ &\alpha \theta - \gamma \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = f_{\theta}, \quad B \theta|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Para obtener los valores de $\{\psi^1, \omega^1, \theta^1\}$ en (8) aplicamos una aproximación de primer orden para la derivada en el tiempo a través de una subsucesión con tamaño de paso en el tiempo más pequeño para mantener la precisión de segundo orden; se obtienen también sistemas elípticos de la forma (9).

Para resolver el sistema anterior aplicamos una variante de un método iterativo de punto fijo para flujos térmicos dados por la aproximación de Boussinesq en variables primitivas [1]. Un aspecto distintivo aquí es que el proceso iterativo se extiende hasta la frontera para poder construir la condición de frontera ω_{cf} dada por valores interiores desconocidos de ψ en (6).

Si denotamos por

$$R_{\omega}(\omega, \psi) \equiv \alpha \omega - \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} - f_{\omega} \quad \text{en } \Omega \quad (10)$$

$$R_{\theta}(\theta, \psi) \equiv \alpha \theta - \beta \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - f_{\theta} \quad \text{en } \Omega, \quad (11)$$

entonces, el sistema (9) es equivalente a

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -\omega \quad \text{en } \Omega, \quad \psi|_{\Gamma} = 0 \\ R_{\theta}(\theta, \psi) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \quad B\theta|_{\Gamma} = 0 \\ R_{\omega}(\omega, \psi) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \omega|_{\Gamma} = \omega_{cf}. \end{aligned} \quad (12)$$

Y, resolvemos (10) con el proceso iterativo de punto fijo:
 Con $\{\theta^0, \omega^0\} = \{\theta^n, \omega^n\}$ dados, resolver hasta convergencia en θ y ω

en Ω :

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{m+1} &= -\omega^m, \quad \psi^{m+1}|_{\Gamma} = 0 \\ \theta^{m+1} &= \theta^m - \rho_{\theta}(\alpha I - \beta\Delta)^{-1}R_{\theta}(\theta^m, \psi^{m+1}), \\ B\theta^{m+1}|_{\Gamma} &= 0, \quad \rho_{\theta} > 0 \\ \omega^{m+1} &= \omega^m - \rho_{\omega}(\alpha I - \Delta)^{-1}R_{\omega}(\omega^m, \psi^{m+1}), \\ \omega^{m+1}|_{\Gamma} &= \omega_{cf}^m, \quad \rho_{\omega} > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

y tomar $\{\psi^{n+1}, \omega^{n+1}, \theta^{n+1}\} = \{\psi^{m+1}, \omega^{m+1}, \theta^{m+1}\}$.

Por otro lado, el sistema (11) es equivalente a

en Ω :

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{m+1} &= -\omega^m, \quad \psi^{m+1}|_{\Gamma} = 0, \\ (\alpha I - \beta\Delta)\theta^{m+1} &= (\alpha I - \beta\Delta)\theta^m - \rho_{\theta}R_{\theta}(\theta^m, \psi^{m+1}), \\ \rho_{\theta} > 0, \quad B\theta^{m+1}|_{\Gamma} &= 0, \\ (\alpha I - \Delta)\omega^{m+1} &= (\alpha I - \Delta)\omega^m - \rho_{\omega}R_{\omega}(\omega^m, \psi^{m+1}), \\ \rho_{\omega} > 0, \quad \omega^{m+1}|_{\Gamma} &= \omega_{cf}^m. \end{aligned} \quad (14)$$

Entonces, hay que resolver tres problemas elípticos lineales y desacoplados, asociados con los operadores Δ (ó $-\Delta$), $\alpha I - \beta\Delta$ y $\alpha I - \Delta$ en cada iteración; para este fin debe notarse que las partes no simétricas $\nabla\theta$ y $\nabla\omega$ se pasan al lado derecho dentro del proceso iterativo.

Para la solución de problemas lineales elípticos y simétricos, como se ha dicho anteriormente, existen resolvedores eficientes tanto mediante diferencias finitas, para regiones rectangulares, como mediante elemento finito, para regiones complejas. En este trabajo usamos la opción de segundo orden de Fishpack en cavidades rectangulares [22], donde los sistemas algebraicos resultantes se resuelven con un método iterativo de reducción cíclica [23]. Esta aproximación de segundo orden junto con la discretización de segundo orden en (7) para las primeras derivadas en tiempo, la aproximación de segundo orden para la condición de frontera de la vorticidad en (6), la aproximación con diferencias centradas de segundo orden en puntos interiores, y con (7) en puntos de frontera, para las primeras derivadas de ψ (para obtener \mathbf{u}), ω , θ que aparecen en (8), de la condición de frontera tipo Neumann para θ , que se describirá en la siguiente sección, de las que aparecen en los números de Nusselt locales, y la aproximación trapezoidal de segundo orden (en todo el intervalo) para calcular el número de Nusselt global, implican

que el problema discreto está basado en discretizaciones de segundo orden.

