

Implementación electrónica de sistemas lineales en \mathbb{R}^2

I. Campos-Cantón, S. Tesheira y C. Jiménez-Calvillo

Facultad de Ciencias,

Universidad Autónoma de San Luis Potosí,

Alvaro Obregón 64, 78000, San Luis Potosí, SLP, México,

e-mail: icampos@galia.fc.uaslp.mx

E. Campos-Cantón

Departamento de Físico Matemáticas,

Universidad Autónoma de San Luis Potosí,

Alvaro Obregón 64, 78000, San Luis Potosí, SLP, México,

e-mail: ecamp@uaslp.mx

Recibido el 17 de septiembre de 2008; aceptado el 28 de noviembre de 2008

Este trabajo presenta la instrumentación electrónica de un sistema lineal de segundo orden. Se muestran los retratos de fase del sistema lineal, los cuales presentan el diagrama de un nodo, un foco y un centro en el origen. El desarrollo experimental es fácil y económico de realizar debido a que utiliza solamente elementos pasivos (resistencias, capacitores) y amplificadores operacionales.

Descriptores: Retrato de fase; electrónica analógica; ecuaciones diferenciales ordinarias.

A second order linear system suited for analog instrumentation is presented. Shown are the corresponding phase portrait nodes, a root focus and a central point. The experimental prototype is of easy implementation and of low cost as it is comprised only of passive elements (*i.e.* resistors, capacitors) and operational amplifiers.

Keywords: Phase portrait; analog electronic; ordinary differential equations.

PACS: 07.50.-e; 84.32.-y; 02.30.Hq

1. Introducción

El poder observar el comportamiento de los sistemas lineales bidimensionales autónomos, es decir sistemas del tipo $\dot{x}=Ax$ donde $x \in \mathbb{R}^2$ y A es una matriz real de 2×2 , es de gran utilidad en el entendimiento de la dinámica de los sistemas físicos (por ejemplo; electrónicos, mecánicos, etc.). Dichos sistemas son estudiados en forma teórica y experimental. Donde los diferentes retratos de fase se generan cambiando los valores propios de la matriz A , que proviene de la ecuación de estados que describe al sistema en estudio. Así se tienen cuatro casos diferentes dependiendo del comportamiento de los valores propios de la matriz A . El reto en este trabajo es implementar un circuito electrónico que permita obtener, a través de señales eléctricas, el comportamiento de tres diagramas de fase conocidos en la literatura [1] los cuales son: el nodo, el foco y el centro. Cabe destacar que en el estudio de los sistemas dinámicos; el análisis cualitativo, así como la parte experimental y de simulación del modelo son conceptos fundamentales para entender el comportamiento de los procesos que se estudian. El trabajo se organiza de la siguiente forma; en la Sec. 2 se presenta la teoría de los sistemas lineales bidimensionales, en la Sec. 3 se encuentra el modelo propuesto utilizado en la implementación electrónica para el estudio experimental de sistemas lineales bidimensionales. En la Sec. 4, se muestran los resultados experimentales y en la Sec. 5 se dan las conclusiones.

2. Sistemas lineales bidimensionales

Consideremos a un sistema lineal dado de la siguiente forma

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y A es una matriz real de 2×2 .

La descripción geométrica de las soluciones de (1) se pueden obtener si el $\det A \neq 0$. Y utilizando las técnicas algebraicas de diagonalización de una matriz cuadrada, se reduce el sistema (1) a un sistema lineal desacoplado

$$\dot{y} = By, \quad (2)$$

donde $B = P^{-1}AP$ y $x = Py$.

Así, el retrato de fase del sistema dado por (1) es equivalente al retrato de fase de (2). Donde la matriz B tiene una de las siguientes formas

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ó} \\ B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Recordando el teorema fundamental para sistemas lineales:

Teorema: Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces para una $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema del valor inicial de (1) con $x(0)=x_0$

tiene solución única dada por $x(t)=e^{At}x_0$. Donde e^{At} es una función de matrices de $n \times n$ definida por su serie de Taylor.

Debido a que es posible calcular la matriz exponencial de 2×2 , se obtiene explícitamente la solución a cualquier sistema dado por (1) y se extrae información cualitativa. En esta sección daremos un repaso breve a los sistemas lineales, se pueden consultar las Refs. 1, 2 y 3 para profundizar sobre el tema.

