

Formación de burbujas en líquidos viscosos contenidos en conos y cilindros

A. Ortiz

*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
Circuito Interior Ciudad Universitaria, Coyoacan, D.F. 04510, México D.F., México.*

A. López-Villa

*Coordinación del Posgrado, Instituto Mexicano del Petróleo,
Eje Central Lázaro Cárdenas No. 152, Col. Atepehuacan, 07730, México D.F., Mexico.*

A. Medina

*ESIME Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional,
Av. de las Granjas No. 682, Col. Sta. Catarina 02550, México D.F., México.*

F.J. Higuera

*ETSI Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid,
Plaza Cardenal Cisneros 3, 28040, Madrid, España*

Recibido el 15 de enero de 2009; aceptado el 14 de mayo de 2009

En este trabajo consideramos el problema del crecimiento y despegue de burbujas de gas en recipientes llenados con líquidos viscosos y con paredes muy cercanas al orificio de inyección del gas, de manera que las paredes afectan a la forma y el volumen de máximo crecimiento de la burbuja. Usando las ecuaciones de Stokes para flujo viscoso lento, tratamos dos casos axilimétricos de interés: a) el caso donde las paredes forman un cono vertical invertido, y b) el caso de una pared cilíndrica vertical concéntrica con el orificio de inyección. En ambos casos las ecuaciones de flujo fueron resueltas numéricamente con el método de los elementos de contorno, y los resultados se expresaron en términos de las formas de las burbujas, sus volúmenes máximos y otras propiedades de interés para diferentes valores del número de Bond y del número capilar. Presentamos una comparación cualitativa con las formas de las burbujas experimentales, obtenidas a caudales de gas constantes, en los sistemas aire-glicerina y aire-aceite de silicón. Dicha comparación permite concluir que las soluciones numéricas describen muy bien este fenómeno. Nuestros resultados muestran también que la posibilidad de actuar sobre el ángulo del cono o el radio del cilindro proporciona un método eficaz de controlar la forma y tamaño de las burbujas generadas.

Descriptores: Formación de burbujas; método de elemento frontera; flujos de gas y líquido.

In this work we consider the problem of growth and detachment of gas bubbles in reservoirs filled with viscous liquids whose walls are very close to the gas injection orifice, in such a manner that the walls affects the bubble shape and its maximum volume of growing. Using the Stokes equations for slow viscous flow, we have studied two cases of interest: a) the case where the walls make a vertical inverted cone, and b) the case of a cylindrical wall concentric to the injection orifice. In both cases the fluid flow equations were solved numerically by using the Boundary Element Method (BEM), and the results are given in terms of the bubble shapes, their maximum volumes and other properties of interest for different values of the Bond and Capillary numbers. We present a qualitative comparison with the experimental bubbles obtained at constant gas flow rates, in the air-glycerin and air-silicone oil systems. This comparison allows us to conclude that the numerical solutions describe very well this phenomenon. Our results also show that possibility of change of the cone angle or the cylinder radius yields an efficient method to control the shape and size of the produced bubbles.

Keywords: Bubble formation; boundary element methods; gas/liquid flows.

PACS: 47.55.db; 47.11.Hj; 47.55.Ca

1. Introducción

El proceso de crecimiento y despegue de burbujas por inyección de gas dentro de un líquido en reposo ha sido muy estudiado en el caso de líquidos con efectos viscosos despreciables [1–8]. Los resultados de esta aproximación para la formación de burbujas son de utilidad en industrias como la metalúrgica o en reactores químicos, donde a menudo se tienen sistemas que involucran líquidos poco viscosos, tales como metales líquidos y soluciones acuosas. En ambos casos se utilizan las burbujas para cambiar la concentración de especies, o para limpiar las impurezas, capturándolas por medio de procesos de adhesión, difusión, o ambos [2].

En el caso de los líquidos muy viscosos, la presencia de burbujas comúnmente ocurre, por ejemplo, en procesos con polímeros en su fase líquida, en los flujos de lava y, para el caso de recuperación de petróleo, en las tuberías de producción de crudo. Este último caso es el que más nos interesa y motiva, ya que la técnica de bombeo neumático (inyección de gas al seno de la tubería) involucra la formación y manejo de burbujas en espacios confinados y con una estrecha posibilidad de cambio del flujo de gas inyectado hacia el aceite crudo [9]. A menudo el caudal de gas inyectado es casi constante. En general, el estudio a nivel fundamental de las burbujas en líquidos viscosos en sistemas semi-infinitos (en ausencia de paredes) está muy avanzado [10–15], pero el pro-

ceso de formación y movimiento en sistemas confinados ha recibido menos atención [16–19].

Todos los líquidos son viscosos en menor o mayor grado. Esto significa que la aproximación no viscosa deja de lado aspectos importantes del proceso de formación y movimiento de las burbujas, tales como el arrastre viscoso [14] y los esfuerzos cortantes, sobre todo en la proximidad de las paredes [16, 18, 19]. En muchos trabajos sobre la formación de burbujas en líquidos viscosos se establece que la generación de burbujas grandes requiere incrementar el valor del número capilar Ca (en esencia, el caudal de inyección de gas) y/o disminuir el número de Bond, Bo (cociente de las fuerzas de flotación a las de tensión superficial) [14–16]. Hay una correlación entre el volumen máximo adimensional alcanzado por una burbuja, V_{0f} , y los números capilar y de Bond, de la forma $V_{0f} \sim (Ca/Bo)^{3/4}$, que es válida cuando el cociente Ca/Bo es grande [14–16].

En este trabajo demostraremos que la forma del recipiente que contiene al líquido, o equivalentemente, la presencia de algún elemento como una boquilla donde crece la burbuja provoca una deformación sustancial de éstas respecto a la forma esférica y afecta al volumen máximo de despegue, V_{0f} . Hasta donde sabemos, ésta es la primera vez que se presenta en detalle un mecanismo de crecimiento de burbujas en función de un simple cambio en la geometría del contenedor o de la boquilla de inyección del gas.

Una manera en la que la influencia de las paredes puede irse intensificando gradualmente es considerar que el líquido se encuentra en un recipiente cuyo fondo inicialmente plano se inclina simétricamente respecto al orificio de inyección del gas. De forma práctica esta inclinación puede corresponder a tener un recipiente cónico cuya pared está inclinada un ángulo α respecto a la horizontal, o bien, que la boquilla de inyección sea un cono vertical de semiángulo $\pi/2 - \alpha$ (ver Fig. 1).

Una situación límite de este caso se da cuando $\alpha = 0^\circ$, es decir, el caso típico de un medio semi infinito en el que las

paredes del recipiente no están presentes, aunque sí el fondo, que es de donde emerge el gas que forma a la burbuja. Este último caso está bien estudiado y será la referencia con la que compararemos todos nuestros resultados [14–16].

Otro caso de interés y en el que también se puede apreciar, de manera gradual, la influencia de las paredes sobre el crecimiento de las burbujas ocurre cuando la burbuja crece axilsimétricamente dentro de un cilindro de radio R inicialmente grande (sistemas semi infinitos) y que se va reduciendo hasta alcanzar valores pequeños y cercanos al radio del tubo de inyección a (i.e., $R/a \rightarrow 1$) (ver Fig. 2). En relación con los conos, este caso corresponde formalmente a tener contenedores cónicos con $\alpha = 90^\circ$.

En este trabajo asumimos la presencia de un líquido muy viscoso y que el gas, inyectado a un caudal constante Q , es no viscoso. Esto lleva a valores muy bajos del número de Reynolds [14, 15]. Así, en el modelado de la formación de las burbujas utilizaremos las ecuaciones de Stokes, válidas para flujos de fluidos viscosos y lentos. Las ecuaciones de Stokes y de continuidad se resuelven numéricamente utilizando el método de los elementos de contorno. Posteriormente, los campos de velocidades y de presión que resultan de la solución numérica se incorporan a la ecuación de la superficie libre, llevando a la evolución temporal de la superficie de la burbuja bajo la presencia de paredes muy cercanas al tubo de inyección del gas. Los resultados pueden ser expresados en función de los números capilar, Ca , y el número de Bond, Bo . El número capilar es una medida de la competencia entre las fuerzas viscosas, originadas por la entrada de aire al seno del líquido y las fuerzas de tensión superficial que mantienen unida a la burbuja a la boca del tubo de inyección de aire. Por otro lado, el número de Bond es una medida de la intensidad de las fuerzas de flotación respecto a las de tensión superficial. Al expresar las soluciones en términos de estos dos parámetros es posible tener una amplia variedad de condiciones físicas bajo las cuales crecen las burbujas. A partir

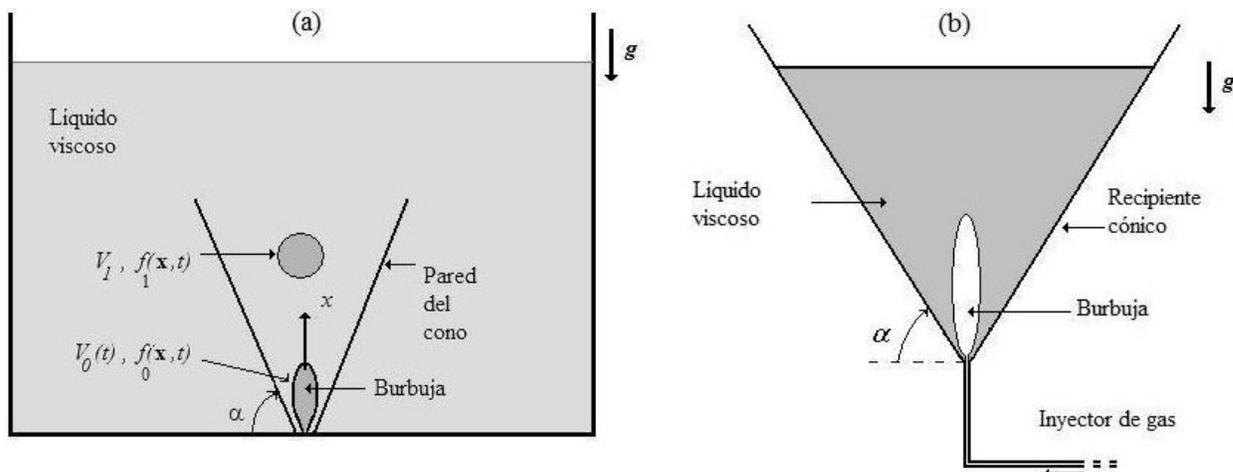


FIGURA 1. Formación de una burbuja en: a) un recipiente en donde el tubo de inyección de aire tiene una boquilla cónica que se inserta eje simétricamente al tubo de inyección, b) un recipiente cónico que contiene al líquido viscoso. Para todo fin práctico ambas situaciones son idénticas en términos de la fenomenología del crecimiento.