4. Resultados numéricos

La condición de frontera para la temperatura θ , contenida implícitamente hasta ahora en el operador B , está dada por

$$\begin{aligned} \theta &= 1 \quad \text{sobre } \Gamma|_{x=0}, \quad \theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma|_{x=a} \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma|_{y=0,b}. \end{aligned} \quad (15)$$

Lo cual significa que las paredes horizontales están aisladas y el calentamiento ocurre en la pared izquierda; en términos de la temperatura adimensional $\theta = (T - T_0)/(T_l - T_0)$ en la Ecs. (1c) y (5c) vemos que en la pared izquierda estamos especificando la temperatura dimensional T como $T = T_l$ y en la derecha como $T = T_0$. Otra posibilidad es que el calentamiento ocurra en la pared derecha, como por ejemplo en la Ref. 1, en tal caso esencialmente sólo hay un cambio cualitativo en la evolución del flujo, como es de esperarse.

En todos los experimentos numéricos que se reportan, la condición inicial para la temperatura y para la vorticidad

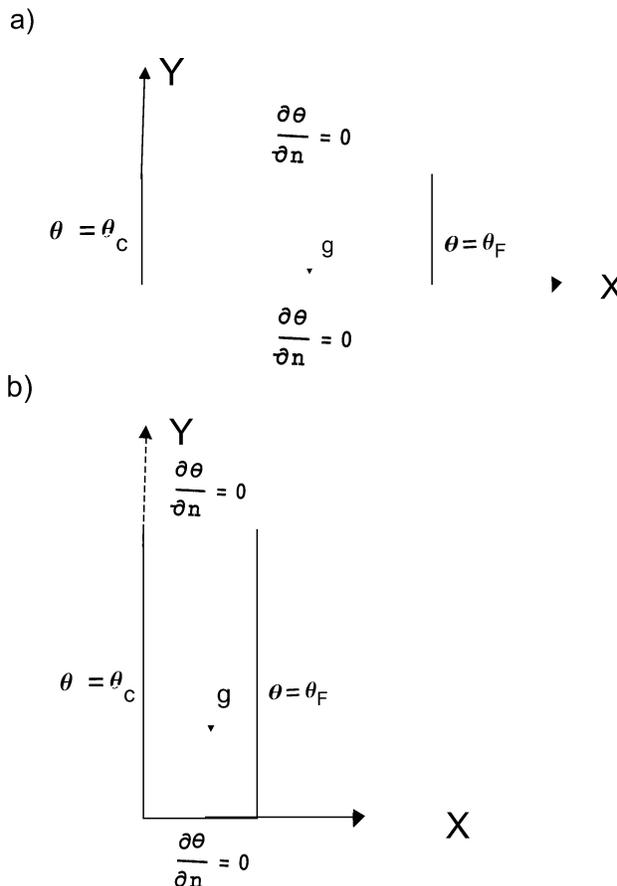


FIGURA 1. Cavidad rectangular: a) horizontal, b) vertical.

están dadas respectivamente por $\theta(\mathbf{x}, 0) = 0$ y $\omega(\mathbf{x}, 0) = 0$. Para el parámetro Pr , se considera el valor fijo $Pr = .72$, lo cual significa que la cavidad está llena de aire. Respecto al método iterativo, $\rho = .7$ y la convergencia se logra con tolerancia 10^{-5} . Los pasos de discretización espacial se denotan por h_x, h_y y por Δt el paso de tiempo. Los resultados que se presentan corresponden a números de Rayleigh Ra en el intervalo $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ y diferentes razones geométricas G de la cavidad, $1/3 \leq G \leq 3$, en la Fig. 1 se muestra la configuración de las cavidades. Como es usual, los resultados se reportan a través de las líneas de corriente, de la función corriente ψ , y de las isothermas, de la temperatura θ . En cada una de las figuras que muestran los resultados, de la Fig. 2 a la 4 y de la 6 a la 9, así como en la 12, a la izquierda se encuentran las líneas de corriente y a la derecha las isothermas. Como consecuencia de que el calentamiento se da en la pared izquierda, en todas las figuras el movimiento del fluido, a través de las líneas de corriente, es en dirección del giro de las manecillas del reloj, lo cual a su vez es implicado por el hecho de que todos los valores de la función corriente son negativos. Para medir la transferencia de calor entre la pared caliente (izquierda), representada matemáticamente sobre el eje Y del dominio de la cavidad en la Fig. 1, y el fluido, el número de Nusselt local se calcula en dicha pared; en la Fig. 5 se reporta este número para números de Rayleigh $Ra = 10^4, 10^5$, y 10^6 en la cavidad cuadrada; en la Fig. 10 para $Ra = 10^5$ y razones geométricas $G=1, 2$, y 3 ; y en la Fig. 11 para este mismo Ra y razones geométricas $G=1, 1/2$, y $1/3$.

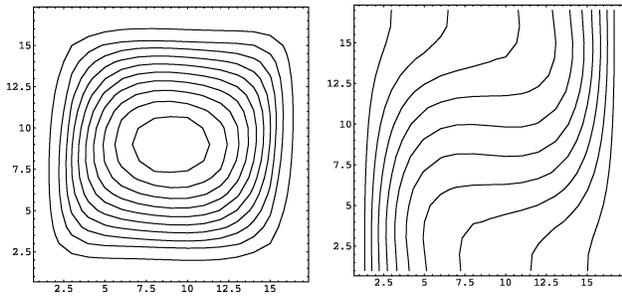


FIGURA 2. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^4$; $G=1$, $(h_x, h_y)=(1/16, 1/16)$, $dt=0.001$.

