

# Manejo e interpretación polarimétrica de las matrices de Mueller

R. Espinosa-Luna

GIPYS, Centro de Investigaciones en Óptica, A.C.,  
Loma del Bosque 115, Colonia Lomas del Campestre, 37150 León, Guanajuato, México,  
e-mail: reluna@cio.mx

S. Hinojosa-Ruíz

GIPYS, Facultad de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas,  
Avenida Preparatoria 301, Fraccionamiento Progreso, 98060 Zacatecas, Zacatecas, México,  
e-mail: sinhue@planck.reduaz.mx

G. Atondo-Rubio

GIPYS, Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa,  
Ciudad Universitaria s/n, 80010 Culiacán, Sinaloa, México.  
e-mail: p027005@uas.uasnet.mx

Recibido el 17 de febrero de 2009; aceptado el 23 de marzo de 2009

Se aplican la métrica de despolarización escalar  $Q(M)$  y un análisis polarimétrico gráfico a varias matrices de Mueller reportadas. Se presenta un breve repaso de los principales conceptos polarimétricos y las métricas de despolarización escalares existentes. Se demuestra que la métrica escalar  $Q(M)$  genera resultados consistentes con las métricas reportadas y que brinda una mayor información sobre la naturaleza interna de las matrices de Mueller.

*Descriptor:* Óptica física; polarización; despolarización; matrices de Mueller; métricas escalares de despolarización.

The  $Q(M)$  depolarization scalar metric and a graphical polarimetric analysis are applied to several reported Mueller matrices. A brief review of the main polarimetric concepts and the depolarizations scalar metrics is presented. It is shown the depolarization scalar metric  $Q(M)$  provides consistent results with the reported scalar metrics and offers more information about the internal nature of the Mueller matrix.

*Keywords:* Optical physics; polarization; depolarization; Mueller matrices; depolarization scalar metrics.

PACS: 42.25.Ja

## 1. Introducción

El concepto de despolarización de la luz y los métodos para medirla han sido temas de gran importancia en los últimos años [1-13]. Se hará referencia en éste trabajo con el término de despolarización a la pérdida en el *grado de polarización* que experimenta un haz de luz después de haber interactuado con algún medio material. El *grado de polarización* [10-12] es una medida del porcentaje de luz polarizada asociado a un haz de luz ( $0 \leq DoP \leq 1$ ), usualmente se mide directamente del haz de luz bajo consideración. La respuesta lineal de un medio a la irradiancia (intensidad) asociada a un haz de luz incidente, se representa por un arreglo matricial cuadrado, constituido por 16 elementos reales, al que se le denomina matriz de Mueller. Para toda matriz de Mueller puede asociarse un *índice de despolarización*, que se define como un número que representa el porcentaje de despolarización ejercido por el sistema para cualquier haz de luz incidente ( $0 \leq DI(M) \leq 1$ ) [2]. La interpretación física asociada a los límites del grado de polarización (índice de despolarización) es la siguiente: 0 corresponde a luz despolarizada (sistema totalmente despolarizante), 1 a luz totalmente polarizada (sistema no despolarizante) y los valores intermedios, a luz parcialmente polarizada o despolarizada (sistema parcialmente despolarizante), respectivamente [10-13,2]. Se han definido otras métricas escalares auxiliares como los *paráme-*

*tros de polarizancia y diatenuancia*, que miden la respuesta polarizante o despolarizante de un sistema físico, determinado por su matriz de Mueller [4].

Recientemente ha sido reportada una nueva métrica escalar para la despolarización de la luz, denominada  $Q(M)$ , cuyos límites ( $0 \leq Q(M) \leq 3$ ) permiten identificar una matriz de Mueller asociada a un sistema físico totalmente despolarizante, parcialmente despolarizante, no despolarizante diatenuante y no despolarizada no diatenuante, respectivamente [7-8]. Se ha reportado también la relación existente entre la métrica  $Q(M)$ , el índice de despolarización y los parámetros de polarizancia y diatenuancia [7-8]. Esta métrica ha probado ser consistente con las métricas convencionales, así como también han sido demostradas las ventajas y desventajas que presenta frente a las mismas. Los resultados reportados ofrecen evidencia de que aporta una mayor información acerca de la naturaleza interna de la matriz de Mueller asociada a sistemas ópticos (sistemas físicos de los que nos interesan sus propiedades ópticas) [14].

Por otro lado, las propiedades matemáticas asociadas a las matrices de Mueller han sido ampliamente estudiadas y reportadas. Los primeros reportes han sido sobre sistemas que no despolarizan y no absorben luz; es decir, sobre sistemas describibles mediante matrices de Jones [1-3,9,15]. Todo sistema describible por una matriz de Jones es describible por

una matriz de Mueller, pero lo inverso solo se cumple para las llamadas matrices de Mueller-Jones [15] o para las matrices de Mueller puras [9]. Para que un sistema óptico pueda ser representado por una matriz de Mueller-Jones, se han reportado una serie de condiciones necesarias y relaciones entre los elementos de la matriz de Mueller [16-19]. El teorema de Gil-Bernabeu es una formulación compacta que constituye una condición necesaria y suficiente para que una matriz de Mueller sea una matriz de Mueller-Jones [1,9].

En el mismo contexto, se han estudiado las propiedades matemáticas de sistemas que despolarizan y/o absorben luz, así como el análisis de las matrices de Mueller obtenidas experimental, teórica o numéricamente. En este tenor, los primeros trabajos fueron sobre matrices de Jones y su síntesis en términos de productos de matrices asociadas a elementos básicos, como polarizadores y retardadores [20]. Posteriormente, esta metodología se extendió a matrices de Mueller con representaciones asociadas a sistemas retardadores (desfasadores) y diatenuantes (polarizadores), mediante una descomposición polar [21]. Después de estos trabajos pioneros, finalmente se extendió el método a sistemas representables como una superposición de sistemas retardadores, diatenuadores y despolarizadores, lo que ahora se conoce como descomposición de Lu-Chipman [4,12].