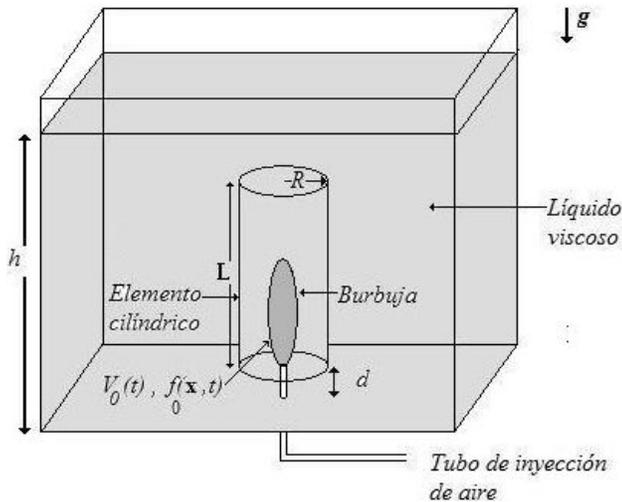


FIGURA 2. Formación de burbujas dentro de cilindros de radio R y altura L . El recipiente que contiene al líquido viscoso tiene altura $h > L$ y la base del cilindro está a una altura d sobre la base del recipiente.

de esto es posible dar una clara idea de cómo las paredes, las fuerzas viscosas, las fuerzas capilares y las fuerzas de flotación afectan el proceso de crecimiento de una burbuja.

La estructura del artículo es como sigue. En la siguiente sección formulamos el problema en términos de las ecuaciones adimensionales para el movimiento del líquido y las condiciones adimensionales de frontera para la evolución de la superficie libre. En la Sec. 3 presentamos los principales resultados obtenidos de la solución numérica de este problema, discutiendo la evolución de la superficie libre durante el crecimiento de la burbuja a caudal de gas constante, en recipientes cónicos y cilíndricos. En la Sec. 4 discutimos algunos experimentos realizados para dar validez a los resultados numéricos. Finalmente, en la Sec. 5 resumimos las principales conclusiones y limitaciones de este trabajo.

2. Ecuaciones para la formación de burbujas en líquidos viscosos

Formulamos en esta sección las ecuaciones de conservación de masa y de momento, así como las condiciones de contorno en la superficie de la burbuja y en las paredes del cono o tubo colocados simétricamente alrededor del orificio por el que se inyecta el gas. Consideramos el caso más simple en el cual se inyecta un gas incompresible, de densidad y viscosidad despreciables, a un caudal constante, Q , en el seno de un líquido incompresible, inicialmente quieto, de densidad ρ y viscosidad μ .

La inyección del gas puede ocurrir a través de un tubo capilar circular de radio interior a y grosor de pared b' , localizado en el fondo del recipiente cónico o cilíndrico. Escribimos la ecuación de la superficie de la i -ésima burbuja en la forma $f_i(\mathbf{x}, t) = 0$, con $f_i > 0$ en el líquido (ver Figs. 1 y 2). Admitimos que el efecto de la inercia del líquido es despreciable en el movimiento provocado por la entrada del

aire; es decir, que el número de Reynolds, $Re = \rho Q / \mu a$ es pequeño [14, 15, 19]. En la Sec. 4 mostramos que esta condición es fácil de satisfacer experimentalmente para líquidos muy viscosos. Bajo estas condiciones, el flujo inducido en el líquido por el crecimiento de la burbuja desde el orificio de entrada del gas y por las burbujas que ya despegaron, obedece las ecuaciones de continuidad y de Stokes, cuyas formas adimensionales son, respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} - Bo \mathbf{i}, \quad (2)$$

donde p es la presión, \mathbf{v} es el campo de velocidades, \mathbf{i} es el vector unitario apuntando en la dirección vertical (x es la coordenada vertical) y Bo es el número de Bond dado por

$$Bo = \frac{\rho g a^2}{\sigma}, \quad (3)$$

donde σ es la tensión superficial y g es la aceleración de la gravedad.

En las ecuaciones anteriores y en las subsecuentes hemos escalado las coordenadas espaciales con el radio interior del tubo, a , y el tiempo, con el tiempo viscoso $t_v = \sigma / \mu a$. Las Ecs. (1) y (2) deben resolverse con las condiciones de contorno

$$\frac{Df_i}{Dt} = 0, \quad (4)$$

$$-p\mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{n}_i = (\nabla \cdot \mathbf{n}_i - p_{g_i})\mathbf{n}_i. \quad (5)$$

en las superficies de las burbujas y

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (6)$$

en las superficies sólidas adyacentes y en el infinito, ya que el líquido ahí no se mueve. Además, la presión lejos de la burbuja debe satisfacer

$$p + Bo x = cte. \quad (7)$$

La Ec. (4) establece que la superficie de cada burbuja es una superficie fluida [20] y la Ec. (5) especifica el balance de los esfuerzos que actúan sobre la superficie de la burbuja.

La cantidad $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ en (4) es la derivada material en los puntos de la superficie de las burbujas; $\mathbf{n}_i = \nabla f_i / |\nabla f_i|$ es un vector unitario normal a la superficie f_i ; $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos, dado por la ley de Navier-Poisson [20]; y p_{g_i} es la presión adimensional del gas en la i -ésima burbuja. Esta presión se determina por las condiciones dinámicas sobre las burbujas y sus volúmenes después de despegar, V_i (con $i = 1, 2, 3, \dots$), los cuales no cambian con el tiempo. Finalmente, asumimos que el caudal adimensional que forma a la burbuja inicial, de volumen V_0 y que está creciendo desde el orificio de entrada del gas, es $dV_0/dt = Ca = cte$; es decir, el caudal adimensional del gas que forma a la burbuja es exactamente el número capilar, dado por

$$Ca = \frac{\mu Q}{\sigma a^2}. \quad (8)$$

Recordamos que este parámetro puede entenderse también como una medida de las fuerzas viscosas respecto a las de tensión superficial.

Otro parámetro que influye en el crecimiento de las burbujas en líquidos viscosos y no viscosos es el ángulo de contacto θ [7, 8, 15]. Si $\theta < 90^\circ$, el volumen máximo de la burbuja, previo al despegue, no depende de dicha cantidad, pero si $\theta > 90^\circ$ dicho volumen puede incrementarse varias veces respecto al volumen de las burbujas formadas en sistemas con buen mojado ($\theta < 90^\circ$). Por simplicidad, en nuestros cálculos hemos asumido que $\theta = 45^\circ$; es decir, un buen mojado.

En la siguiente sección resolveremos numéricamente el problema aquí planteado y demostraremos que el volumen máximo y la forma de las burbujas son fuertemente dependientes del ángulo de pared del cono y de los números Ca y Bo . Algo similar ocurrirá para las burbujas formadas dentro de cilindros de radio cercano al del orificio de inyección.

3. Solución numérica

Buscamos soluciones axilimétricas de las Ecs. (1)–(2) con las condiciones de contorno (4)–(7). Utilizamos el método de los elementos de contorno (BEM por sus siglas en inglés [21–23]), para resolver las Ecs. (1)–(2) y un método de Runge-Kutta de segundo orden para calcular la evolución de

las superficies libres, f_i . Las pruebas realizadas con diferentes números de nodos mostraron que una interpolación de 120 nodos en la superficie de la burbuja antes de despegar y 60 nodos para las superficies de las burbujas que ya despegaron proporciona suficiente resolución.

El método de los elementos de contorno usa la linealidad de la ecuación de Stokes para superponer los campos de flujo generados por fuerzas puntuales distribuidas sobre las superficies de las burbujas. La distribución es inicialmente desconocida y se determina imponiendo las condiciones de contorno sobre los campos de flujos resultantes. Ya que las incógnitas y las condiciones necesarias para resolverlas se localizan sobre la frontera, la dimensión del problema se reduce en uno, que es una característica distintiva de la formulación de la integral de frontera. Además, la acción de las fuerzas puntuales se anula en infinito. Una vez que se determina la velocidad del fluido sobre la superficie de la burbuja, la superficie evoluciona de acuerdo a la condición cinemática (4). De esta manera se determina la superficie de la burbuja, la cual es otra incógnita, y nuevamente se deja que la burbuja evolucione. El énfasis de esta formulación sobre el cálculo de la superficie libre hace de este método una herramienta ideal para problemas con fronteras deformables o irregulares, como el caso aquí considerado.