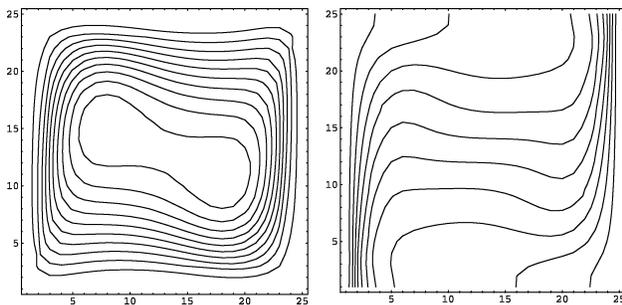


FIGURA 3. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^5$; $G=1$, $(h_x, h_y)=(1/24, 1/24)$, $dt=0.0001$.

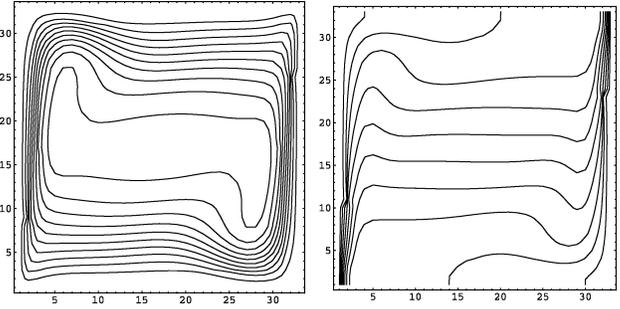


FIGURA 4. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^6$; $G=1$, $(h_x, h_y)=(1/32, 1/32)$, $dt=0.0001$.

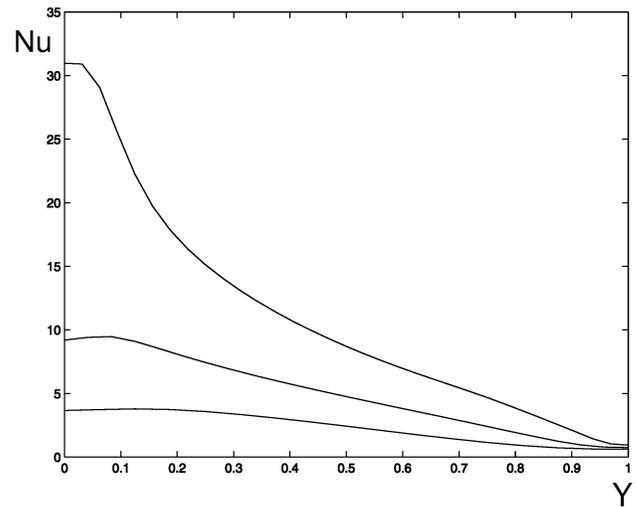


FIGURA 5. Número de Nusselt local: $Ra=10^4, 10^5$ y 10^6 .

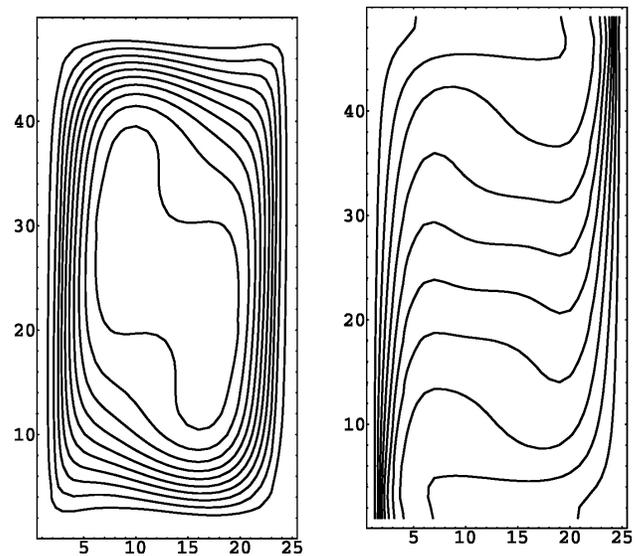


FIGURA 6. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^5$; $G=2$, $(h_x, h_y)=(1/24, 2/48)$, $dt=0.0001$.