Además de las propiedades matemáticas para las matrices de Mueller, existen condiciones que deben cumplir como sistemas físicamente consistentes. El verificar que una matriz de Mueller las cumpla, es de vital importancia, pues ello significa conocer si la misma fue determinada correctamente o no. Decir que una matriz de Mueller no es físicamente consistente, puede significar que no fue correctamente medida debido a errores de calibración del instrumento o a ruido electrónico u óptico presente en las mediciones, que no fue correctamente calculada debido a consideraciones inapropiadas en el modelo utilizado, entre otras muchas más causales experimentales, teóricas o numéricas. De aquí la importancia que reviste el efectuar un análisis sobre la matriz de Mueller, obtenida por cualquier método. Uno de los criterios más ampliamente utilizados en el análisis de las matrices de Mueller, es el criterio de eigenvalores de la matriz de coherencia asociada a la matriz de Mueller bajo estudio [12]. Este criterio establece que son matrices físicamente consistentes aquellas cuyas matrices de coherencia asociadas no posean eigenvalores negativos [12]. Es importante resaltar que recientemente se ha demostrado que dicha condición es equivalente, a su vez, con el teorema de Gil-Bernabeu para sistemas pasivos [9].

En este trabajo se aplica la métrica  $Q(M)$  y se realiza un análisis polarimétrico gráfico a una serie de casos representativos de sistemas ópticos comúnmente utilizados en diversas áreas del quehacer científico. Así mismo, se confirma que  $Q(M)$  es la métrica reportada más completa y que el criterio de sobrepolarización [13] puede emplearse como un primer criterio, confiable, para identificar matrices de Mueller físicamente consistentes. Se presenta un breve repaso de los principales conceptos polarimétricos y las métricas de despolarización escalares existentes. El lector interesado puede

consultar la referencia [14], donde se presenta una comparación entre las principales métricas escalares existentes y la aplicación de  $Q(M)$  a medio centenar de matrices de Mueller reportadas.

## 2. Relaciones básicas

La respuesta lineal de un sistema óptico a un haz de luz incidente, puede expresarse mediante la relación

$$\begin{aligned} S^o &= MS^i \Rightarrow \begin{pmatrix} s_0^o \\ s_1^o \\ s_2^o \\ s_3^o \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_0^i \\ s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{00}s_0^i + m_{01}s_1^i + m_{02}s_2^i + m_{03}s_3^i \\ m_{10}s_0^i + m_{11}s_1^i + m_{12}s_2^i + m_{13}s_3^i \\ m_{20}s_0^i + m_{21}s_1^i + m_{22}s_2^i + m_{23}s_3^i \\ m_{30}s_0^i + m_{31}s_1^i + m_{32}s_2^i + m_{33}s_3^i \end{pmatrix}, \quad (1) \end{aligned}$$

donde  $M$  se conoce como matriz de Mueller del sistema, se representa como una matriz cuadrada  $4 \times 4$  de elementos reales y  $S$  es la representación del estado de polarización de la luz mediante una matriz de Stokes (comúnmente denominado vector de Stokes).  $S$  se define en función de las componentes ortogonales del vector de campo eléctrico ( $E_p, E_s$ ) como

$$S^a = \begin{pmatrix} s_0^a \\ s_1^a \\ s_2^a \\ s_3^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_p^a E_p^{a*} \rangle + \langle E_s^a E_s^{a*} \rangle \\ \langle E_p^a E_p^{a*} \rangle - \langle E_s^a E_s^{a*} \rangle \\ \langle E_p^a E_s^{a*} \rangle + \langle E_s^a E_p^{a*} \rangle \\ i (\langle E_p^a E_s^{a*} \rangle - \langle E_s^a E_p^{a*} \rangle) \end{pmatrix}, \quad (2a)$$

donde  $\alpha = i, o$  indica si el haz incide ( $i$ ) o sale ( $o$ ) del sistema. Los paréntesis angulares indican promedios temporales o de ensamble, \* indica la operación de conjugación compleja,  $i^2 = -1$  es el número complejo.

El análisis gráfico de sistemas polarimétricos puede realizarse utilizando representaciones en tres dimensiones (superficies) o en dos dimensiones (mapas), donde los respectivos ejes pueden estar asociados a los vectores de Stokes o bien a los ángulos elipsométricos asociados a los estados de polarización [5,12-13,22]. Los vectores normalizados de Stokes pueden describirse gráficamente en término de los parámetros de la elipse de polarización, de los ángulos acimutal ( $0 \leq \psi \leq \pi$ ) y de elipticidad ( $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$ ), respectivamente [12,13]

$$S = \langle s_0 \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\chi) \cos(2\psi) \\ \cos(2\chi) \sin(2\psi) \\ \sin(2\chi) \end{pmatrix}, \quad (2b)$$

donde  $\langle s_0 \rangle$  representa la intensidad asociada al vector de Stokes, que usualmente se normaliza al valor unitario.

Una característica muy importante de todo sistema óptico, es su capacidad para despolarizar la luz incidente. Existen varias maneras de medir dicha característica. En este trabajo nos enfocaremos a las denominadas métricas de despolarización escalares, quienes tienen por objetivo proporcionar un número capaz de proporcionar la máxima información posible acerca del sistema óptico bajo consideración. De ésta manera, mientras más información se asocia a dicho número, mayor será el potencial que ofrece la métrica escalar correspondiente.

El índice de despolarización  $DI(M)$  y sus límites físicamente permitidos, se definen por [1-2]:

$$0 \leq DI(M) = \frac{\left\{ \sum_{j,k=0}^3 m_{jk}^2 - m_{00}^2 \right\}^{1/2}}{\sqrt{3}m_{00}} \leq 1. \quad (3)$$

A  $DI(M)$  se le relaciona directamente con los elementos de la matriz de Mueller, no así con el estado de polarización de la luz incidente en particular. Este índice es una especie de respuesta despolarizante promedio ante cualquier haz de luz incidente, independientemente de su estado de polarización particular.