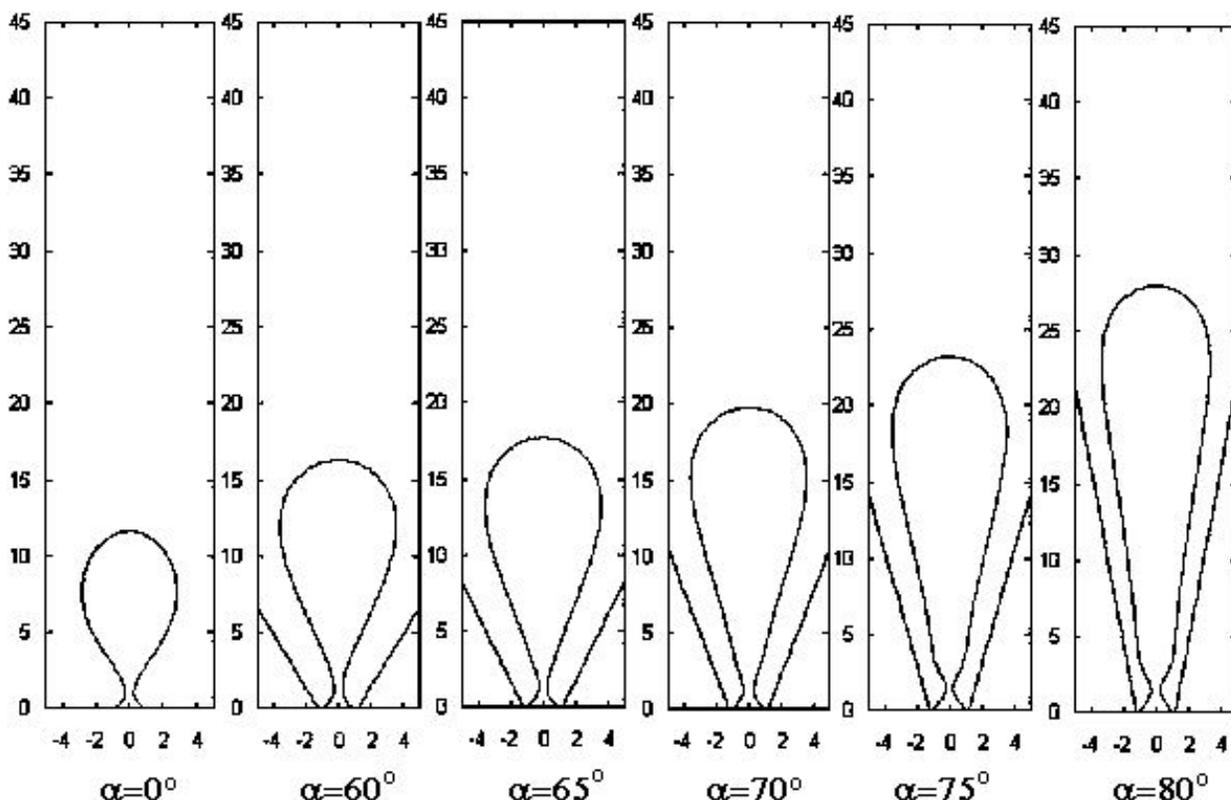


FIGURA 3. Perfiles bidimensionales de las burbujas a su volumen crítico (máximo volumen alcanzado por la burbuja antes del despegue) para distintos valores del ángulo α . En este caso las burbujas crecen a caudal constante. Los cálculos fueron hechos para $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

3.1. Recipientes cónicos

Mostraremos en primer lugar que la orientación del fondo tiene un efecto muy importante sobre el crecimiento de la burbuja, aunque cualitativamente se aprecia que los cambios son mayores a partir de $\alpha = 60^\circ$. En la Fig. 3 mostramos los perfiles de las burbujas en el momento del despegue, cuando alcanzan su máximo volumen, V_{0f} (también llamado volumen crítico, volumen máximo o volumen de despegue) para diferentes valores de α . En dicha figura los valores del número capilar y del número de Bond son $Ca=10$ y $Bo=0.2$, respectivamente.

En el primer perfil de la Fig. 3 se muestra una burbuja que crece en un medio semi infinito ($\alpha = 0$, correspondiente a un fondo plano horizontal). El resto de los perfiles corresponden a fondos cónicos con $\alpha = 60, 65, 70, 75$ y 80° . Nótese que hay un aumento sustancial del volumen crítico a medida que α crece.

En la Fig. 4 mostramos el volumen adimensional crítico V_{0f} en función de α , para tres parejas de valores de Ca y Bo : $Ca=10$ y $Bo=0.2$; $Ca=10$ y $Bo=2$, $Ca=20$; y $Bo=2$. En todos estos casos las fuerzas viscosas son dominantes sobre las de tensión superficial (Ca grande), mientras que la intensidad de la fuerza de flotación es en unos casos grande ($Bo=2$) y en otro caso pequeña ($Bo=0.2$) frente a las fuerzas capilares, al menos mientras el tamaño de la burbuja es de orden a . La curva correspondiente a $Bo=0.2$ y $Ca=10$ ($Ca/Bo=50$) muestra que las intensas fuerzas capilares producen volúmenes críticos y deformaciones grandes comparados con los de los casos en los que la gravedad domina desde el comienzo del proceso ($Bo > 1$). Ya que los cambios más intensos en el volumen se presentan para $Ca=10$ y $Bo=0.2$, muchos de los resultados que siguen se darán para ese caso.

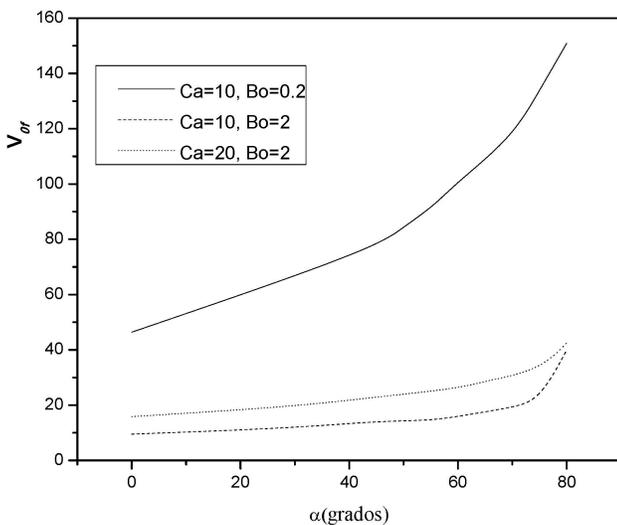


FIGURA 4. Gráfica adimensional del volumen crítico de la burbuja en función α . Se muestran los casos para $Ca=10$, $Bo=0.2$ (línea continua); $Ca=10$ y $Bo=2$ (guion largo) y $Ca=20$ y $Bo=2$ (guion corto).

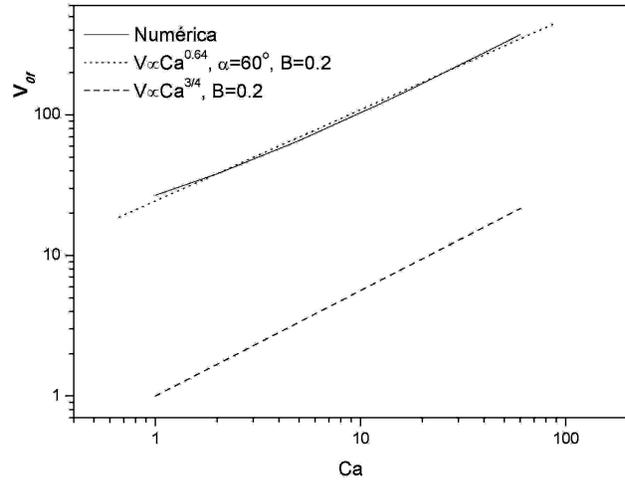


FIGURA 5. Gráfica log-log del volumen adimensional V_{0f}/a^3 en función del número capilar, Ca . En este caso $\alpha = 60^\circ$, $Bo=0.2$ y el mejor ajuste a los datos teóricos lo da la relación $V_{0f}/a^3 \sim Ca^{0.64}$. Se muestra también la curva $V_{0f}/a^3 \sim Ca^{3/4}$, la cual corresponde al crecimiento de burbujas en medios semi infinitos en donde formalmente $\alpha = 0^\circ$ (---).

La Fig. 4 muestra cuantitativamente un resultado muy importante: a números de Bond bajos el volumen crítico de la burbuja crece continuamente al incrementarse el ángulo α . Es decir, en este caso se tiene una nueva manera de conseguir una burbuja de un tamaño deseado simplemente cambiando α adecuadamente, manteniendo el caudal de gas alto pero constante. De hecho, mediante los mejores ajustes de leyes de potencia de la forma $V_{0f} \sim \alpha^n$ para el caso $Bo=0.2$ y $Ca=10$ encontramos que, aproximadamente,

$$V_{0f} \sim \alpha \quad \text{si } 0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ,$$

$$V_{0f} \sim \alpha^{6/5} \quad \text{si } 45^\circ < \alpha \simeq 80^\circ.$$

Este efecto de α sobre el crecimiento de las burbujas puede entenderse como debido a una fricción efectiva generada en las paredes del cono, lo que aprovecha la burbuja para crecer más. Por el contrario, el volumen V_{0f} sólo crece débilmente con α cuando $Bo > 1$, excepto para ángulos muy grandes, para los que el crecimiento de V_{0f} es muy intenso. Hasta donde sabemos, ésta es una nueva manera de generar burbujas de tamaño cada vez mayor, bajo el consecuente aumento del ángulo, sobre todo en el límite $Ca/Bo \gg 1$.

Ya hemos mencionado que estudios previos, tanto experimentales [16] como teóricos [14, 15], muestran que para burbujas en medios semi infinitos (o con paredes muy alejadas) y altos gastos la ley de potencia que correlaciona al volumen adimensional y al número capilar es $V_{0f} \sim Ca^{3/4}$. Esta ley se modifica para el caso de crecimiento en conos. Como ejemplo, mostramos en la Fig. 5 el valor de V_{0f} como función de Ca para un fondo cónico con $\alpha = 60^\circ$ y $Bo=0.2$. El volumen final de la burbuja es siempre mayor que en un medio semi infinito, pero el crecimiento de V_{0f} con el número capilar es más lento: $V_{0f} \sim Ca^{0.62}$. Para propósitos de comparación, se incluye en la Fig. 5 la ley de crecimiento del volumen de la burbuja en un medio semi infinito.

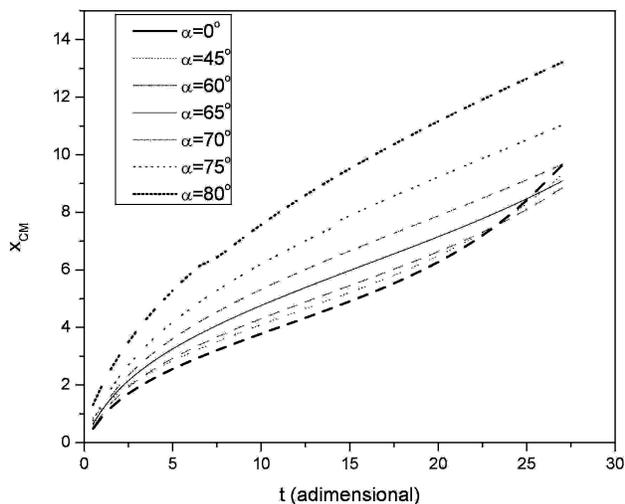


FIGURA 6. Evolución del centro de masa adimensional, x_{CM} , en función del tiempo adimensional para distintos valores de α . Los cálculos fueron hechos para $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