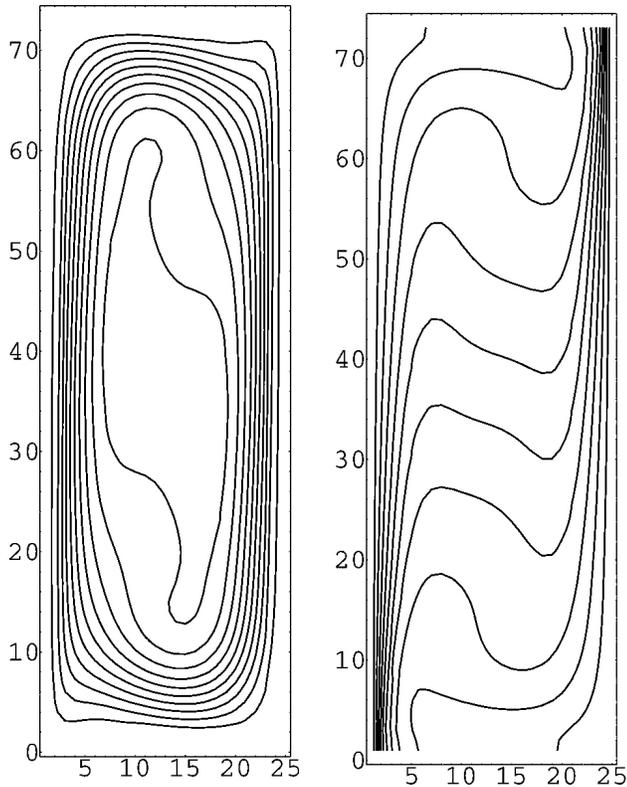


FIGURA 7. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^5$; $G=3$, $(h_x, h_y)=(1/24, 3/72)$, $dt=0.00001$.

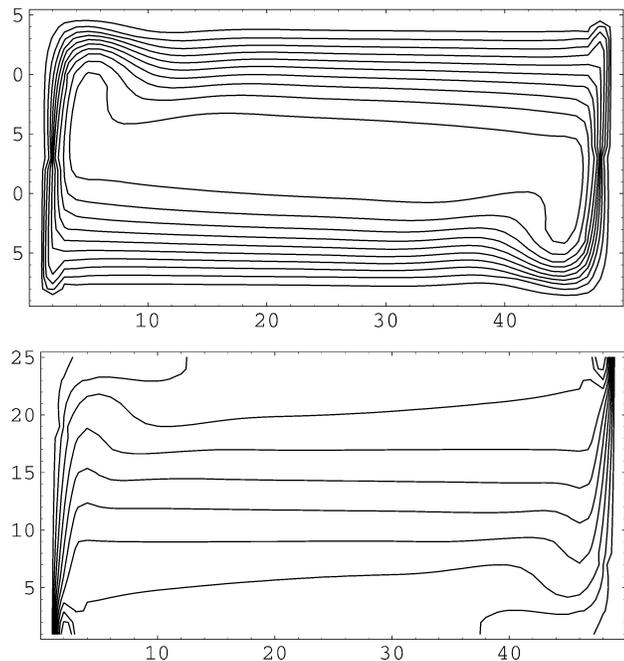


FIGURA 8. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^5$; $G=1/2$, $(h_x, h_y)=(2/48, 1/24)$, $dt=0.0001$.

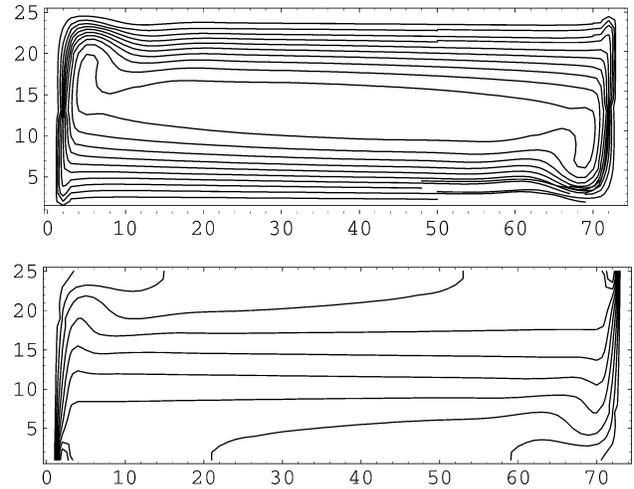


FIGURA 9. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=10^5$; $G=1/3$, $(h_x, h_y)=(3/72, 1/24)$, $dt=0.00001$.

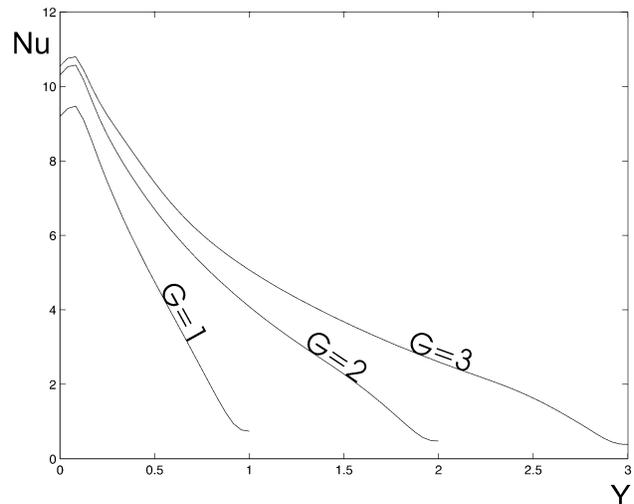


FIGURA 10. Número de Nusselt local para $G=1, 2$ y 3 .