Definición: El sistema lineal dado por (1) puede presentar uno de los siguientes casos: punto de ensilladura, nodo, foco o centro en el origen, si la matriz A es similar a una de las matrices de B dada por (3), el retrato de fase para cada caso es mostrado en la Fig. 1.

Considere al sistema lineal dado por (1), con $\det A \neq 0$. En este caso, el origen es el único punto de equilibrio del sistema lineal. El resultado que a continuación se menciona propone un método para determinar cuando un sistema lineal tiene un retrato de fase tipo ensilladura, nodo, foco o centro en el origen. Esto se obtiene a partir del análisis de los valores propios de la matriz A , que se encuentran resolviendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - (\text{traza}A)\lambda + \det A = 0$$

Teorema Sea $\delta = \det A$ y $\tau = \text{traza}A$. Considere el sistema lineal (1)

a.- si $\delta < 0$, entonces (1) tiene un punto de ensilladura en el origen.

b.- si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, entonces (1) tiene un nodo en el origen; es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.

c.- si $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$, entonces (1) tiene un foco en el origen; y es estable si $\tau < 0$ o inestable si $\tau > 0$.

d.- si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces (1) tiene un centro en el origen.

Los resultados del teorema anterior se ilustran en la Fig. 1.

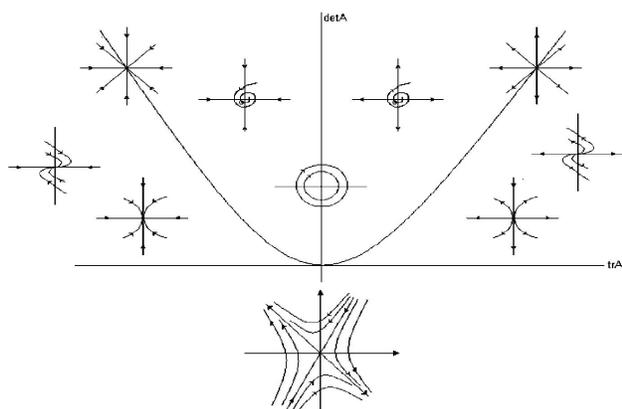


FIGURA 1. Ilustración del teorema.

3. Diagrama electrónico

El circuito propuesto se muestra en la Fig. 2, el cual consiste de cinco amplificadores operacionales (U_1 a U_5), dos capacitores (C_1 y C_2) y diez resistencias (R_1 a R_{10}). Utilizando las relaciones voltaje corriente y las leyes de Kirchoff se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$a = -\frac{R_2}{R_1}V_i; \quad b = -\frac{R_6}{R_3}a - \frac{R_6}{R_4}V_0 - \frac{R_6}{R_5}d;$$

$$c = -\frac{1}{R_7C_1} \int bdt \quad d = -\frac{R_{10}}{R_9}c; \quad (4)$$

$$V_0 = -\frac{1}{R_8C_2} \int cdt, \quad (5)$$

sustituyendo las variables de las Ecs. (4) y (5) se tiene que el voltaje de salida en función del voltaje de entrada cumple con la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{V}_o + \frac{R_6R_{10}}{R_5R_7R_9C_1}\dot{V}_o + \frac{R_6}{R_4R_7R_8C_1C_2}V_o = \frac{R_2R_6}{R_1R_3R_7R_8C_1C_2}V_i, \quad (6)$$

considerando a $R_1 = R_4$ y bajo los siguientes cambios de variables

$$x = V_o, \quad f(t) = \frac{R_2}{R_3}V_i,$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{R_6R_{10}}{R_5R_7R_9C_1}, \quad (7)$$

$$\omega_n^2 = \frac{R_6}{R_4R_7R_8C_1C_2}. \quad (8)$$

Se encuentra que la Ec. (6) representa a la Ec. (9) que es la ecuación general de segundo orden

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2f(t). \quad (9)$$

Escribiendo la Ec. (9) en forma matricial y asumiendo que $x_1=x$ y $\dot{x}_1=x_2$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} f(t). \quad (10)$$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, \quad (11)$$

así su determinante es $\delta = \omega_n^2$ y la traza $\tau = -2\zeta\omega_n$. También es importante notar que $\tau^2 - 4\delta = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$. Finalmente los valores propios son:

$$\lambda = \omega_n(-\zeta \pm (\zeta^2 - 1)^{1/2}). \quad (12)$$

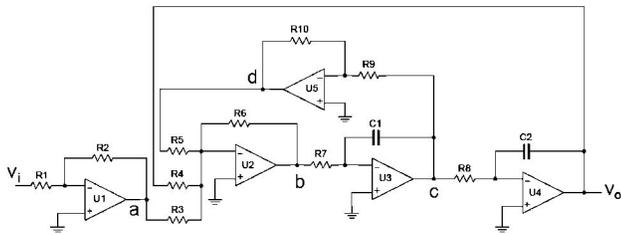


FIGURA 2. Circuito electrónico utilizado en el estudio de sistemas lineales de segundo orden.