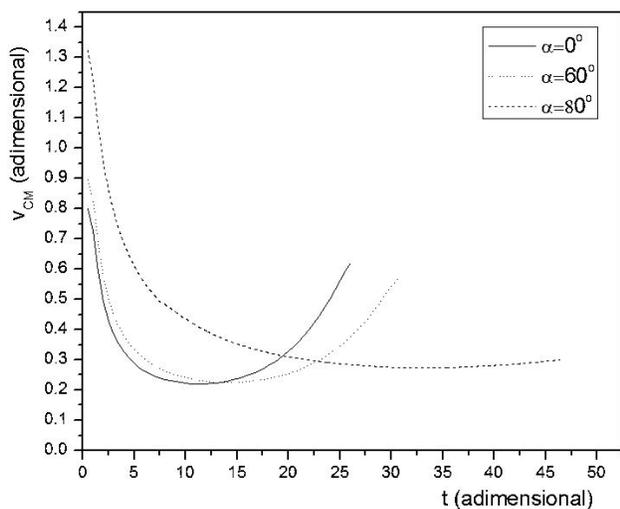


FIGURA 7. Rapidez de ascenso del centro de masa adimensional, v_{CM} , en función del tiempo adimensional para distintos valores de α . Los cálculos fueron hechos para $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

Otra medida de cómo las burbujas son influenciadas por la presencia de las paredes viene dada por la evolución del centro de masa. En la Fig. 6 mostramos la altura adimensional del centro de masa de la burbuja sobre el orificio de inyección, x_{CM} , en función del tiempo, para varios valores de α . Se observa que el centro de masa se eleva cada vez más conforme el ángulo α crece. Es decir, a mayor valor de α la burbuja se alarga más. La rapidez con la que el centro de masa se eleva viene dada por su velocidad adimensional $v_{CM} = dx_{CM}/dt$. La Fig. 7 muestra esta cantidad en función del tiempo para tres ángulos característicos, $\alpha = 0, 60$ y 80° . Se aprecia que para $\alpha = 0^\circ$ y 60° la velocidad v_{CM} primero disminuye, alcanza un mínimo, y después rápidamente se incrementa, aunque no recupera su valor inicial. Para $\alpha = 80^\circ$ la velocidad disminuye muy rápidamente y después toma un valor casi constante hasta el despegue.

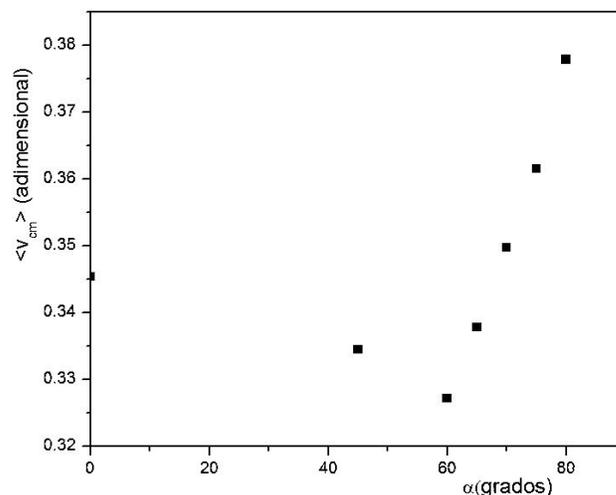


FIGURA 8. Promedio temporal adimensional de la rapidez de ascenso del centro de masa, $\langle v_{CM} \rangle$, en función de α . Los cálculos fueron hechos para $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

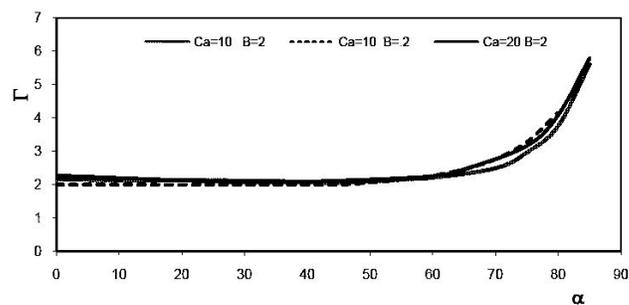


FIGURA 9. Gráficas del cociente de deformación Γ en función de α para burbujas que crecen en conos y alcanzan su volumen crítico. Se presentan los casos para tres pares de números: $Ca=10$ y $Bo=2$; $Ca=20$ y $Bo=2$; y $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

El promedio temporal de la velocidad del centro de masa durante todo el tiempo de formación de la burbuja,

$$\langle v_{CM} \rangle = (1/t_{crec}) \int_0^{t_{crec}} v_{CM} dt,$$

también da una idea de cómo la burbuja crece para distintos ángulos del cono. En la Fig. 8 mostramos la variación de $\langle v_{CM} \rangle$ con α . Como puede verse, la velocidad media de crecimiento de la burbuja disminuye al aumentar α , alcanza un mínimo cerca de $\alpha = 60^\circ$, y tiende a crecer linealmente para valores mayores de α . Estos resultados sugieren que la pared del cono podría jugar un papel diferente cuando $\alpha < 60^\circ$ que cuando $\alpha > 60^\circ$. Para $\alpha < 60^\circ$ las paredes imponen una fricción efectiva que domina sobre la flotación. Esto hace que la burbuja ascienda de modo lento y continúe creciendo hasta que la fuerza de flotación, que es proporcional al volumen de la burbuja, vence a la fuerza friccional originada por las paredes y al arrastre viscoso.

El efecto de sólo la fuerza de arrastre viscoso se refleja en la curva para $\alpha = 0^\circ$ de la Fig. 7. Si no hay paredes, la

rapidez de ascenso del centro de masa de la burbuja disminuye debido a que la fuerza de arrastre viscoso es proporcional al radio medio de la burbuja, que en este caso es casi esférica [25]. Para una burbuja que crece en presencia de una pared cónica con $\alpha < 60^\circ$, la rapidez media de ascenso es aun menor que en el caso $\alpha = 0^\circ$; ver Fig. 8. La fuerza adicional que limita la rapidez media de ascenso sólo puede provenir de la presencia de las paredes y por tanto su efecto es el de una fricción efectiva, adicional a la fuerza de arrastre viscoso. Para $\alpha > 60^\circ$, la pared fuerza a que la burbuja adquiera una forma esbelta, lo que hace que su centro de masa se eleve muy rápidamente; ver Fig. 3, donde se observa que el radio del hemisferio superior de la burbuja casi no cambia. Ello implica una fuerza de arrastre viscoso casi independiente de α . De este modo, la burbuja aún no tiene el volumen adecuado para, por flotación, vencer a la fuerza adhesiva de la tensión superficial, que la mantiene unida a la boca del tubo de inyección, y a la fuerza de fricción de la pared. La rapidez de ascenso del centro de masa de la burbuja se mantiene casi constante durante un poco más de la mitad del tiempo de crecimiento (curva con $\alpha = 80^\circ$ de la Fig. 7).

El cociente $\Gamma = L/d$ de la altura L de la burbuja a su diámetro máximo d es una medida del grado de deformación de una burbuja. Con paredes cónicas, este cociente es mayor o igual que la unidad (la unidad se alcanza para burbujas formadas a bajos caudales en medios semi infinitos, ya que entonces las burbujas son casi esféricas). En la Fig. 9 presentamos Γ como función de α para los tres pares de valores $Ca=10$ y $Bo=2$; $Ca=20$ y $Bo=2$; y $Ca=10$ y $Bo=0.2$. Observe-se que en todos los casos la deformación de la burbuja empieza a ser notoria aproximadamente a partir de $\alpha = 60^\circ$, lo

cual es obvio si se tienen en cuenta los resultados previos sobre el volumen máximo. La utilidad de este último resultado ha sido esplendidamente mostrada en el ámbito de la geofísica, donde diversos estudios numéricos de la deformación de burbujas en líquidos muy viscosos como el magma, pero bajo gradientes de corte, permitieron caracterizar las condiciones de flujo originales ocurridas hace millones de años [12, 13]. Cabe mencionar que algunos de los principales resultados aquí discutidos se validaran en la Sección IV donde discutimos un conjunto de experimentos simples diseñados para probar cualitativamente la bondad del método numérico.

3.2. Recipientes cilíndricos

La Fig. 10 muestra algunos perfiles de las burbujas formadas en recipientes cilindros con radios adimensionales $R/a = 5, 4$ y 3.5 para $Ca=10$ y $Bo=0.2$. Como puede verse, el volumen final de la burbuja crece al disminuir R . En la Fig. 11 mostramos el volumen crítico adimensional como función de R/a . Este volumen es casi constante e igual al volumen de una burbuja creciendo en un medio semi infinito, sin paredes, cuando $R/a > 6$.

Para cuantificar el efecto del caudal de gas inyectado sobre el tamaño máximo de las burbujas, mostramos en la Fig. 12 el volumen adimensional V_{0f} en función del número capilar para $R/a = 3.5$ y $Bo=0.2$. El volumen crece linealmente con el número capilar, que es un crecimiento más rápido que el encontrado en un medio semi infinito o en un recipiente cónico. Otra manera en la que hemos cuantificado el crecimiento de las burbujas es a través de la evolución de su centro de masa, x_{CM} , con el tiempo, que se representa

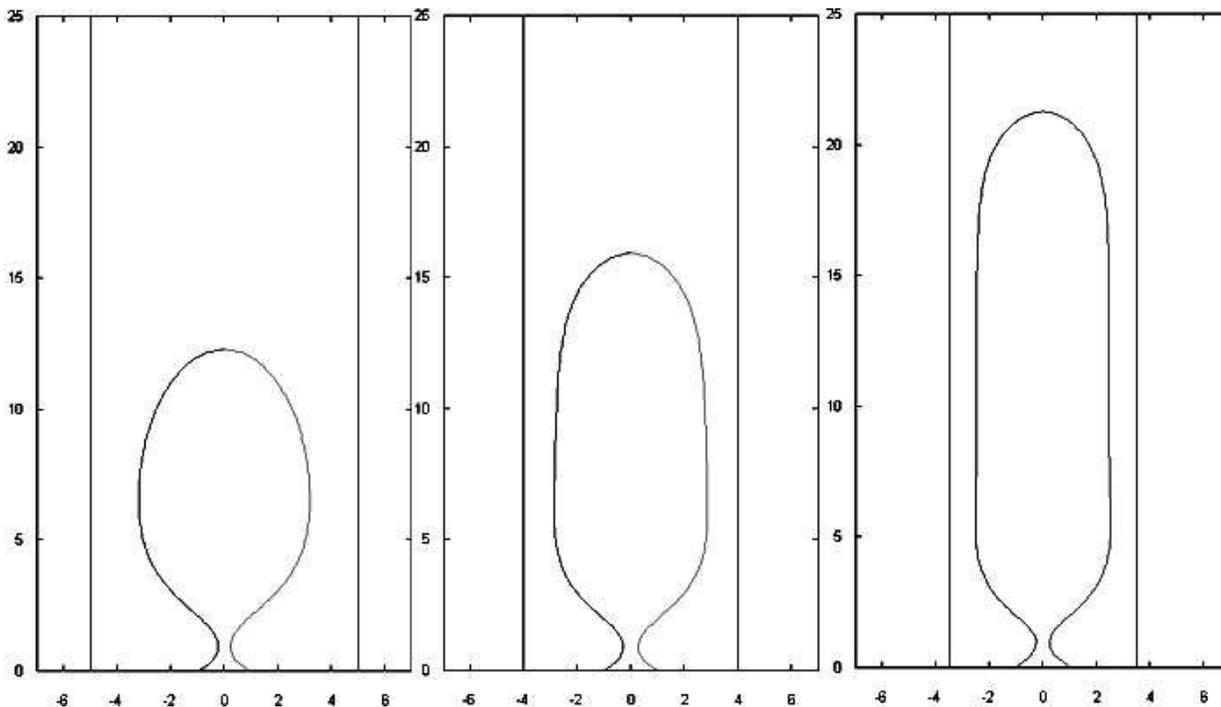


FIGURA 10. Perfiles adimensionales de burbujas formadas en cilindros de diferentes radios. De izquierda a derecha, los radios adimensionales son: $R/a = 5, 4$ y 3.5 . Los números adimensionales son $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