Los resultados representan el estado estacionario del flujo que se obtiene al resolver el problema no-estacionario. Esto es, representan el estado estacionario asintótico cuando t tiende a $+\infty$ (tiempo grande, en la práctica). Un criterio de paro debe darse para el tiempo final T_{ee} donde dicho estado se alcanza. Ya que T_{ee} es el tiempo cuando la solución ya no cambia respecto al tiempo en cada punto espacial del fluido [3], T_{ee} se determina con el criterio de la norma absoluta discreta punto a punto L_∞ en la cerradura de la cavidad $\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \omega &: \|\omega_{hx,hy}^{n+1} - \omega_{hx,hy}^n\|_\infty \\ \theta &: \|\theta_{hx,hy}^{n+1} - \theta_{hx,hy}^n\|_\infty \end{aligned} \tag{16}$$

con tolerancia 10^{-5} , lo cual es la contraparte matemática del correspondiente concepto físico, Landau y Lifshitz [15], como ya se mencionó en la Introducción.

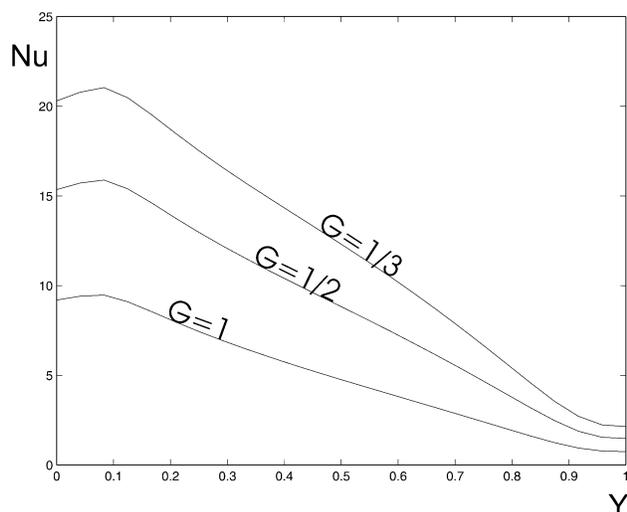


FIGURA 11. Número de Nusselt local para $G = 1, 1/2$ y $1/3$.

Las Figs. 2, 3 y 4 muestran el flujo en la cavidad unitaria, o sea cavidad con $G=1$, para $Ra=10^4, 10^5$ y 10^6 , respectivamente. Las mallas que se usan para Ra , en este orden, son $(h_x, h_y)=(1/16, 1/16)$, $(1/24, 1/24)$, y $(1/32, 1/32)$; los pasos de tiempo, $\Delta t = 0.001$ para el primer caso y $\Delta t=0.0001$ para los dos últimos. Estos resultados se presentan con fines de validación y concuerdan con muchos otros obtenidos con diferentes métodos y que se supone son correctos, ya sea con variables primitivas, véase por ejemplo la Ref. 1, o con variables función corriente y vorticidad como aquí, véase por ejemplo la Ref. 4; se pueden ver también las referencias mencionadas en estos trabajos. Es notorio comentar que las mallas que se usan en los resultados que aquí se reportan no difieren mucho de las que se usan en la Ref. 1 a pesar de que ahí se usa un método de “upwinding” (usar información en dirección contraria al flujo para aproximar los términos convectivos $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$). La Fig. 5 muestra la gráfica del número de Nusselt local para los Ra 's que estamos considerando en la cavidad unitaria, $Ra=10^4, 10^5$ y 10^6 : a medida que Ra crece la transferencia de calor, dada por el número de Nusselt local, es mayor, y la máxima transferencia ocurre en la esquina del fondo de la pared caliente, $y=0$. La Tabla I muestra que esta relación también ocurre para el número de Nusselt global. Este comportamiento también ocurre para los valores reportados en la Ref. 14, denotados por \overline{Nu}_{vd} al final de la tabla, lo cual muestra la congruencia con el fenómeno a pesar de que los métodos numéricos son completamente diferentes. Hacemos notar dentro de este contexto que respecto a las líneas de corriente en Figs. 3 y 4, De Vahl Davis tiene un par de subceldas dentro de las celdas centrales, pero ello es consecuencia de tomar ciertos valores específicos de los contornos. En esta Tabla se observa que el tiempo T_{ee} para alcanzar el estado estacionario es menor cuando Ra crece.