Por otro lado, el grado de polarización  $DoP(M, S)$  y sus límites físicamente permitidos han sido definidos por la expresión [10-13]

$$0 \leq DoP(M, S) = \frac{\sqrt{(s_1^o)^2 + (s_2^o)^2 + (s_3^o)^2}}{s_0^o} = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (m_{j0}s_0^i + m_{j1}s_1^i + m_{j2}s_2^i + m_{j3}s_3^i)^2 \right]^{1/2}}{m_{00}s_0^i + m_{01}s_1^i + m_{02}s_2^i + m_{03}s_3^i} \leq 1. \quad (4)$$

A  $DoP(M, S)$  se le determina directamente del haz de luz emergente del sistema, o bien mediante la matriz de Mueller asociada al mismo considerando, además, el estado de polarización asociado a la luz incidente.

Los parámetros de diatenuación,  $D(M)$ , y de polarización,  $P(M)$ , se definen como [4]

$$0 \leq D(M) = \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} / m_{00} \leq 1 \quad (5)$$

y

$$0 \leq P(M) = \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2} / m_{00} \leq 1, \quad (6)$$

respectivamente.

La métrica escalar  $Q(M)$  para la despolarización de luz, su relación funcional con el índice de despolarización, los parámetros de diatenuación y polarización, así como sus límites

físicos han sido definidos por [7-8]

$$0 \leq Q(M) = \frac{\sum_{j,k=0}^3 m_{jk}^2}{\sum_{k=0}^3 m_{0k}^2} = \frac{3 [DI(M)]^2 - [D(M)]^2}{1 + [D(M)]^2} = \frac{\left\{ \sum_{j,k=1}^3 m_{jk}^2 \right\} / m_{00}^2 + [P(M)]^2}{1 + [D(M)]^2} \leq 3, \quad (7)$$

donde  $Q(M) = 0$  ocurre para un sistema óptico totalmente despolarizante;  $0 < Q(M) < 1$  para un sistema óptico parcialmente despolarizante; si  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $0 < DI(M) < 1$  el sistema despolariza la luz parcialmente también, pero si  $DI(M) = 1$ , el sistema es no despolarizante diatenuante; finalmente, si adquiere el valor superior,  $Q(M) = 3$  describe un sistema óptico no despolarizante y no diatenuante, respectivamente [7-8]. Observe que solamente cuando el valor de  $Q(M)$  se localiza dentro del tercer intervalo de valores permitidos es necesario calcular, además, el valor de  $DI(M)$  y esto solo en una ocasión; para el resto de los intervalos,  $Q(M)$  es autoconsistente.

El teorema de Gil-Bernabeu establece que una condición necesaria y suficiente para que una matriz de Mueller sea derivable de una matriz de Jones, es que cumpla la relación [1-2,9]

$$Tr(M^T M) = 4m_{00}^2, \quad (8)$$

donde el superíndice  $T$  indica la operación de transposición matricial. Cabe señalar que en un reciente trabajo se ha reportado que éste teorema es válido para cualquier sistema determinista, pasivo [9].

Retomando el desarrollo de Brosseau y utilizando la función auxiliar [13],

$$F_j(\chi_i, \psi_i) = m_{j0} + m_{j1} \cos(2\chi_i) \cos(2\psi_i) + m_{j2} \cos(2\chi_i) \operatorname{sen}(2\psi_i) + m_{j3} \operatorname{sen}(2\chi_i), \quad (9)$$

la condición de sobrepolarización se define a través de la expresión [13]

$$0 \leq P_0(\chi_i, \psi_i) = \frac{1}{F_0(\chi_i, \psi_i)} \times \left( \sum_{j=1}^3 (F_j(\chi_i, \psi_i))^2 \right)^{1/2} \leq 1. \quad (10)$$

De manera similar, se define la ganancia como,  $g \equiv s_0^o / s_0^i$ . La ganancia también es un criterio que se utiliza para discriminar entre un sistema físicamente consistente y otro que no lo es, siempre y cuando sea pasivo. Se afirma que un sistema es físicamente consistente si cumple con la condición de sobreganancia [13]

$$0 \leq g(\chi_i, \psi_i) \equiv \frac{s_0^o}{s_0^i} = m_{00} + m_{01} \cos(2\chi) \cos(2\psi_i) + m_{02} \cos(2\chi_i) \operatorname{sen}(2\psi_i) + m_{03} \operatorname{sen}(2\chi_i) \leq 1. \quad (11)$$

Observe que tanto la Ec. (10) como la (11) deben cumplirse para cualquier estado polarizado físicamente realizable; esto es, debe cumplirse para todos los puntos sobre la esfera de Poincaré. Es importante señalar que la condición (11) es válida solamente para sistemas deterministas, pasivos [9].

Un concepto importante que se utiliza dentro del análisis gráfico para sistemas polarimétricos, es el grado de despolarización anisotrópico,  $DAD$ , que se define como [23]

$$0 \leq DAD = \frac{DoP_{Max} - DoP_{Min}}{DoP_{Max} + DoP_{Min}} \leq 1. \quad (12)$$

Donde el valor mínimo se asocia con sistemas que generan una despolarización isotrópica, los valores intermedios con el porcentaje de despolarización anisotrópica y el valor máximo con una despolarización totalmente anisotrópica.

Para el caso específico de una matriz de Mueller dada, un procedimiento común es efectuar un barrido de todos los posibles vectores de Stokes incidentes en el sistema, buscando que sus vectores de Stokes emergentes puedan asociarse a vectores de Stokes físicamente realizables (condición de sobrepolarización) [13]. Esta condición puede graficarse en tres dimensiones como una función del estado de polarización incidente, parametrizado por los ángulos acimutal ( $0 \leq \psi \leq \pi$ ) y de elipticidad ( $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$ ) de la elipse de polarización de la onda, respectivamente [13]. Dado que el trabajo de laboratorio hace este ejercicio imposible de llevar a la práctica, es común el proceder a verificar que el grado de polarización y la ganancia no excedan el valor límite de la unidad para algunos estados discretos incidentes. Para el caso en que se utilice equipo modulado óptimamente [10,12], puede trabajarse con un mayor número de estados polarizados de manera controlada. En el caso de utilizarse un arreglo experimental no modulado, como el arreglo polarimétrico ideal que utiliza elementos ópticos clásicos como polarizadores lineales

de calcita y desfases de mica que se controlan manualmente, suele emplearse los seis estados básicos polarizados (polarizaciones lineales horizontal, vertical, a +/- 45 grados y polarizaciones circular derecha e izquierda) para la generación y análisis de los estados de polarización [24-25].

