

# Medición la función de Wigner para campos electromagnéticos en cavidades

J.L. Escudero Jiménez y H. Moya-Cessa  
*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,  
 Apartado Postal 51 y 216, 72000, Puebla, Pue., México.*

Recibido el 3 de julio de 2008; aceptado el 4 de septiembre de 2008

En esta contribución mostramos como la función de Wigner puede ser medida en cavidades, para esto estudiamos como pueden ser desplazados campos electromagnéticos cuantizados en cavidades. El desplazamiento de éstos es un ingrediente esencial en la reconstrucción de cuasi-probabilidades, y de esta forma en la medición de estados cuánticos de la luz.

*Descriptores:* Función de Wigner; modelo de Jaynes y Cummings.

We show how the Wigner function may be measured for a quantum state of light. For this we show a form to displace fields inside cavities. Displacement of quantum fields is a key ingredient in quasiprobability reconstruction processes, *i.e.* the measurement of quantum states of light.

*Keywords:* Wigner function; Jaynes-Cummings model.

PACS: 42.50.-p; 42.50.Ct; 42.50.Dv

## 1. Introducción

En años recientes, la generación de estados no-clásicos en diferentes sistemas ha tenido un gran auge. Estados no clásicos se denominan aquellos estados que muestran menor incertidumbre en alguna variable que la del estado coherente, entre éstos se encuentran, por ejemplo, los estados comprimidos y los estados de Fock o de número. Ha habido un buen número de propuestas para la generación de este tipo de estados en cavidades electromagnéticas [1] y de estados vibracionales de iones atrapados [2]. Sin embargo, siempre queda la pregunta sobre si en realidad un estado tal ha sido realizado; esto por las características intrínsecas de la mecánica cuántica: la incertidumbre en lo que se mide y se produce. Es por esto que la medición del estado cuántico de un sistema es en general un tópico de gran interés. Las mediciones de los estados del campo electromagnético (EM) se hacen comúnmente mediante la reconstrucción de cuasi-probabilidades, tales como la función de Wigner [3, 4]. De hecho, campos electromagnéticos clásicos pueden ser medidos también mediante esta función [5]. En el caso cuántico, esta tarea es en verdad difícil, debido a que el estado cuántico del campo EM en cavidades debe ser producido un número incontable de veces para llenar el espacio fase [2, 6].

Existen básicamente dos formas de reconstruir la función de Wigner del campo electromagnético:

- tomografía cuántica; Leonhardt revisa este tema en profundidad en su libro *Measuring the quantum state of light* [3]. La tomografía cuántica se usa particularmente para campos que se propagan libremente.
- La reconstrucción basada en el desplazamiento de la matriz de densidad, para campos en cavidades [7] y para iones atrapados [8].

En este artículo presentamos mejoras a este tipo de reconstrucción, particularmente el desplazamiento de la matriz de

densidad en forma simultánea a la interacción del campo y un átomo de dos niveles [9, 10].

El desplazamiento mencionado arriba es debido a que el espacio fase debe ser llenado, y cada desplazamiento nos dará información de la función de Wigner en el punto correspondiente a la amplitud del mismo.

El desplazamiento del campo electromagnético es realizado, comúnmente, por medio de la inyección de un campo clásico, o en otras palabras, mediante la interacción del campo cuantizado de la cavidad y un campo clásico. Esta interacción se da antes de que el átomo pase por la cavidad. En esta contribución proponemos realizar el desplazamiento mediante la interacción de un campo clásico con el átomo que es usado para la medición del campo cuantizado.