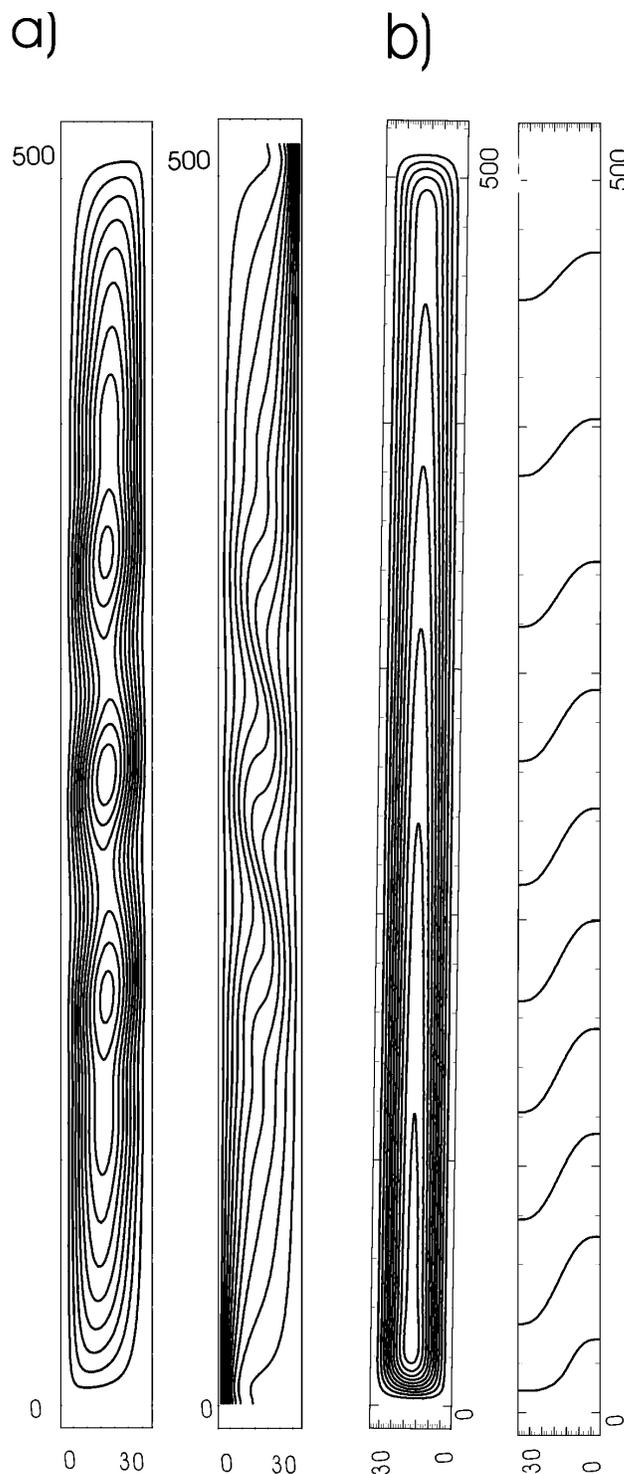


FIGURA 12. Líneas de corriente e isothermas: $Ra=1.1 \times 10^4$; a) $G=16, (h_x, h_y)=(1/32, 16/512)$; b), rotada 90 grados, $G=1/16, (h_x, h_y)=(16/512, 1/32)$; $dt=0.0001$ para ambos casos.

En las Figs. 6 y 7 se muestra el flujo para $Ra=10^5$ con razones geométricas $G=2$ y 3 , lo cual corresponde a cavidades verticales, en mallas $(h_x, h_y)=(1/24, 2/48)$ y $(h_x, h_y) = (1/24, 3/72)$ respectivamente; el primer caso con $\Delta t=0.0001$ y el segundo con $\Delta t=0.00001$.

TABLA I. T_{ee} y número de Nusselt global \overline{Nu} .

Ra	T_{ee}	\overline{Nu}	\overline{Nu}_{vd}
10^4	0.6711	2.388	2.212
10^5	0.4276	4.946	4.454
10^6	0.2900	10.970	9.027

A continuación, para el mismo número de Rayleigh $Ra=10^5$ se presentan los resultados análogos en cavidades horizontales. Para la cavidad con razón geométrica $G=1/2$, la Fig. 8 muestra las líneas de corriente del flujo y las isothermas, en una malla $(h_x, h_y)=(2/48, 1/24)$ y $\Delta t=0.0001$. La Fig. 9 muestra la situación análoga en una cavidad horizontal con $G=1/3$, en una malla $(h_x, h_y)=(3/72, 1/24)$ y $\Delta t=0.00001$.

La Fig. 10 muestra las gráficas de los números de Nusselt locales de $Ra=10^5$ con razones geométricas $G=1, 2$ y 3 . Mientras que en la Fig. 11 se muestran los correspondientes para $G=1, 1/2$ y $1/3$. Se observa que a medida que la razón geométrica crece o decrece el número de Nusselt local crece; y a diferencia de lo que ocurre en la cavidad cuadrada en estos casos la máxima transferencia de calor ocurre arriba de la esquina del fondo de la pared caliente, en $y=0.1$.

La Tabla II muestra los números de Nusselt globales para las mismas razones geométricas que las dadas en las figuras mencionadas anteriormente. Puede observarse que el número de Nusselt global disminuye a medida que la razón geométrica crece. Esta tabla también muestra el tiempo final T_{ee} donde se alcanza el correspondiente estado estacionario. Puede observarse que T_{ee} aumenta a medida que la razón geométrica G crece o decrece, pero aumenta más cuando G decrece.