### 3. Resultados

En esta Sección se presentan, mediante tablas y gráficas, los resultados generados por la aplicación de métrica  $Q(M)$ , Ec. (7), y las condiciones de sobrepolarización, Ec. (10), y sobreganancia, Ec. (11), a una serie de matrices de Mueller representativas de varias situaciones comunes.

La Tabla I muestra el resultado de la aplicación de las métricas escalares, ecuaciones (3-8, 10-11), al aplicarse en matrices de Mueller asociadas a elementos ópticos ideales (polarizadores lineales y retardadores). Por cierto, diatenuador es el término empleado para identificar elementos que generan un atenuación en dos direcciones dadas, usualmente ortogonales entre sí. En lo sucesivo lo emplearemos para referirnos a los polarizadores lineales.

Donde  $\rho$  indica que el valor no está definido, el eje de transmisión de los polarizadores lineales ideales está orientado de acuerdo al estado polarizado emergente y las placas retardadoras poseen su eje rápido coincidente con la dirección horizontal ( $p$ ). Observe que ni el índice de despolarización, Ec. (3), ni el grado de polarización, Ec. (4), son capaces de diferenciar un elemento diatenuador, lineal o circular, de uno retardador. Solamente la métrica  $Q(M)$  establece una clara diferenciación entre tales elementos ópticos.

La Fig. 1 muestra la representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para un diate-

TABLE I. Métricas escalares y sus valores para diatenuadores y retardadores ideales. Las matrices correspondientes se localizan básicamente en cualquier libro de óptica, por ejemplo Ref. 12.

	$p$	$s$	+45	-45	$d$	$i$	$\lambda/4$	$\lambda/2$
$DoP_p(G_p)$	1(1)	$\rho(0)$	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(1)	1(1)
$DoP_s(G_s)$	$\rho(0)$	1(1)	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(1)	1(1)
$DoP_{+45}(G_{+45})$	1(0.5)	1(0.5)	1(1)	$\rho(0)$	1(0.5)	1(0.5)	1(1)	1(1)
$DoP_{-45}(G_{-45})$	1(0.5)	1(0.5)	$\rho(0)$	1(1)	1(0.5)	1(0.5)	1(1)	1(1)
$DoP_r(G_r)$	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(1)	$\rho(0)$	1(1)	1(1)
$DoP_l(G_l)$	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	1(0.5)	$\rho(0)$	1(1)	1(1)	1(1)
$P(M)$	1	1	1	1	1	1	0	0
$D(M)$	1	1	1	1	1	1	0	0
$DI(M)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q(M)$	1	1	1	1	1	1	3	3
$Tr(M^T M)/4m_{00}^2$	1	1	1	1	1	1	1	1
$DAD$	1	1	1	1	1	1	1	1

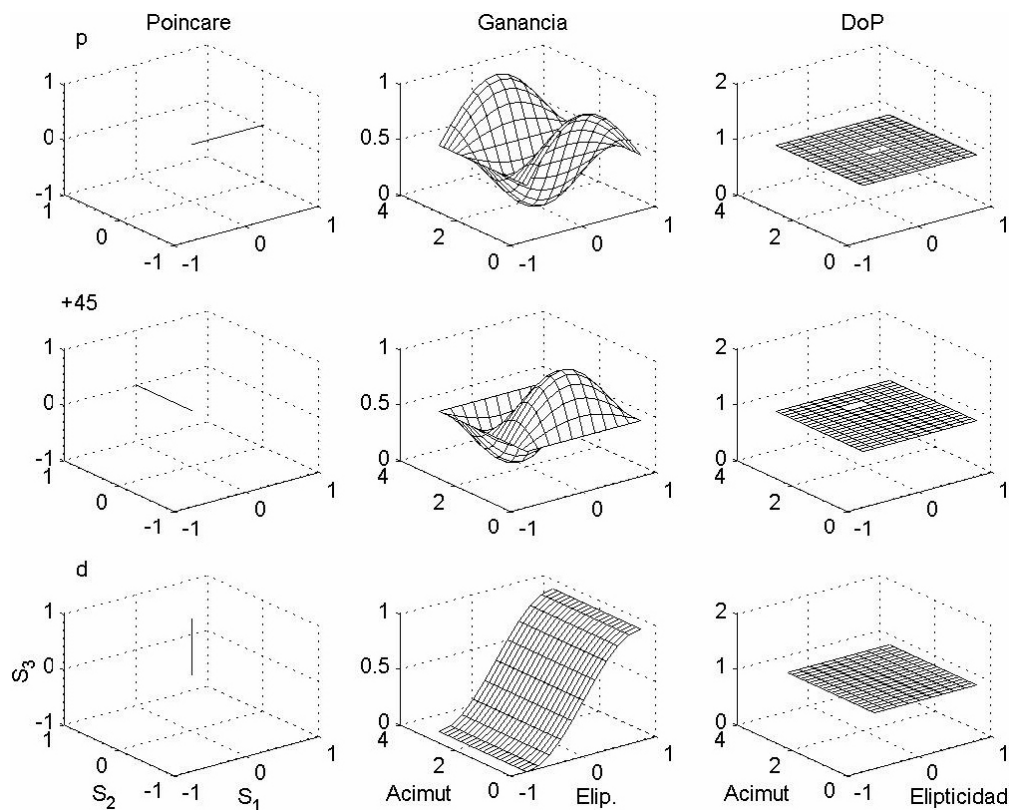


FIGURA 1. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para un diatenuador lineal ideal horizontal y a +45 grados y uno circular derecho, respectivamente.