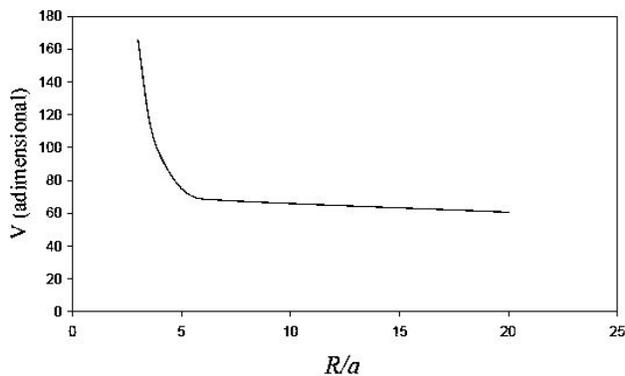


FIGURA 11. Gráfica del volumen adimensional crítico de las burbujas en tubos en función del radio adimensional R/a . La gráfica se hizo para $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

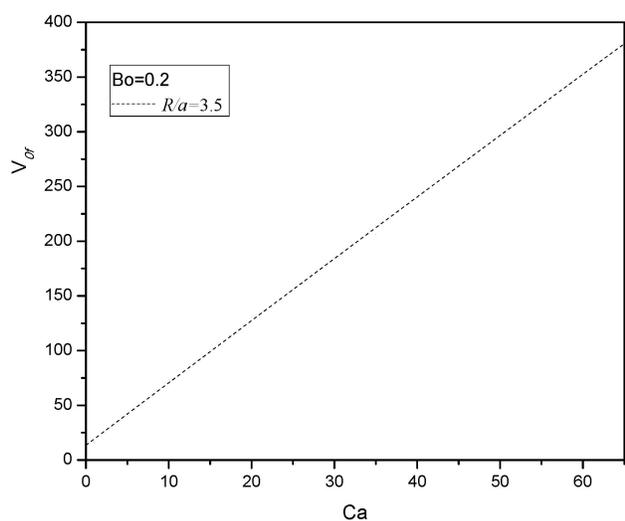


FIGURA 12. Volumen adimensional crítico de burbujas en tubos en función del número capilar, Ca . En este caso $R/a = 3.5$ y $Bo=0.2$.

en la Fig. 13 para $Ca=10$ y $Bo=0.2$. Se observa en dicha figura que para burbujas creciendo en tubos de radio adimensional $R/a \leq 6$, el centro de masa asciende, en apariencia, de forma lineal con el tiempo.

Como ya hicimos en el caso de los recipientes cónicos, mostramos en la Fig. 14 la rapidez instantánea del centro de masa, v_{CM} , como función del tiempo para algunos casos representativos. La rapidez de ascenso se mantiene aproximadamente constante casi desde el inicio de la formación de la burbuja cuando $R/a = 3.5$. Como en el caso de los conos de pequeño ángulo, este resultado refleja la existencia de una intensa fuerza friccional cuyo efecto es hacer que la burbuja crezca elevando su centro de masa a velocidad constante. Conforme el radio del tubo se hace más grande, este comportamiento tiende a ser más parecido al caso de las burbujas en medios semi infinitos, para las que la fuerza de arrastre viscoso limita la rapidez de elevación del centro de masa de la burbuja sólo hasta el momento en el que la fuerza de flotación se impone, a lo que sigue un rápido aumento del tamaño de la burbuja a lo largo del eje del tubo.

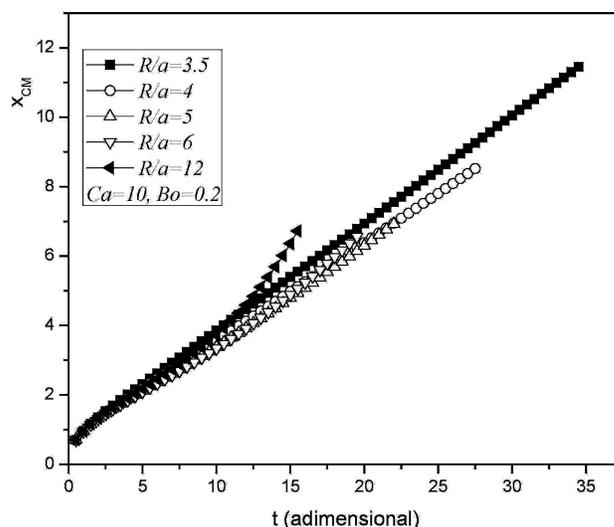


FIGURA 13. Gráfica de la evolución del centro de masa, x_{CM} , en función del tiempo para burbujas formadas en tubos cilíndricos de radios adimensionales, $R/a=12, 6, 5, 4$ y 3.5 .

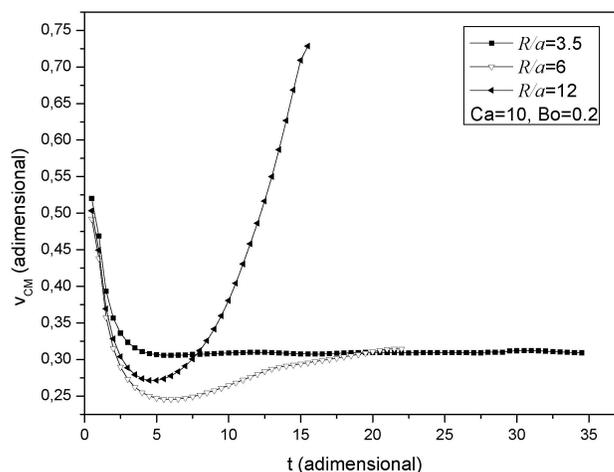


FIGURA 14. Rapidez instantánea de ascenso de burbujas en cilindros de radios adimensionales $R/a = 12, 6$ y 3.5 . La gráfica se hizo para $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

La rapidez media de ascenso del centro de masa, $\langle v_{CM} \rangle$, también fue calculada para el caso de burbujas formadas dentro de tubos cilíndricos. En la Fig. 15 presentamos la gráfica de $\langle v_{CM} \rangle$ en función del radio adimensional del tubo. La gráfica muestra que para tubos esbeltos la fuerza de fricción sobre la burbuja llega a ser máxima cerca de $R/a \sim 5$, ya que ahí el movimiento ascensional de la burbuja durante su etapa de formación es muy lento. Para $R/a < 5$ la rapidez media de ascenso del centro de masa se acelera. Esto puede parecer extraño a primera vista, porque la fricción debida a la cercanía de las burbujas a las paredes aumenta al disminuir el radio adimensional del tubo. Sin embargo, hay que tener presente que para valores pequeños de este radio las burbujas tienen mayor volumen y, consecuentemente, mayor fuerza de flotación.

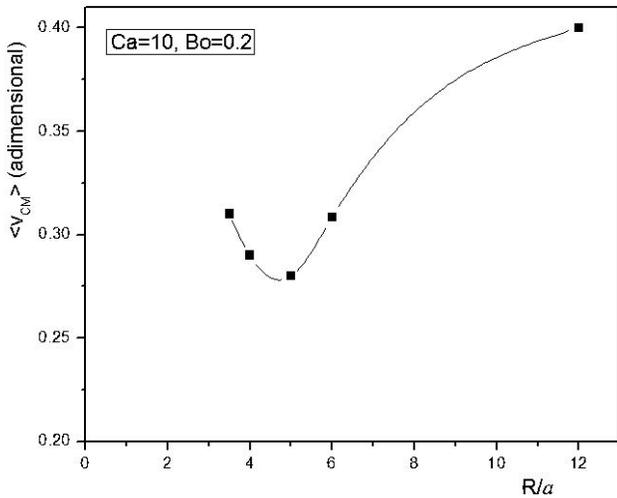


FIGURA 15. Rapidez media temporal del ascenso del centro de masa como función del radio adimensional R/a .

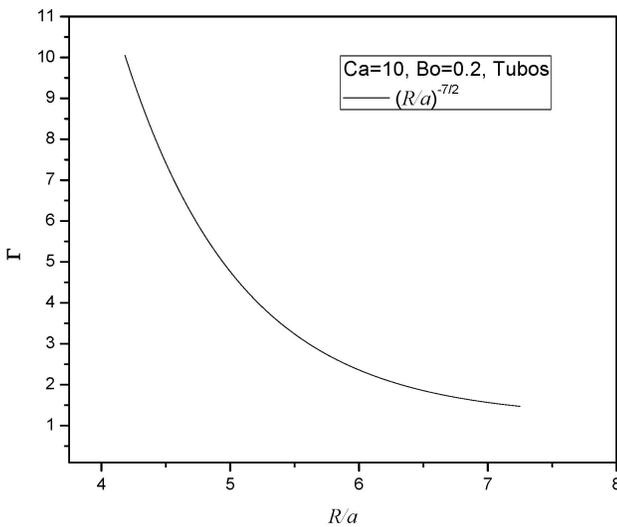


FIGURA 16. Gráfica del factor de deformación Γ en función del radio adimensional del tubo dentro del cual crece la burbuja. Los cálculos fueron hechos para el caso $Ca=10$ y $Bo=0.2$.