4. Resultados experimentales

Si fijamos los valores de las resistencias $R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9$ y de los capacitores C_1, C_2 a $1\text{ k}\Omega$ y $1\ \mu\text{F}$ respectivamente, entonces ω_n toma el valor de

$$\omega_n^2 = 1\text{ M}, \quad \omega_n = 1\text{ k}. \tag{13}$$

Y el valor de ζ queda en función de R_{10} siendo este el elemento que afecta directamente la retroalimentación.

$$\zeta = \frac{R_{10}}{2\text{ k}\Omega}. \tag{14}$$

Así al cambiar el valor de la resistencia R_{10} se obtiene el diagrama de fase de un nodo, un foco y un centro. Bajo los parámetros anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} \delta &= \omega_n^2 = 1\text{ M}, \\ \tau &= -2\zeta\omega_n = -R_{10}, \\ \tau^2 - 4\delta &= R_{10}^2 - 4\text{ M}, \end{aligned} \tag{15}$$

y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1\text{ M} & -R_{10} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Para los amplificadores operacionales U_{1-5} se utiliza el TL081. Como entrada se utiliza una señal escalón con una amplitud de 1 V , para obtener los diferentes tipos de respuestas. Con los valores mencionados anteriormente para las resistencias, capacitancias, amplificadores operacionales, señal de entrada y despreciando las reactancias parásitas, el ancho de banda finito de los componentes activos y otros fenómenos no modelados, se encuentra que las respuestas del circuito propuesto son las esperadas.

Las figuras muestran una colección experimental de un conjunto de 2500 datos cada una. El diseño se implementó sobre una tarjeta de circuito impreso diseñada con el programa Eagle. Se utilizan $\pm 15\text{ V}$ para alimentar los amplificadores operacionales utilizando una fuente de voltaje variable y de corriente directa modelo Tektronix $PS280$ con un rango de salida de 0 a 15 V . Se observa el comportamiento de los datos arrojados por el circuito en un osciloscopio Tektronix $TDS2012$.

4.1. NODO si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$

4.1.1. Nodo $\lambda = \mu$

De la Ec. (12) se observa que para tener raíces iguales necesitamos $\zeta=1$, por tanto debemos tomar el valor de $R_{10}=2\text{ k}\Omega$ con esto se tiene que los valores propios son iguales $\lambda=\mu$ y se cumplen las condiciones

$$\delta = 1\text{ M} > 0, \quad \tau^2 - 4\delta = 4\text{ M} - 4\text{ M} \geq 0,$$

la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1\text{ M} & -2\text{ k} \end{bmatrix}.$$

Utilizando el *software* MatLab se encuentra la matriz de transformación P formada por los vectores propios, P^{-1} y B .

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 0.001 & -0.001 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ P^{-1} &= 1 \times 10^{10} \begin{bmatrix} 4.6887 & 0.0047 \\ 4.6887 & 0.0047 \end{bmatrix}, \\ B &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1\text{ k} & 0 \\ 0 & -1\text{ k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En la Fig. 3 se muestra el diagrama de fase experimental del sistema. Para obtener la gráfica mostrada en la figura es necesario que, por cada cuadrante se realice un experimento (en este caso son cuatro). Los datos de cada experimento son almacenados en un vector de 2×10000 , y se utiliza el *software* MatLab. Este mismo procedimiento se lleva a cabo en todos los demás resultados experimentales.