## 2. Interacción de un átomo de dos niveles con un campo cuantizado y uno clásico

El hamiltoniano de interacción entre un campo cuantizado, uno clásico y un átomo de dos niveles tiene la forma (en unidades tal que  $\hbar = 1$ ) [11]

$$H = \omega(a^\dagger a + \sigma_z/2) + \lambda(a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a) + \epsilon e^{i\omega t} \sigma + \epsilon^* e^{-i\omega t} \sigma^\dagger \quad (1)$$

donde  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente. Consideramos los campos en resonancia con el átomo, con frecuencia  $\omega$ , las  $\sigma$ 's son los operadores atómicos usuales (matrices de espín de Pauli),  $\lambda$  es la constante de interacción entre el campo cuantizado y el átomo de dos niveles y  $\epsilon$  es la constante de interacción entre el átomo y el campo electromagnético clásico. Podemos pasar a un cuadro de interacción mediante la transformación

$$T = \exp[-i\omega t(a^\dagger a + \sigma_z/2)], \quad (2)$$

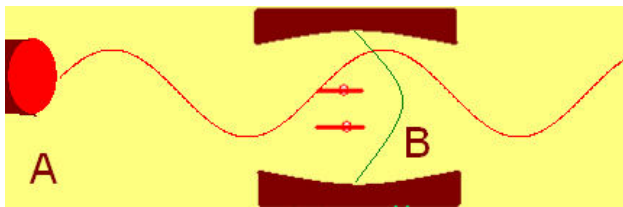


FIGURA 1. Configuración de la interacción de átomo con un campo cuantizado (B) y uno clásico (A).

obteniendo el hamiltoniano de interacción

$$H_I = \lambda(a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a) + \epsilon \sigma + \epsilon^* \sigma^\dagger = D^\dagger(\epsilon) \lambda(a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a) D(\epsilon), \tag{3}$$

donde  $D(\epsilon) = \exp(\epsilon a^\dagger - \epsilon^* a)$  es el operador de desplazamiento de Glauber [12]. Podemos escribir el operador de evolución como

$$U(t) = D^\dagger(\epsilon) e^{-i\lambda t(a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a)} D(\epsilon) \equiv D^\dagger(\epsilon) U_{JCM} D(\epsilon), \tag{4}$$

donde  $U_{JCM}$  es el operador de evolución para el modelo de Jaynes y Cummings (ver por ejemplo la Ref. 14). Si escribimos éste en la base atómica, esto es, en matrices de  $2 \times 2$ , éste queda como

$$U_{JCM}(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

con

$$\begin{aligned} U_{11}(t) &= \cos[\lambda t \sqrt{aa^\dagger}], \\ U_{12}(t) &= -i \sin[\lambda t \sqrt{aa^\dagger}] \frac{1}{\sqrt{aa^\dagger}} a, \\ U_{21}(t) &= -i a^\dagger \frac{1}{\sqrt{aa^\dagger}} \sin[\lambda t \sqrt{aa^\dagger}], \\ U_{22}(t) &= \cos[\lambda t \sqrt{a^\dagger a}]. \end{aligned} \tag{6}$$

Si suponemos que al tiempo  $t = 0$  el átomo y el campo están en estados puros, el estado inicial está dado por la matriz de densidad

$$\rho_{AF} = \rho_A \rho_F, \tag{7}$$

donde  $\rho_A$  y  $\rho_F$  son las matrices de densidad para el átomo y el campo, respectivamente. Si el átomo está en el estado excitado  $|e\rangle$  y el campo en un estado arbitrario (desconocido)  $|\psi_F^{(0)}\rangle$ , la matriz de densidad toma la forma

$$\rho_{AF} = |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| \times |e\rangle \langle e|, \tag{8}$$

que en la base de dos  $2 \times 2$  se escribe como

$$\rho_{AF} = \begin{pmatrix} |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Tenemos todos los ingredientes para calcular la evolución de la matriz de densidad dado el estado inicial (9), tomando en

cuenta el desplazamiento producido por el campo clásico, ésta se puede escribir en la forma

$$\rho_{AF}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{11} |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| \tilde{U}_{11}^\dagger & \tilde{U}_{11} |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| \tilde{U}_{21}^\dagger \\ \tilde{U}_{21} |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| \tilde{U}_{11}^\dagger & \tilde{U}_{21} |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| \tilde{U}_{21}^\dagger \end{pmatrix}, \tag{10}$$