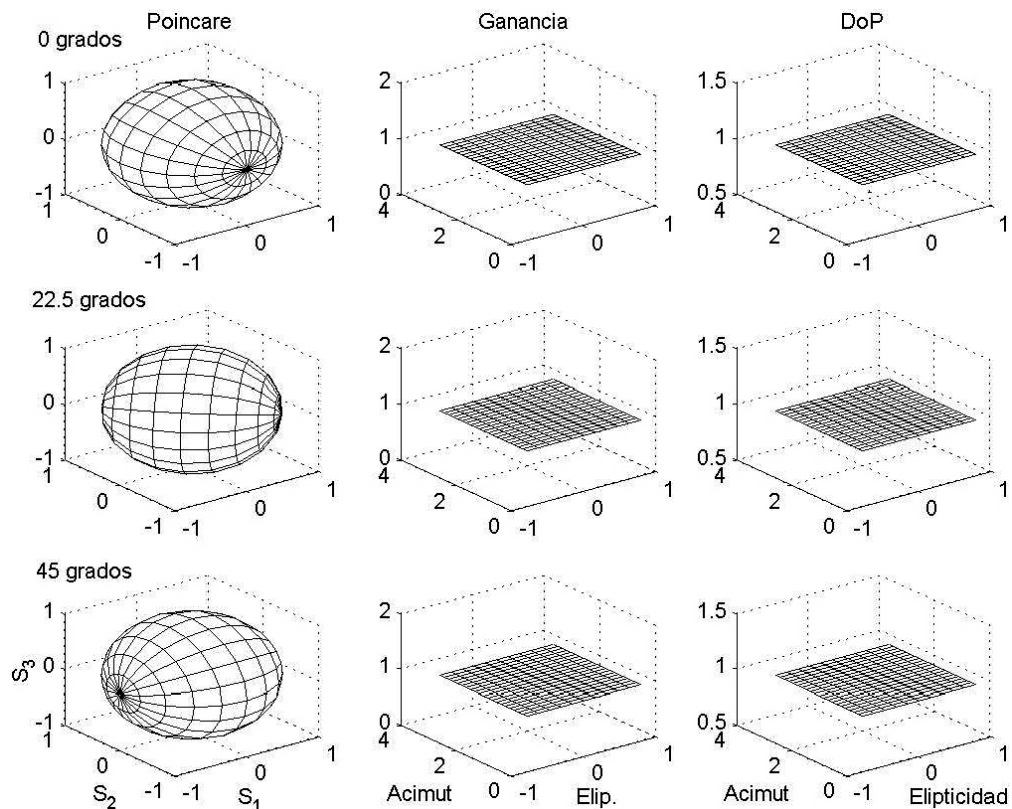


FIGURA 2. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para un retardador de cuarto de onda lineal ideal con eje rápido en dirección horizontal, a +22.5 grados y a 45 grados, respectivamente.

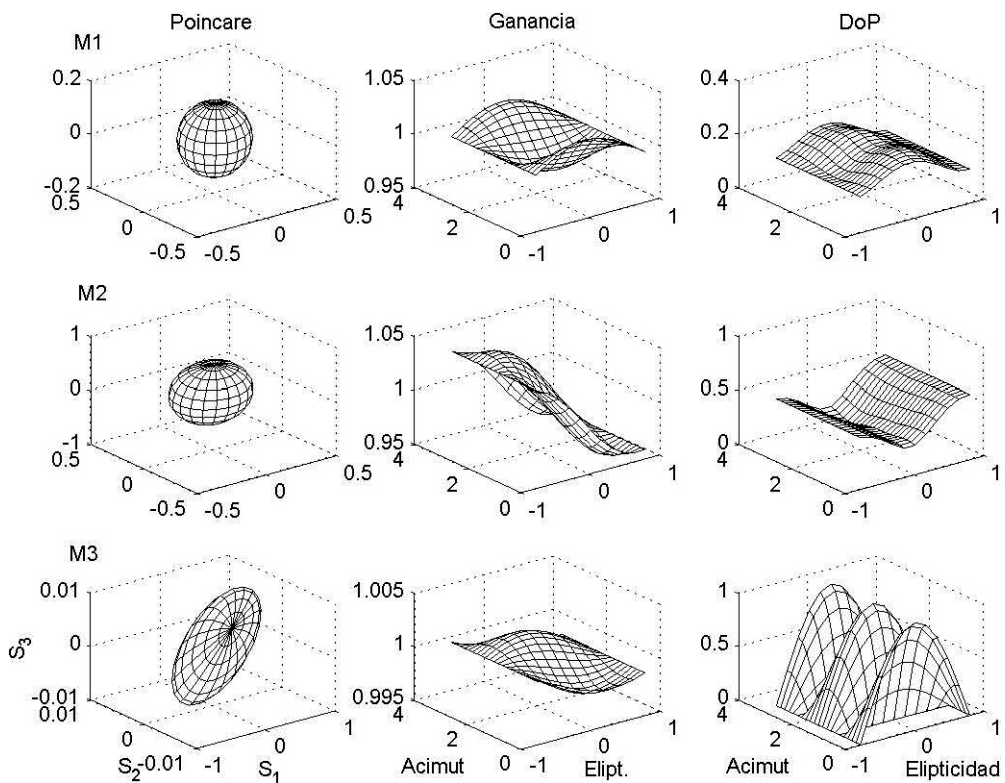


FIGURA 3. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para tres matrices despolarizantes para las cuales  $0 < Q(M) < 1$ .