Para justificar que los resultados con razones geométricas G diferentes de la unidad son correctos, realizamos un estudio de independencia de los resultados respecto a la malla y al paso de tiempo a través del error discreto relativo L_∞ en \overline{Q}

$$(h_x, h_y) \text{ fija : } \frac{\|f_{h_x, h_y; \Delta t_1} - f_{h_x, h_y; \Delta t_2}\|_\infty}{\|f_{h_x, h_y; \Delta t_1}\|_\infty},$$

$$\Delta t \text{ fijo : } \frac{\|f_{h_x 1, h_y 1; \Delta t} - f_{h_x 2, h_y 2; \Delta t}\|_\infty}{\|f_{h_x 1, h_y 1; \Delta t}\|_\infty}. \quad (17)$$

Para este fin, presentamos dicho estudio para $Ra = 10^5$ y $G = 1/3$. Paso de tiempo $\Delta t = 0.0001$ fijo y 3 mallas:

- 1) $(h_x, h_y)=(3/72, 1/24)$,
- 2) $(h_x, h_y)=(3/96, 1/32)$,
- 3) $(h_x, h_y)=(3/192, 1/64)$;

los resultados se muestran en la Tabla III. Malla fija $(h_x, h_y)=(3/72, 1/24)$ y 3 pasos de tiempo:

- 1) $\Delta t=0.0001$,
- 2) $\Delta t=0.00005$ y
- 3) $\Delta t=0.000025$;

los resultados se muestran en la Tabla IV. Se observa que las discrepancias en la función corriente (Disc. F.C.) y las

discrepancias en la temperatura (Disc. T.) son de menos del uno por ciento con respecto al tamaño de la malla y de orden microscópico para las pruebas con diferentes valores de Δt . En consecuencia seleccionamos $(h_x, h_y)=(3/72, 1/24)$ y $\Delta t=0.0001$ como los parámetros de discretización óptimos, por razones obvias, como se muestra en la Fig. 10. Cálculos similares se hicieron para $G=3$ y las discrepancias son un orden de magnitud menos, mostrando que el flujo para $G=3$ es más suave que el de $G=1/3$. Para los resultados más simples $G=2$ y $G=1/2$ solamente restringimos a 2 y a 1/2 la mallas y mantenemos el mismo Δt , como se muestra en las Figs. 6 y 8.

De los resultados anteriores para $G=3$ y $G=1/3$ debe notarse que se ha tenido que disminuir Δt en un orden de magnitud respecto a los otros casos, lo cual por un lado, físicamente es necesario para poder capturar el aumento en actividad de movimiento del flujo del fluido (lo cual se infiere observando las Figs. 7 y 9) relacionado a su vez con el aumento de su actividad térmica (lo cual se infiere observando los máximos de los números de Nusselt local en Figs. 10 y 11), y por otro lado es un requisito de estabilidad del método numérico como consecuencia de la malla involucrada; hacemos notar que dichos Δt 's son casi óptimos en el sentido que un incremento en un orden de magnitud conduce a que el proceso iterativo explote y nada se obtiene, lo cual ocurre en los primeros niveles de tiempo, es decir, el aviso para disminuir Δt ocurre sin mucho desgaste de cómputo.

Finalmente comentamos sobre $Ra=1.1 \times 10^4$ con razones geométricas $G=16$ y $G=1/16$. El resultado para $G=16$ está relacionado con la inestabilidad térmica de ojos de gato, lo cual a su vez está relacionado con la aparición de celdas múltiples; el de $G=1/16$ lo presentamos como un ejemplo de flujos térmicos que dependen del tiempo. Estos resultados se presentan en Fig. 12a para $G=16$ en una malla $(h_x, h_y)=(1/32, 16/512)$, Fig. 12b para $G=1/16$ en una malla $(h_x, h_y)=(16/512, 1/32)$, la cual está rotada 90° ; ambos con $\Delta t=0.0001$. El resultado de $G=16$ es el estado estacionario que se alcanza en $T_{ee}=5.6786$ mientras que para $G=1/16$ es el flujo a un tiempo final $T_f=9$, ya que con el criterio de paro para alcanzar el estado estacionario dicho estado no se alcanza. Otro cálculo se realizó hasta $T_f=30$, sin alcanzar el estado estacionario. Los patrones de flujo son diferentes en estos dos tiempos T_f , lo cual muestra que el flujo es dependiente del tiempo (al menos hasta $T_f=30$). Volviendo al caso $G=16$ en Fig. 12a, mencionamos que nuestro resultado respecto al número 3, de ojos, en las líneas de corriente, Figura de la izquierda en a), coincide con el resultado de en la Ref. 16, dicho número difiere del número, 4 [17]. El caso $G=1/16$ en Fig. 12b no lo consideran dichos autores, ni conocemos alguna referencia donde se discuta. Consideramos que tanto el número de ojos para $G=16$ y el carácter de flujo dependiente del tiempo para $G=1/16$ son aspectos que merecen todavía más atención. Que el número de ojos en nuestro resultado está libre de artificios numéricos lo justifican los cálculos hechos con

TABLA II. $Ra = 10^5$: T_{ee} y número de Nusselt global \overline{Nu} .

G	T_{ee}	\overline{Nu}
1/3	1.243	12.042
1/2	0.846	8.81
1	0.428	4.946
2	0.512	4.627
3	0.588	4.319

TABLA III. Independencia de la malla: $Ra=10^5$ y $G=1/3$.

malla	Disc. F.C.	Disc. T.
1 vs 2	0.2 %	0.4 %
1 vs 3	0.4 %	0.3 %
2 vs 3	0.2 %	0.1 %

TABLA IV. Independencia de Δt : $Ra=10^5$, y $G=1/3$.