El factor de deformación Γ da una medida cuantitativa de la deformación de las burbujas, como ya vimos en la sección anterior para recipientes cónicos. En la Fig. 16 mostramos la forma en la que una burbuja se deforma cada vez más (se alarga) a medida que el radio interior del cilindro se hace cada vez más pequeño. Es claro que el alargamiento de la burbuja no es proporcional con la reducción del radio interior sino que sigue un comportamiento más complejo.

En la siguiente sección discutiremos un conjunto de experimentos los cuales validaran también algunos de los principales resultados de la formación de burbujas en tubos cilíndricos.

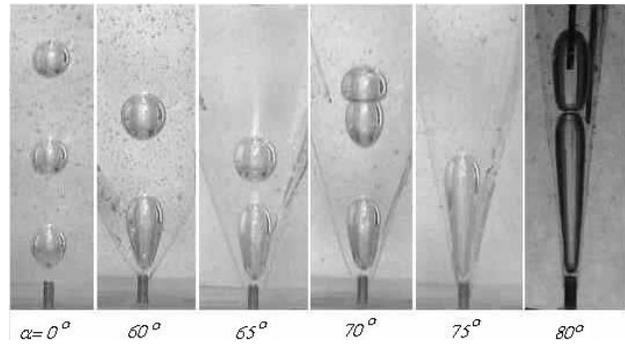


FIGURA 17. Perfiles experimentales de burbujas creciendo en glicerina para sistemas sin boquilla cónica ($\alpha = 0^\circ$) y con boquillas con $\alpha = 60, 65, 70, 60$ y 80° . Los símbolos son del tamaño de las barras de error. De acuerdo a los experimentos, en este caso $Bo=0.0176$ y $Ca=50.78$.

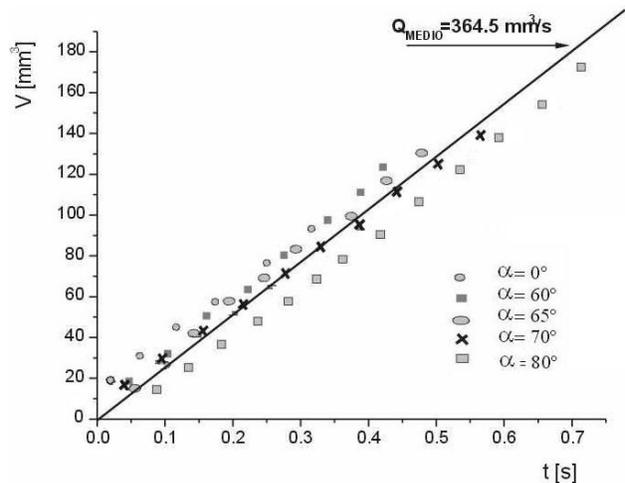


FIGURA 18. Gráfica de los volúmenes en función del tiempo de las burbujas creciendo en conos en recipientes llenados con glicerina. Todas las burbujas fueron formadas con mismo caudal medio de aire, de valor $dV_0/dt = Q = 364.5 \text{ mm}^3/\text{s}$ obtenido por un ajuste por mínimos cuadrados.

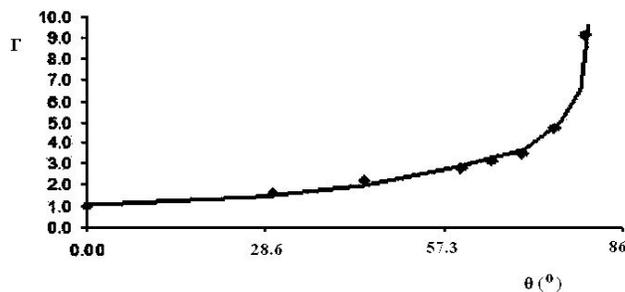


FIGURA 19. Factor de deformación, Γ , en función de α . Las mediciones corresponden a las burbujas de la Fig. 17.

4. Experimentos

Para validar los resultados numéricos, hemos llevado a cabo experimentos de generación de burbujas de aire en glicerina y en aceite de silicón. En primera instancia utilizamos glicerina como líquido de trabajo a aproximadamente 25°C . Las

propiedades de la glicerina a esta temperatura son: densidad $\rho = 1260 \text{ Kg/m}^3$, viscosidad $\mu = 79 \times 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$ y tensión superficial $\sigma = 63 \times 10^{-3} \text{ N/m}$. El nivel de llenado de los recipientes fue siempre de $h = 100 \text{ mm}$. Para formar las burbujas se inyectó aire desde el fondo por medio de un tubo capilar de 40 cm de longitud, diámetro exterior 1.6 mm y radio interior $a = 0.3 \text{ mm}$. En un trabajo previo, mostramos que esta configuración permite generar burbujas a caudal de aire constante [7], que es una de las premisas del trabajo numérico. Las configuraciones experimentales de inyección y de disposición de las boquillas son las que se muestran en las Figs. 1a y 2, para conos y cilindros, respectivamente.

El flujo de aire fue generado por una bomba de pecera, que proporciona un caudal de aire fijo. Al inyectar el aire al seno del líquido se generan burbujas muy controladas que videofilmamos durante su proceso de formación y despegue. Posteriormente digitalizamos cada video para tener fotos de eventos cada $1/30$ de segundo. En los experimentos con conos la variación de α se realizó usando conos con diferentes ángulos construidos con acetato, que se dobló hasta lograr la altura y ángulo deseados. Estos conos fueron luego insertados alrededor de la aguja de inyección, fijándolos a la salida del tubo capilar con cuidado de mantenerlos verticales y perfectamente centrados.

En la Fig. 17 mostramos imágenes de las burbujas cuando éstas alcanzan sus volúmenes críticos para diferentes valores de α . Destaca, en primer lugar, el caso $\alpha = 0^\circ$, que corresponde a un fondo plano horizontal, con el que compararemos los casos resultados para $\alpha > 0$. La figura muestra también fotos de burbujas con $\alpha = 60, 65, 70, 75$ y 80° . No se presentan burbujas para $\alpha < 60^\circ$ ya que no se observan cambios significativos en su tamaño o en su forma respecto al caso $\alpha = 0^\circ$. Como recordaremos esto ya se había predicho en los resultados numéricos discutidos en la Sec. 3.1 para el caso $\text{Ca}=10$ y $\text{Bo}=0.2$.

Cuando las burbujas se forman, su evolución (su crecimiento a distintos tiempos) puede ser cuantificada, es decir, el volumen $V_0(t)$ puede ser calculado a distintos instantes de tiempo. Esto se hizo por medio de códigos numéricos que desarrollamos en lenguaje C++ los cuales analizan cada archivo de imagen en formato TIFF (tagged image file format, formato de archivo de imagen etiquetada [26]) y localizan el contorno de la burbuja. Una vez obtenido el perfil se calcula el volumen y también es posible estimar la posición del centro de masa $x_{CM}(t)$ de cada burbuja. Dicho método ha probado ser muy eficiente en estudios experimentales de formación de burbujas en agua [7], en donde las burbujas se forman mucho más rápidamente y son mucho más pequeñas que las burbujas características de los líquidos muy viscosos utilizados aquí.

La medición de los volúmenes instantáneos permite determinar en forma directa si las burbujas que se forman, ya sea en los sistemas libres o en los confinados, crecen a caudal de gas constante. La medición de los volúmenes de las burbujas en función del tiempo, para diferentes ángulos α , produce la gráfica de la Fig. 18, en donde todos los datos se

ajustan bien a líneas rectas. Esto muestra que se satisface la condición de crecimiento a caudal constante: $dV_0/dt = cte$. De esta forma determinamos que el caudal de aire inyectado en el líquido tiene un valor medio de $Q = 364.5 \text{ mm}^3/\text{s}$ ($Q = 364.5 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$) en este caso particular. Dicho gasto se mantiene sin y con la presencia de las boquillas cónicas.

En los experimentos de la Fig. 18, el tiempo típico de formación de una burbuja sobre un fondo plano horizontal es del orden de $t_{crec} \sim V_{0f}/Q = 0.46 \text{ s}$, mientras que en presencia de una pared cónica este tiempo es generalmente mayor, debido a la fricción que impone la pared. En nuestros experimentos, el número de Bond es $\text{Bo}=0.0176$ y el número capilar es $\text{Ca}=50.78$, mientras que el número de Reynolds asociado con la formación de una burbuja típica es $\text{Re} = (\rho Q/\mu a)(\text{Bo}/\text{Ca})^{1/4} = 0.26$. Esto justifica el uso de las ecuaciones de Stokes para la descripción teórica de las burbujas.

La gráfica para el coeficiente de deformación Γ en función α , para los conos mostrados en la Fig. 17 se da en la Fig. 19. Comparando con la predicción teórica (Fig. 9) se observa que el comportamiento de la curva de ajuste experimental es similar a la obtenida teóricamente aunque la curva experimental revela una mayor deformación que los casos teóricos, es decir, la pendiente no permanece constante para $\alpha < 60^\circ$, sino que crece suavemente, incluso desde $\alpha = 0^\circ$. Es posible que tal diferencia sea debida al alto caudal usado en los experimentos, ya que la entrada de gas hacia el líquido es en la dirección vertical, provocando, posiblemente, un mayor alargamiento de las burbujas.

Presentamos a continuación una secuencia de resultados experimentales obtenidos para la formación de una sola burbuja en un cono con $\alpha = 75^\circ$ en aceite de silicón a 25°C . Las propiedades del aceite de silicón son: densidad $\rho = 971 \text{ Kg/m}^3$, viscosidad $\mu = 97.1 \times 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$ y tensión superficial $\sigma = 21.2 \times 10^{-3} \text{ N/m}$. En la Fig. 20 mostramos un conjunto de imágenes tomadas a diferentes tiempos de formación de la burbuja. Los tiempos correspondientes a cada imagen son, de izquierda a derecha, $t = 0 \text{ s}$, $10/30 \text{ s}$, $20/30 \text{ s}$ y $30/30 \text{ s}$. Es decir, fijamos el tiempo $t = 0$ para el tiempo al cual empieza a crecer una nueva burbuja, el tiempo $t = 30/30 = 1 \text{ s}$ corresponde al tiempo en el que la burbuja esta próxima al despegue. En la Fig. 21 damos la gráfica del volumen como función del tiempo para dicha burbuja. Nuevamente vemos que los datos se ajustan a una línea recta cuya pendiente da un caudal de inyección de aire de $Q = 138 \text{ mm}^3/\text{s}$, lo que corresponde a un número capilar $\text{Ca}=70.23$. Además, para aceite de silicón el número de Bond es $\text{Bo}=0.04$ y consecuentemente el numero de Reynolds en este caso es $\text{Re} = 0.126$. Nótese que aquí el caudal es menor que en el caso de burbujas creciendo en glicerina (Fig. 17) ya que la presión hidrostática, $p_h = \rho gh$, que tiene que vencer la bomba para formar a la burbuja es mayor en el caso de la glicerina que en el aceite de silicón ($p_{h\text{glicerina}} = 1.23 \text{ kPa}$ y $p_{h\text{silicón}} = 0.95 \text{ kPa}$).