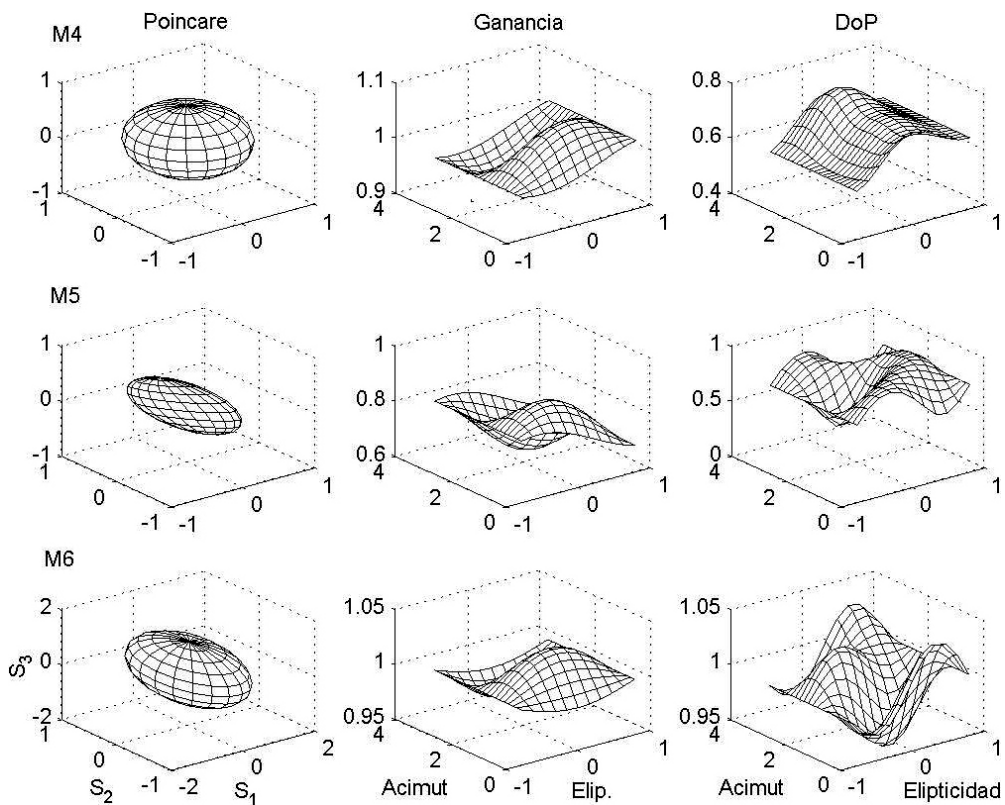


FIGURA 4. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para tres matrices que cumplen  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $0 < DI(M) < 1$ , lo que se interpreta como asociadas a sistemas despolarizantes.

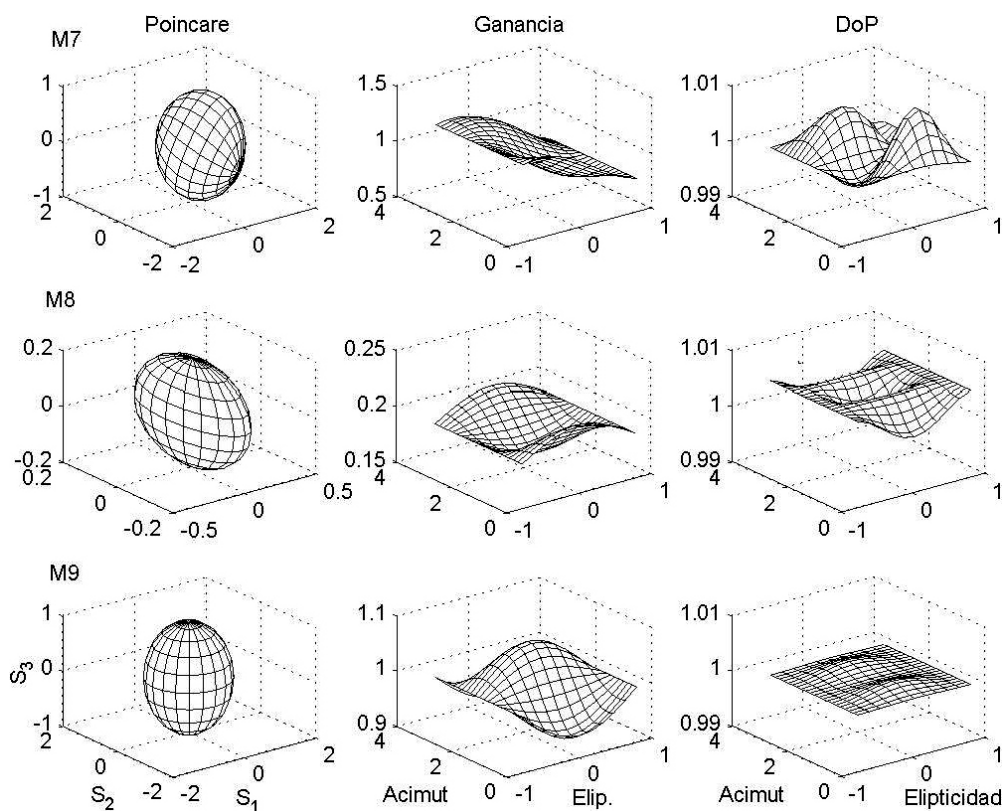


FIGURA 5. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para tres matrices que cumplen  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $DI(M) = 1$ , lo que se interpreta como matrices asociadas a sistemas no despolarizantes diatenuantes.