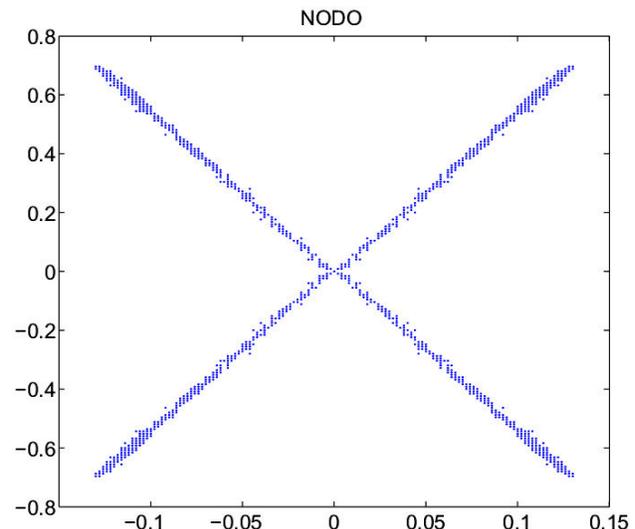


FIGURA 3. Nodo en el origen cuando $\lambda = \mu$.

4.1.2. **Nodo** $\lambda < \mu$

Si $R_{10} = 3 \text{ k}\Omega$ se encuentra que $\zeta = 1.5$ y por la Ec. (12) se tienen raíces distintas de -0.3819 k y -2.618 k . Así $\lambda < \mu < 0$ y se cumplen las condiciones

$$\delta = 1 \text{ M} > 0, \quad \tau^2 - 4\delta = 9 \text{ M} - 4 \text{ M} = 5 \text{ M} > 0,$$

la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 \text{ M} & -3 \text{ k} \end{bmatrix}$$

y las matrices de transformación P, P^{-1}, B son:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0026 & -0.0004 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 447.2151 & 0.1708 \\ 447.2136 & 1.1708 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -382 & 0 \\ 0 & -2.618 \text{ k} \end{bmatrix}.$$

En la Fig. 4 se muestra diagrama de fase experimental del sistema.

5. **FOCO** si $\delta > 0, \tau^2 - 4\delta \geq 0$ y $\tau \neq 0$

Si $R_{10} = 1 \text{ k}\Omega$ se encuentra que $\zeta = 0.5$ y las raíces son complejas $-500 \pm 866.0254i$. Donde las condiciones son:

$$\delta = 1 \text{ M} > 0,$$

$$\tau^2 - 4\delta = 1 \text{ M} - 4 \text{ M} = -3 \text{ M} < 0,$$

$$\tau = -1 \text{ k} \neq 0,$$

la matriz A es:

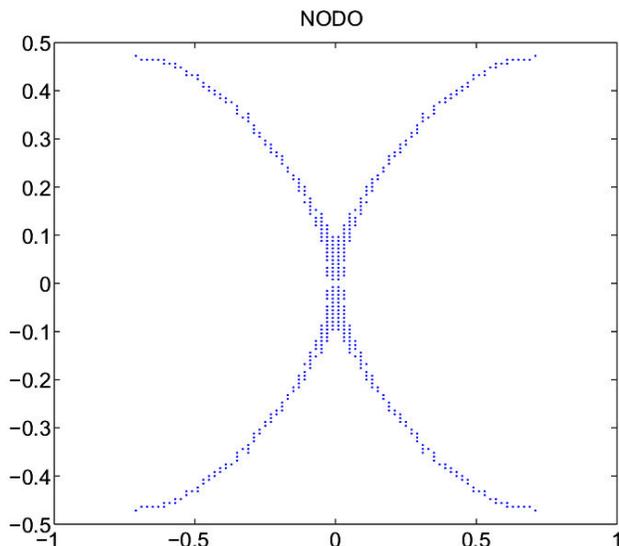


FIGURA 4. Nodo en el origen cuando $\lambda < \mu$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 \text{ M} & -1 \text{ k} \end{bmatrix},$$

y las matrices de transformación P, P^{-1}, B son:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 866.0254 & -500 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.0012 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -500 & -866.0254 \\ 866.0254 & -500 \end{bmatrix}.$$

En la Fig. 5 se muestra el diagrama fase experimental del sistema.