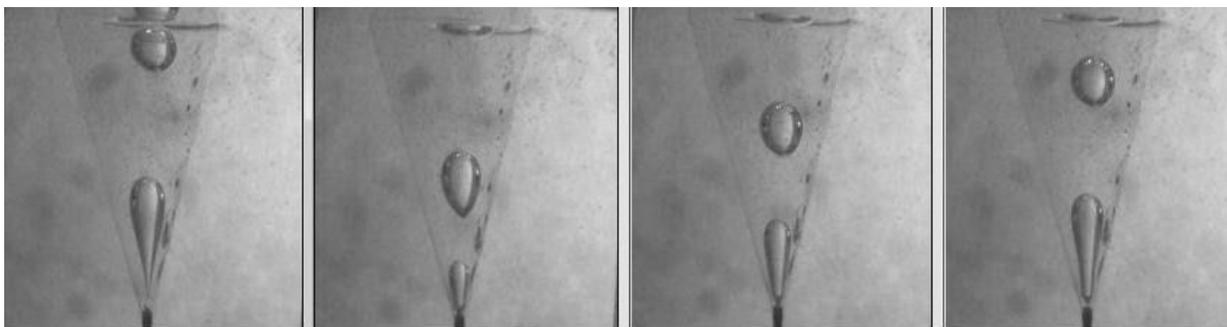


FIGURA 20. Imágenes instantáneas de una burbuja creciendo en el interior de un cono con $\alpha = 75^\circ$. Usamos aceite de silicón de viscosidad $\mu = 97.1 \times 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$. Los tiempos de cada imagen son, de izquierda a derecha, $t = 0, 10, 20$ y 30 treintavos de segundo.

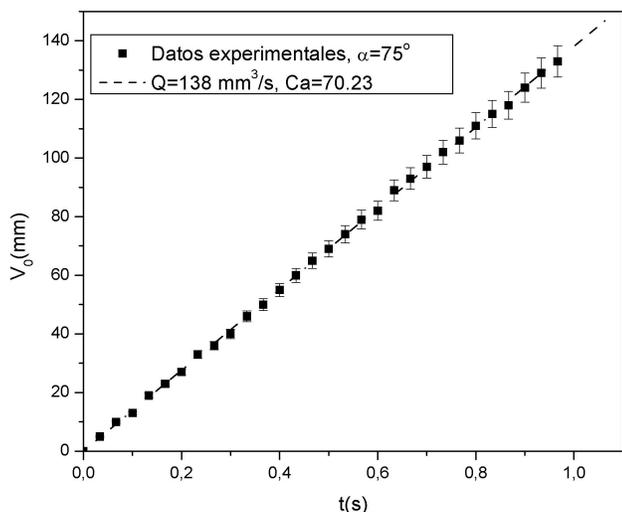


FIGURA 21. Evolución del volumen, V_0 , como función del tiempo, para la burbuja de la Fig. 20. El cálculo de la pendiente lleva a que el caudal en este caso es $Q = 138 \text{ mm}^3/\text{s}$. Por tanto, el número capilar es $Ca=70.23$ y el número de Reynolds toma el valor $Re = 0.126$.

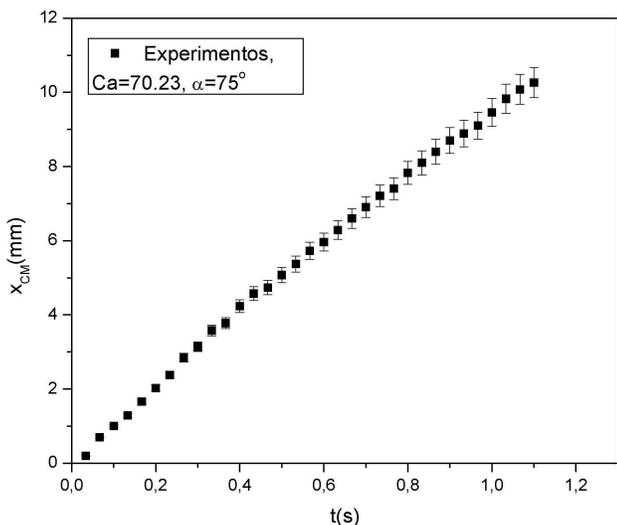


FIGURA 22. Centro de masa, x_{CM} , en función del tiempo para la burbuja de la Fig. 20.

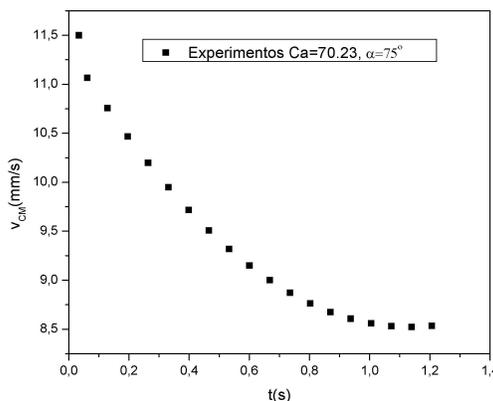


FIGURA 23. Rapidez de ascenso del centro de masa, v_{CM} , en función del tiempo para la burbuja de la Fig. 20.

La evolución del centro de masa, x_{CM} , en función del tiempo se presenta en la Fig. 22 mientras que la rapidez de ascenso del centro de masa, v_{CM} , se da en la Fig. 23. De la comparación con las Figs. 6 y 7, notamos que el comportamiento dinámico es muy similar al que se predice en tales gráficas cuando α es grande. Más específicamente, en los experimentos la rapidez de ascenso del centro de masa disminuye conforme transcurre el tiempo y tiende a un valor casi constante justo antes del despegue. Lo mismo se observa en la Fig. 7 para $\alpha = 80^\circ$. Esto significa que, en efecto, las paredes imponen una fuerte fricción sobre la burbuja que disminuye su crecimiento vertical pero en cambio, debido a la entrada continua de aire, la burbuja se hace mas grande. Es decir, la burbuja crece a expensas de la fricción.

Para el caso de tubos cilíndricos sólo mostramos experimentos con aceite de silicón y tubos de vidrio de radio interior $R = 3.2 \text{ mm}$, los cuales se colocaron simétricamente respecto al capilar de inyección a una altura respecto a la base de $d = 0.5 \text{ mm}$. El cociente de radios es $R/a = 10.66$. El aceite de silicón fue preferido sobre la glicerina para los experimentos en tubos en virtud de que esta última genera muchas burbujas pequeñas, las cuales limitan la clara visualización de las burbujas grandes. También la bomba de pecera que

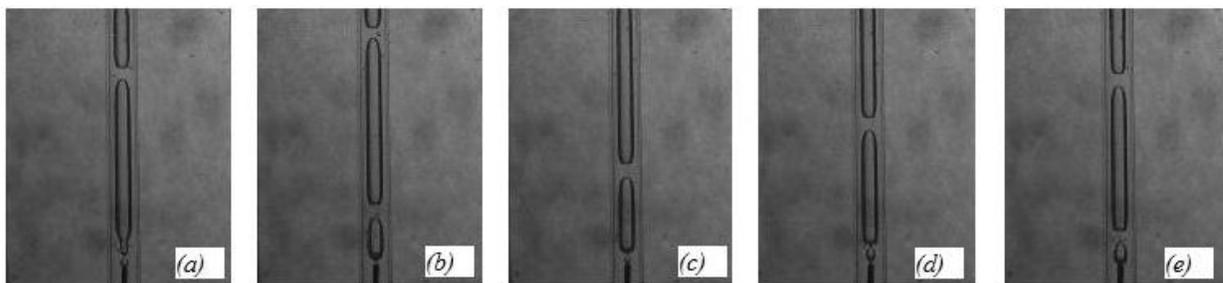


FIGURA 24. Imágenes a diferentes tiempos de una burbuja creciendo en aceite de silicón dentro de un tubo de vidrio de radio adimensional $R/a = 10.33$. De izquierda a derecha, las imágenes corresponden a los tiempos $t = 1, 10, 20, 30$ y 40 treintavos de segundo.

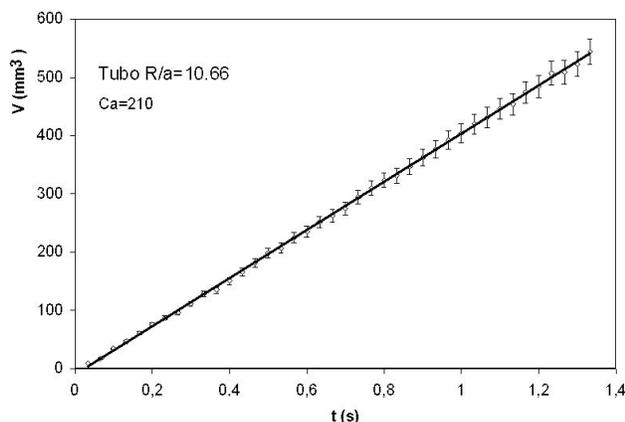


FIGURA 25. Evolución del volumen, V_0 , como función del tiempo, de la burbuja de la Fig. 24. El cálculo de la pendiente lleva a que el caudal en este caso es $Q = 410.59 \text{ mm}^3/\text{s}$, lo que da un número capilar $Ca=209.94$ y un número de Reynolds de $Re = 0.16$.

usamos fue un poco mayor y consecuentemente generó un caudal de aire mayor que la empleada en los conos. El proceso de formación de la burbuja, bajo estas condiciones, es mostrado en la Fig. 24 en una serie de imágenes instantáneas donde cada una de ellas fue adquirida al tiempo $t = 1/30 \text{ s}$, $10/30 \text{ s}$, $20/30 \text{ s}$, $30/30 \text{ s}$ y $40/30 \text{ s}$. En la Fig. 25 mostramos la gráfica del volumen, V_0 , como función del tiempo. En este caso el caudal adquirió el valor $Q = 410.59 \text{ mm}^3/\text{s}$, es decir, el número capilar es $Ca=209.94$. El número de Bond es el

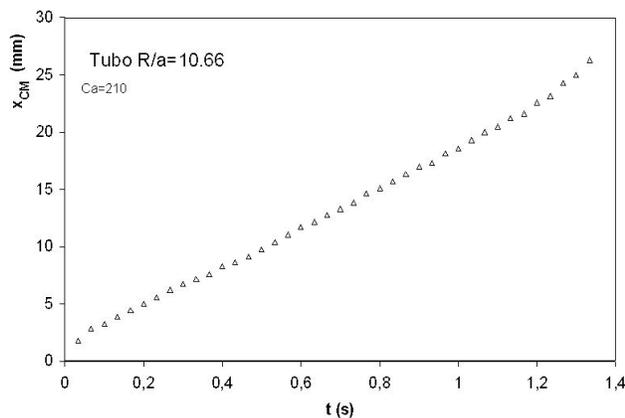


FIGURA 26. Centro de masa, x_{CM} , en función del tiempo para la burbuja de la Fig. 24.