Δt	Disc. F.C.	Disc. T.
1 vs 2	0.0001 %	0.00025 %
1 vs 3	0.0003 %	0.00076 %
2 vs 3	0.0005 %	0.00050 %

mallas $(h_x, h_y)=(1/48, 16/768)$ y $(h_x, h_y)=(1/64, 16/1024)$, obteniendo también 3 ojos. En la Figura 13 se muestran los correspondientes números de Nusselt locales. A diferencia de lo que se dijo anteriormente para los otros flujos, que los de cavidades horizontales son más activos, aquí se invierten los papeles: el de $G=1/16$, Fig. 13-b), presenta solamente un máximo (global) mientras que el de $G=16$ presenta un máximo global y 2-3 máximos locales, lo cual es característico cuando aparecen celdas múltiples [5]; esta “actividad” se invierte con el número de Nusselt global \overline{Nu} : 1.25 para $G=16$ y 3.35 para $G=1/16$.

5. Conclusiones

Hemos presentado resultados numéricos para convección natural de fluidos incompresibles y viscosos en cavidades rectangulares, usando la aproximación de Boussinesq no-estacionaria en variables función corriente y vorticidad. El método numérico que usamos es muy simple y se basa en un proceso iterativo de punto fijo para resolver el sistema elíptico no lineal que resulta una vez que se aplica una discretización apropiada de segundo orden en el tiempo. El proceso iterativo nos lleva a la solución de problemas elípticos lineales, simétricos, bien condicionados y desacoplados, los cuales, después de la discretización espacial, conducen a la solución de sistemas algebraicos bien condicionados, que como se ha descrito, pueden resolverse eficientemente mediante un método iterativo de reducción cíclica. El método muestra ser suficientemente robusto para estudiar flujos de convección natural con diferentes razones geométricas para números de Rayleigh suficientemente grandes. Las mallas y pasos de tiempo que se usan no requieren de mucha capacidad de cómputo y los resultados pueden obtenerse sin mucho esfuerzo, y en poco tiempo, en computadoras razonablemente pequeñas. Todo esto aunado al hecho, como lo muestran los resultados, que el tiempo para alcanzar el estado estacionario, resolviendo el problema no-estacionario, es considerablemente corto. Los resultados para razones geométricas G diferentes de la unidad muestran que los flujos en cavidades horizontales, $G < 1$, son más activos, al menos en el intervalo que aquí se considera, como puede observarse en Figs. 7 y 9 respecto al movimiento del fluido, y en Figs. 10 y 11 respecto a la influencia térmica a través del número de Nusselt local (observando la posición de los máximos), y en Tabla II respecto a T_{ee} y \overline{Nu} . Esta situación se preserva para razones geométricas más grandes, aunque Ra sea menor; tal es el caso que se muestra en relación a la inestabilidad térmica con $G=16$. De interés también es la aparición, pareciera ser, de flujos térmicos dependientes del tiempo como lo muestra, en esta etapa de la investigación, la contraparte $G=1/16$ que hemos considerado.

1. B. Bermúdez y A. Nicolás, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **29** (1999) 397.
2. A. Nicolás y B. Bermúdez, *Computer Modeling in Engineering & Sciences* **6** (2004) 441.
3. A. Nicolás y B. Bermúdez, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **48** (2005) 349.
4. E. Báez, B. Bermúdez y A. Nicolás, *Rev. Mex. Fís.*, **50** (2004) 36.
5. E. Báez y A. Nicolás, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **49** (2006) 4773.
6. S. Xin y P. Le Quéré, *J. of Fluid Mechanics* **304** (1995) 87.
7. M. A. Christon, P. M. Gresho y S.B. Sutton, Special Session Computational Predictability of Natural Convection Flows in Enclosures’, First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts U.S.A., June 2001.
8. S. Xin y P. Le Quéré, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **40** (2002) 981.
9. R. Glowinski, *Hanbook of Numerical Analysis: Numerical Methods for Fluids (Part 3)*. (North-Holland Ed., 2003).
10. R. Delgado-Buscalione y E. Crespo del Arco, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **44** (2001) 1947.
11. J. Patterson y J. Imberger, *J. of Fluid Mechanics* **100** (1980) 65.
12. B. Boehrer, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **40** (1997) 4105.
13. A. Bejan y C. L. Tien, *Journal of Heat Transfer* **100** (1978) 641.

14. G. De Vahl Davis, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **3** (1983) 249.
15. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, second edition, (Pergamon Press, INC., 1989).
16. Z.J. Zhu y H.X. Yang, *Heat and Mass Transfer* **39** (2003) 579.
17. P. Le Quéré, *Journal of Heat Transfer* **112** (1990) 965.
18. M.D. Gunzburger, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows: A guide to theory, practice, and algorithms* (Academic Press, INC., 1989).
19. R. Peyret y T.D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow* (Springer-Verlag, New York, 1983).
20. E.J. Dean, R. Glowinski y O. Pironneau, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* **87** (1991) 117.
21. O. Goyon, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* **130** (1996) 319.
22. J. Adams, P. Swarztrauber y R. Sweet, FISHPACK: A Package of Fortran Subprograms for the Solution of Separable Elliptic PDE's, *The National Center for Atmospheric Research* (Boulder, Colorado, USA, 1980).
23. R. Sweet, *SIAM J. on Numer. Ana.* **14** (1977) 706.