6. **CENTRO** si $\delta > 0$ y $\tau = 0$

Para generar un centro con el circuito propuesto es necesario tener el valor de $R_5 = \infty$, en este caso sustituimos R_5 por un circuito abierto. Con ello se tiene que (7) tiende a 0 y la Ec. 9 se aproxima a:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 f(t), \tag{17}$$

ó en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} f(t), \tag{18}$$

y ajustando experimentalmente $R_8 = 22 \Omega$. Utilizando los valores mencionados anteriormente se encuentra:

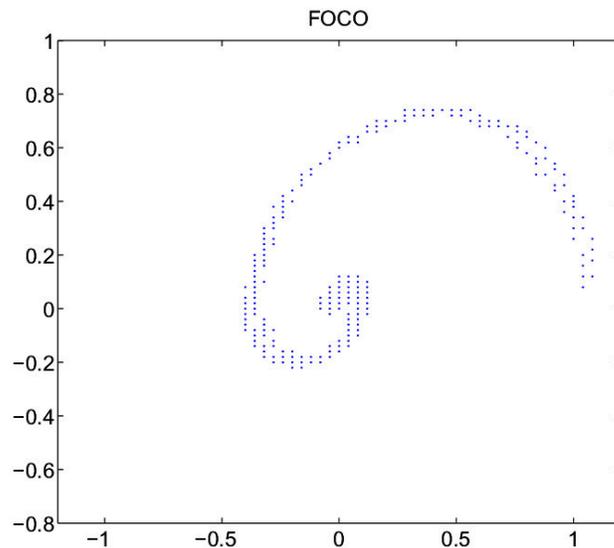


FIGURA 5. Foco en el origen cuando las raíces son complejas.

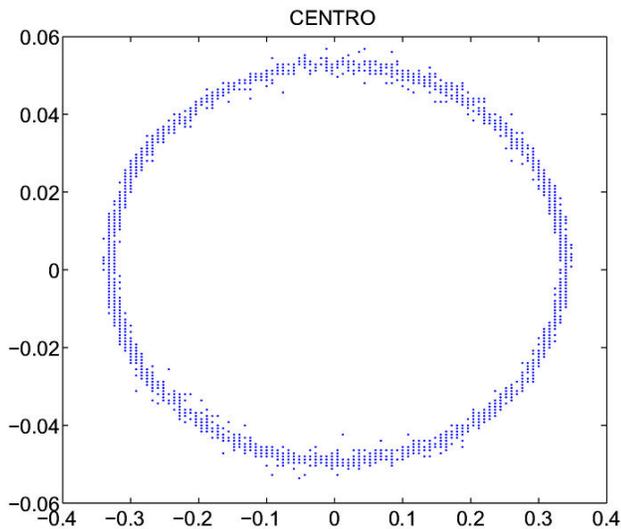


FIGURA 6. Centro en el origen.

$$\zeta = 0,$$

y por la Ec. (12) se tienen raíces complejas de $\pm 6.74 ki$. Así las condiciones son:

$$\delta = 45 M > 0, \quad \tau = 0,$$

la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -45 M & 0 \end{bmatrix},$$

y las matrices de transformación P, P^{-1}, B son:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 3.3541 k & 0 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 300 M \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -6.7082 k \\ 6.7082 k & 0 \end{bmatrix}.$$

En la Fig. 6 se muestra el diagrama fase experimental del sistema.

7. Conclusiones

Se diseñó un circuito electrónico con amplificadores operacionales, resistencias y capacitancias. El circuito es fácil de implementar y da la posibilidad de que al realizar cambios en la resistencia R_{10} se modifique directamente el diagrama de fase para obtener un nodo o un foco. El diagrama de fase del centro se realiza abriendo el circuito a través de R_5 y tomando a $R_8=22 \Omega$, esta última resistencia se ajusta de forma experimental para poder observarlo. Como se muestran en las Figs. 3 a 6 respectivamente. Con ello cubrimos la dinámica lineal de los sistemas en \mathbb{R}^2 . El diagrama de fase de un punto de ensilladura no es posible obtenerlo con un simple cambio de resistencias. Por lo tanto, en el presente trabajo, se desarrolló un módulo experimental de fácil realización, a través de la creación de un circuito electrónico que modele esos comportamientos, bajo la modificación correspondiente en el circuito de los parámetros ζ y ω_n asociados a la ecuación estándar de segundo orden. Como trabajo futuro está la creación del circuito electrónico que genere el diagrama de fase de la diagrama de fase de un punto de encilladura.

1. L. Perko, *Differential Equations and Dinamical Systems* (Springer-Verlag, 1991).
 2. M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equation, Dinamical Systems, and Linear Algebra* (Academic Press, 1974).
 3. D.G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado* (Thomson, 2007).
 4. M.E. Van Valkenburg, *Network analysis* N.J. Englewood Cliffs (Prentice Hall, 1964)