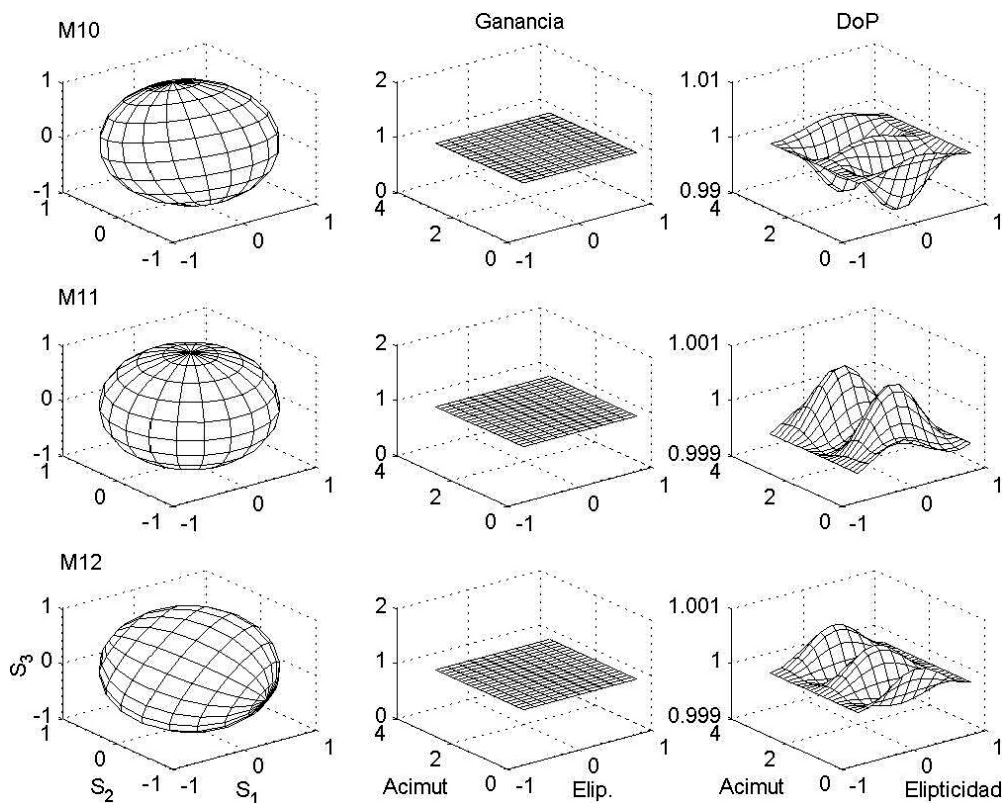


FIGURA 6. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para las matrices  $M10, M11, M12$ , con métrica  $Q(M) = 3$ , lo que se interpreta como asociadas a sistemas no despolarizantes no diatenuantes.

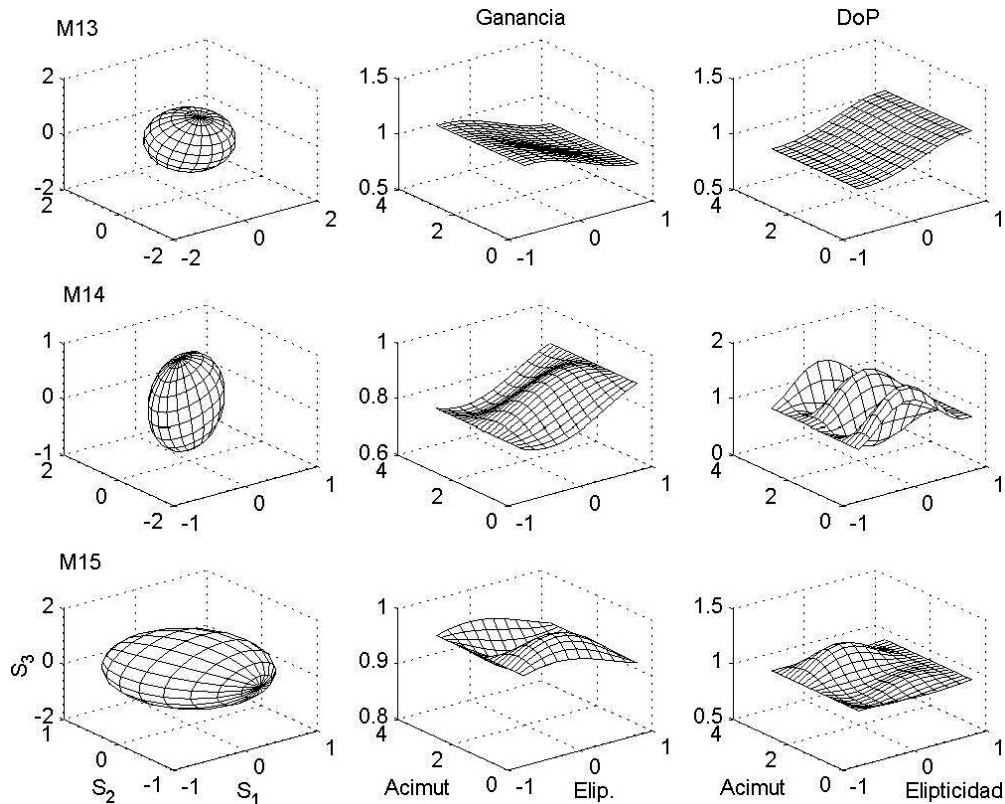


FIGURA 7. Representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para las matrices  $M_{13}$ ,  $M_{14}$ ,  $M_{15}$ , que cumplen  $Q(M) > 3$ , lo que se interpreta como matrices asociadas a sistemas físicamente inconsistentes.

nuador lineal ideal horizontal y a +45 grados y uno circular derecho, respectivamente.

Observe que la representación de Poincaré contiene solamente vectores de Stokes emergentes del sistema de acuerdo a la orientación del eje de transmisión del diatenuador ideal. La condición de sobreganancia varía de acuerdo al estado de polarización incidente y para todos ellos el grado de polarización es uniforme e igual a la unidad.

La Fig. 2 muestra la representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para un retardador de cuarto de onda lineal ideal, cuando su eje rápido está orientado en dirección horizontal (0 grados), a +22.5 grados y a +45 grados, respectivamente.

Observe que se experimenta un giro en la esfera de Poincaré en el plano formado por los vectores de Stokes  $S_1 - S_2$ , a medida que varía la orientación del eje rápido de la placa de cuarto de onda: Este comportamiento ya ha sido previamente estudiado [22]. Por lo demás, las condiciones de sobreganancia y de sobrepolarización exhiben un comportamiento uniforme y máximo para cualquier vector de Stokes incidente.

En la Fig. 3 se muestra la representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para las matrices  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , asociadas a sistemas despolarizantes para los que se cumple  $0 < Q(M) < 1$  (Apéndice A).

Las matrices  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  de la Fig. 3, poseen grados de polarización con valores físicamente consistentes (meno-

res a la unidad). Observe que ninguna cumple con la condición de sobreganancia, pues poseen valores superiores a la unidad, dentro del límite de aproximación en que fueron originalmente reportadas. Esto se interpreta físicamente como matrices de Mueller asociadas a sistemas no pasivos.