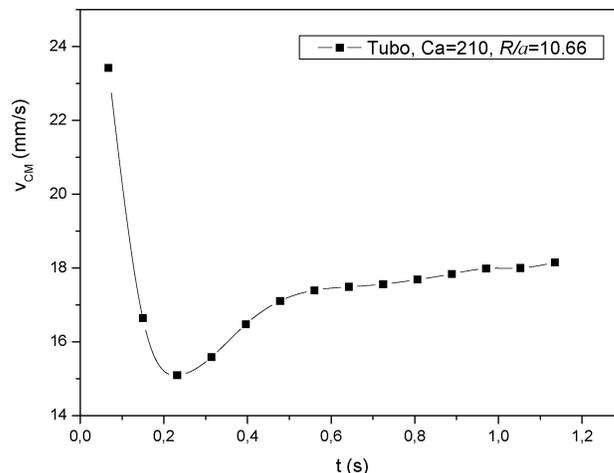


FIGURA 27. Rapidez de ascenso del centro de masa, v_{CM} , en función del tiempo para la burbuja de la Fig. 24.

mismo que en el caso previo donde también se usó aceite de silicón y el número de Reynolds en este caso fue $Re = 0.16$.

De las imágenes de la Fig. 24 generamos la gráfica del centro de masa, x_{CM} , en función del tiempo (Fig. 26). En la Fig. 27 mostramos la gráfica de la rapidez de ascenso de dicho centro de masa, v_{CM} , en función de t . A pesar del valor grande del número capilar ambas gráficas muestran un comportamiento intermedio al comportamiento de las curvas teóricas de $x_{CM}(t)$ (Fig. 13) y de $v_{CM}(t)$ (Fig. 14), correspondientes a $R/a = 6$ y 12 , respectivamente, las cuales, como recordamos, fueron calculadas para $Ca=10$ y $Bo=0.2$. La gráfica de la Fig. 27 confirma lo que predicen los cálculos para burbujas en tubos de radio relativamente grande como en el presente experimento: al principio la rapidez de ascenso del centro de masa de la burbuja se comporta como en el caso de los medios semiinfinitos en donde el arrastre viscoso limita el ascenso vertical del centro de masa, ello lleva a dicha rapidez de ascenso a un mínimo y después, cuando la fuerza de flotación se impone, la rapidez de ascenso del centro de masa se incrementa en dos etapas, una muy rápida y otra posterior un poco más lenta que la lleva a una rapidez de ascenso casi constante en donde se equilibran la fricción y la fuerza de flotación.

El aspecto cualitativo que sobresale de la comparación entre los experimentos y la teoría es que, de manera general, la dinámica de las burbujas en líquidos viscosos con número

Bond pequeño y número de capilar grande genera burbujas de gran tamaño, que se deforman mucho, pero que en general es posible caracterizar mediante las ecuaciones de Stokes y de superficie libre.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado teórica y experimentalmente que una inclinación axilsimétrica del piso donde se encuentra el tubo de inyección de gas se ve reflejado en importantes cambios en la dinámica del crecimiento y evolución de burbujas en líquidos viscosos, es decir, en la forma de las burbujas, en el volumen máximo y en la evolución de su centro de masa, entre otros. Los estudios numéricos nos han permitido caracterizar en detalle el efecto que las paredes tienen en la formación y crecimiento de las burbujas. Las geometrías cónica y cilíndrica fueron elegidas porque tienen la virtud de que gradualmente uno puede acercarse a la burbuja y evaluar cómo dicho acercamiento afecta el proceso de formación de las burbujas.

Encontramos a través de la solución numérica de las ecuaciones de Stokes y de superficie libre, bajo la premisa de caudal de gas constante, que se pueden inducir fuertes cambios en las formas y volúmenes críticos de las burbujas cuando el número capilar es grande y el número de Bond es pequeño (aquí consideramos en el estudio numérico el caso cuando $Ca=10$ y $Bo=0.2$ o $Ca/Bo=50$). Bajo estas condiciones es entonces posible establecer dos resultados generales muy importantes: a) En los conos, para $\alpha > 60^\circ$ las burbujas crecen mucho y se deforman sustancialmente respecto a las burbujas casi esféricas de los medios semi-infinitos. b) Para las burbujas formadas en cilindros se observa que a menor radio de tubo, mayor volumen crítico de las burbujas y también mayor deformación (se observa un fuerte crecimiento cuando $R/a \leq 6$). En ambos casos concluimos que este resultado se debe a las complejas distribuciones dinámicas de las fuerzas involucradas en la formación y crecimiento de las burbujas

bajo tales condiciones: fuerzas de arrastre viscoso, fuerzas de tensión superficial, fuerzas de fricción viscosa originadas por las paredes y fuerzas de flotación. Los experimentos muestran de forma cualitativa que estos resultados son correctos para números de Reynolds pequeños y un amplio rango de números capilares grandes y números de Bond pequeños, los cuales se consiguieron con diferentes caudales de inyección de aire y diferentes líquidos viscosos.

En el ámbito de las aplicaciones nuestros resultados pueden ser de utilidad, por ejemplo, en la extracción eficiente de petróleo mediante el método de bombeo neumático, ya que la inyección de gas hacia la tubería de producción está limitada a variaciones pequeñas alrededor de un valor medio, \bar{Q} . Es claro que por ser el petróleo un líquido viscoso, una simple introducción de una boquilla de forma adecuada puede modificar los tamaños de burbuja y consecuentemente aligerar el peso de la columna de aceite mediante la modificación de la densidad media de la mezcla gas-aceite. Este simple cambio en la forma de las boquillas de inyección puede tener un efecto dramático en las políticas de extracción.

Hasta donde sabemos esta es la primera vez que un estudio de este tipo se realiza para el caso de burbujas en líquidos viscosos. Un estudio de este tipo, pero con otras formas de boquillas, con y sin coflujo, es un trabajo que ahora hemos iniciado.

Agradecimientos

Los autores agradecemos a Y. Ryazantzev de la UPM la sugerencia del estudio de las geometrías cónicas. La participación de A. M. en este trabajo fue financiada por el IPN a través de la SIP, proyecto No. 20082903 y por la COFFA, a través de una beca de investigación. Algunos experimentos fueron realizados por los alumnos PIFI: A. Archundia, A. Santana y C. Soriano, a ellos los autores también expresamos nuestro agradecimiento.

1. R. Kumar y N.R. Kuloor, *Adv. Chem. Engng.* **8** (1970) 255.
2. R. Clift, J.R. Grace y M.E. Weber, *Bubbles, Drops, and Particles* (Academic Press, Nueva York, 1978).
3. N. Rabiger y A. Vogelpohl, *Bubble formation and its movement in newtonian and non-newtonian liquids. Encyclopedia of Fluid Mechanics, Vol. 3*, Ed. N.P. Cheremisinoff, (Gulf, Nueva York, 1986) Cap. 4.
4. M.S. Longuet-Higgins, B.R. Kerman y K. Lunde, *J. Fluid Mech.* **230** (1990) 365.
5. H.N. Oguz y A. Prosperetti, *J. Fluid Mech.* **257** (1993) 111.
6. S.S. Sadhal, P.S. Ayyaswamy y J.N. Chung, *Transport Phenomena with Drops and Bubbles* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
7. G. Corchero, A. Medina y F.J. Higuera, *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects* **290** (2006) 41.
8. F.J. Higuera y A. Medina, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25** (2006) 164.
9. K.E. Brown, *The Technology of Artificial Lift Methods* (Pennwell Books, Oklahoma 1977) Vols. 1-4.
10. R.B. Bird, R.C. Armstrong y U. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids* (Wiley, New York, 1987).
11. D.L. Sahagian, *J. Geol.* **93** (1985) 205.
12. M. Manga y H.A. Stone, *J. Vulcanol. Res.* **63** (1994) 269.
13. M. Manga, J. Castro y K.V. Cashman, *J. Volcanology Geother. Res.* **87** (1998) 15.
14. H. Wong, D. Rumschitzki y C. Maldarelli, *J. Fluid Mech.* **356** (1998) 93.
15. F.J. Higuera, *J. Fluid Mech.* **530** (2005) 369.

16. J.F. Davidson y B.O.G. Schuler, *Trans. Inst. Chem. Engrs.* **38** (1960) 144.
17. Q.C. Bi and T.S. Zhao, *Int. Jour. Multiphase Flow* **27** (2001) 561.
18. A.M. Jacob y D.P. Graver III, *Phys. Fluids* **17** (2005) 031502.
19. V.S. Ajaev y G.M. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38** (2006) 277.
20. S. Middleman, *Modeling Axisymmetric Flows: Dynamics of Films, Jets, and Drops* (Academic Press, San Diego, 1995).
21. C. Pozrikidis, *Boundary Integral and Singularity Methods for linearized Viscous Flows* (Cambridge University Press, Londres, 1992).
22. C. Pozrikidis, *A practical Guide to Boundary Element Methods* (Chapman and Hall/CRC, Nueva York, 2002).
23. C. Pozrikidis, *Introducción to Theoretical and Computational Fluid Dynamics* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
24. La formación de burbujas en el límite $Ca \rightarrow 0$ no depende de la viscosidad del líquido y ha sido analizada en la referencia [14].
25. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Londres, 1987).
26. J.C. Russ, *The Image Processing Handbook* (CRC Press, Boca Raton, Florida, 2002).