con  $\tilde{U}_{ij} = D^\dagger(\epsilon) U_{ij} D(\epsilon)$ . Tomando la traza sobre la base del campo, obtenemos la matriz de densidad para el subsistema atómico

$$\rho_A(t) = Tr_F \{ \rho_{AF} \} = \begin{pmatrix} P_{ee} & P_{eb} \\ P_{be} & P_{bb} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Los elementos de matriz en la ecuación de arriba se obtienen de la siguiente manera:

$$\rho_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_{AF}(t) | n \rangle. \tag{12}$$

Tomando por ejemplo el elemento  $P_{eb}$ , obtenemos

$$P_{eb} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | D^\dagger(\epsilon) U_{11} D(\epsilon) | \psi_F^{(0)} \rangle \langle \psi_F^{(0)} | D^\dagger(\epsilon) U_{21}^\dagger D(\epsilon) | n \rangle, \tag{13}$$

dado que la ecuación de arriba es una traza, podemos aplicar la propiedad cíclica de ésta para obtener

$$P_{eb} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | U_{11} D(\epsilon) | \psi_F^{(0)} \rangle \langle \psi_F^{(0)} | D^\dagger(\epsilon) U_{21}^\dagger | n \rangle. \tag{14}$$

Los otros elementos de la matriz están dados a continuación:

$$\begin{aligned} P_{ee} &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | U_{11} D(\epsilon) | \psi_F^{(0)} \rangle \langle \psi_F^{(0)} | D^\dagger(\epsilon) U_{11} | n \rangle, \\ P_{be} &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | U_{21} D(\epsilon) | \psi_F^{(0)} \rangle \langle \psi_F^{(0)} | D^\dagger(\epsilon) U_{11} | n \rangle, \\ P_{bb} &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | U_{21} D(\epsilon) | \psi_F^{(0)} \rangle \langle \psi_F^{(0)} | D^\dagger(\epsilon) U_{21}^\dagger | n \rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

De esta forma la probabilidad de encontrar el átomo en estado excitado es simplemente,  $P_e(t) = P_{ee}$ :

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \langle n | \rho_F(\epsilon) | n \rangle, \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) \langle n | \rho_F(\epsilon) | n \rangle \end{aligned} \tag{16}$$

con

$$\rho_F(\epsilon) = D(\epsilon) |\psi_F^{(0)}\rangle \langle \psi_F^{(0)}| D^\dagger(\epsilon). \tag{17}$$

### 3. Medición de la función de Wigner

Ahora introducimos la función de Wigner como la herramienta que permitirá la medición de el estado cuántico. La función de Wigner se define como [13, 14]

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} Tr\{D(\beta)\rho\}d^2\beta, \quad (18)$$

y tiene también la forma en series [15]

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle n|D^\dagger(\alpha)\rho D(\alpha)|n\rangle, \quad (19)$$

con  $|n\rangle$  un eigenestado del operador de número,  $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$ . Esta función tiene una correspondencia uno-a-uno con la matriz de densidad (función de onda) y por lo tanto contiene toda la información del estado cuántico del sistema. Usaremos la forma (19) para *medir* el estado cuántico del campo electromagnético. Notamos que para obtener la función es necesario desplazar la matriz de densidad por una amplitud determinada, y lo vemos de las Ecs. (16) y (17) existe este ingrediente en la probabilidad de que el átomo sea detectado en el estado excitado. Existe una similitud ya entre las Ecs. (16) y (19). Vemos, por otro lado, que la integral de Fresnel [16, 17]

$$\frac{2}{\sqrt{i\pi}} \int_0^\infty e^{i\frac{\tau^2}{\pi}} \cos(2\tau\sqrt{n+1})d\tau = (-1)^{n+1} \quad (20)$$

produce un término proporcional a  $(-1)^n$ , de tal forma que es el último ingrediente que se necesitaba para obtener la función de Wigner. Por lo tanto, una vez medida la probabilidad de encontrar el átomo en estado excitado, a esta se le aplica una transformada de Frenel, obtenemos

$$\frac{2}{\sqrt{i\pi}} \int_0^\infty e^{i\frac{(\lambda t)^2}{\pi}} (2P_e(t) - 1)d(\lambda t) = W(-\epsilon), \quad (21)$$

es decir, la función de Wigner, y de esta forma completa información del sistema cuántico.

### 4. Conclusiones

Se ha mostrado que la interacción de un campo clásico con un átomo de dos niveles, el cual interactúa con un campo cuántico en una cavidad, permite el desplazamiento que se necesita para el llenado del espacio fase para la reconstrucción de la función de Wigner. De esta forma, el proceso de enredamiento de los niveles atómicos con los niveles del campo electromagnético cuantizado se llevan a cabo en forma simultánea al desplazamiento del campo que se quiere medir y no en la forma usual, la cual desplaza primero el campo cuantizado (mediante la inyección de un campo clásico en la cavidad, el cual nunca interactúa con el átomo), y después se realiza la interacción del campo EM cuantizado (ya desplazado) con el átomo (ver por ejemplo las Refs. 16 y 18).

---

1. H. Moya-Cessa, P.L. Knight y A. Rosenhouse-Dantsker, *Phys. Rev. A* **50** (1994) 1814.

2. H. Moya-Cessa y P. Tombesi, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 025401.

3. U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge University Press, New York, 1997).

4. H. Moya-Cessa, S.M. Dutra, J.A. Roversi y A. Vidiella-Barranco, *J. of Mod. Optics* **46** (1999) 555; H. Moya-Cessa, J.A. Roversi, S.M. Dutra y A. Vidiella-Barranco, *Phys. Rev. A* **60** (1999) 4029.

5. T. Alieva y M.J. Bastiaans, "Radon-Wigner transform for optical field analysis," Optics and Optoelectronics, Theory, Devices and Applications, Proc. ICOL'98, the International Conference on Optics and Optoelectronics, Dehradun, India, 9-12 December 1998, ISBN 81-7319-285-5, ed. O.P. Nijhawan; A.K. Gupta; A.K. Musla; Kehar Singh; Narosa Publishing House, New Delhi, India, 1998, pp. 132-135.

6. P. Lougovsky *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 010401.

7. L.G. Lutterbach y L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 547.

8. K.D. Leibfried, T. Pfau y C. Monroe, *Physics Today* **51** (1998) 22.

9. La interacción del campo cuantizado con el átomo de dos niveles permite el enredamiento de los estados de los dos sistemas, por lo que la manipulación de uno de ellos, por ejemplo el átomo, afecta al otro, es decir al campo EM. La medición del nivel de energí con el que el átomo sale de la cavidad nos permitirá conocer la función de Wigner en un punto del espacio fase.

10. El proceso que estamos analizando es una especie de espectroscopía pero a la inversa: en espectroscopía usualmente se pasa un campo EM del cual se tiene toda la información a través de una muestra para conocer la estructura cuántica de esta última. Mediante la manipulación de los resultados obtenidos de la luz que pasa por la muestra se puede finalmente determinar el tipo de átomos que forman la muestra. En nuestro caso debido a la cuantización del campo EM, éste posee una estructura cuántica que puede ser determinada por el procesamiento de la información que nos proporciona el átomo.

11. P. Alsing, D.-S. Guo, and H.J. Carmichael, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 5135.

12. R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.

13. E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.

14. H. Moya-Cessa, *Phys. Rep.* **432** (2006) 1.

15. H. Moya-Cessa y P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **48** (1993) 2479.

16. O. Crasser, H. Mack, and W.P. Schleich, *Fluctuation and Noise Letters* **4** (2004) L43.

17. I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, Inc., London, 1980).

18. R. Juárez-Amaro y H. Moya-Cessa, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 023802.