La Fig. 4 exhibe la representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para tres matrices que cumplen con las condiciones  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $0 < DI(M) < 1$ .

De acuerdo a la definición de los límites para  $Q(M)$ , todas las matrices de la Fig. 4 corresponden a sistemas despolarizantes [7-8] (Apéndice B). Observe, sin embargo, que el sistema físico representado por la matriz  $M_6$  no es físicamente consistente, ya que el grado de polarización posee valores superiores a la unidad, para varios estados de polarización de la luz incidente (no cumple con la condición de sobrepolarización).

La Fig. 5 exhibe la representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para tres matrices que cumplen con las condiciones  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $DI(M) = 1$ .

De acuerdo a la definición de los límites para  $Q(M)$ , las matrices  $M_7$ ,  $M_8$ ,  $M_9$  de la Fig. 5, corresponden a sistemas no despolarizantes diatenuantes [7-8] (Apéndice C). Observe que los sistemas son ligeramente inconsistentes físicamente, ya que el grado de polarización es mayor a la unidad para



algunos estados de polarización posibles (si el error fuera de un 1 %, esta situación no se presentaría para  $M8$ , pero sí para las restantes matrices  $M7, M9$ , ver Apéndice C).

Por su parte, la Fig. 6 muestra la representación de Poincaré y las condiciones de sobreganancia y sobrepolarización para las matrices  $M10, M11, M12$ , que cumplen con las condiciones  $Q(M) = 3$ . De acuerdo a la definición de los límites para  $Q(M)$ , todas ellas corresponden a sistemas no despolarizantes no diatenuantes [7-8] (Apéndice D).

Finalmente, la Fig. 7 presenta las matrices  $M13, M14, M15$ , para las cuales  $Q(M) > 3$ . Este resultado se asocia a sistemas físicamente inconsistentes (Apéndice E).

### 4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un breve repaso de los principales conceptos polarimétricos y las métricas de despolarización escalares existentes. Se ha aplicado la métrica  $Q(M)$  y se ha realizado un análisis polarimétrico gráfico a una serie de casos representativos de sistemas ópticos comúnmente utilizados en diversas áreas del quehacer científico. Así mismo, confirmamos que  $Q(M)$  es una métrica completa y que el criterio de sobrepolarización [13] puede emplearse como un primer criterio, confiable, para identificar matrices de Mueller físicamente consistentes.

### Agradecimientos

R. Espinosa-Luna agradece al CONACYT (proyecto 83182) por el apoyo recibido para la realización de este trabajo. Los autores han realizado este trabajo en el contexto del Grupo Interinstitucional de Polarización y Scattering (GIPYS) y agradecen el apoyo logístico recibido de sus respectivas instituciones.

### Apéndice A

Matrices despolarizantes para las que  $0 < Q(M) < 1$ . Las matrices  $M1, M2$  y  $M3$  fueron tomadas de las Refs. 26, 27 y 28, respectivamente.

$$M1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0227 & -0.0031 & -0.0028 \\ 0.0077 & 0.2066 & -0.0038 & -0.0096 \\ 0.0009 & -0.0121 & -0.2225 & -0.0024 \\ 0.0035 & 0.0118 & -0.0082 & -0.1306 \end{bmatrix},$$

$$M2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.009 & -0.021 & -0.041 \\ -0.002 & 0.256 & -0.029 & -0.003 \\ 0.024 & 0.045 & 0.235 & -0.032 \\ 0.041 & 0.024 & 0.017 & 0.538 \end{bmatrix},$$

$$M3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.0013 & -0.0015 & -0.0010 \\ 0.00 & 0.9963 & -0.0083 & -0.0005 \\ -0.0007 & 0.0068 & -0.0049 & 0.0029 \\ 0.0013 & 0.0033 & -0.0013 & -0.0046 \end{bmatrix}.$$

### Apéndice B

Matrices despolarizantes para las que  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $0 < DI(M) < 1$ . Las matrices  $M4$  y  $M6$  fueron tomadas de la Ref. 29, y la matriz  $M5$  de la Ref. 30.

$$M4 = \begin{bmatrix} 1 & -0.0146 & 0.0509 & 0.0243 \\ 0.0004 & 0.7163 & 0.0268 & -0.0250 \\ 0.0078 & -0.0544 & 0.7277 & 0.0104 \\ 0.0571 & 0.0010 & 0.0035 & 0.6163 \end{bmatrix},$$

$$M5 = \begin{bmatrix} 0.7599 & 0.0295 & 0.1185 & -0.0623 \\ 0.0384 & 0.5394 & 0.0282 & -0.1714 \\ 0.1240 & -0.012 & 0.6608 & 0.2168 \\ -0.0573 & -0.1811 & -0.1863 & 0.4687 \end{bmatrix},$$

$$M6 = \begin{bmatrix} 1 & -0.0118 & 0.0279 & 0.0001 \\ 0.0045 & 0.9956 & 0.0013 & 0.0350 \\ 0.0012 & 0.0341 & 0.9838 & 0.0083 \\ 0.0092 & 0.0178 & -0.0002 & 0.9956 \end{bmatrix}.$$

### Apéndice C

Matrices despolarizantes para las que  $1 \leq Q(M) < 3$  y  $DI(M)=1$ . Las matrices  $M7$  y  $M9$  fueron tomadas de la Ref. 27, y la matriz  $M8$  de la Ref. 26.

$$M7 = \begin{bmatrix} 1 & 0.09 & -0.093 & -0.2 \\ 0.155 & 0.874 & 0.119 & -0.435 \\ -0.179 & 0.303 & 0.487 & 0.804 \\ 0.029 & 0.310 & -0.837 & 0.383 \end{bmatrix},$$

$$M8 = \begin{bmatrix} 0.19 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.19 \end{bmatrix},$$

$$M9 = \begin{bmatrix} 1 & -0.06 & -0.031 & 0 \\ -0.06 & 1 & 0.001 & 0 \\ -0.031 & 0.001 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.998 \end{bmatrix}.$$

### Apéndice D

Matrices no despolarizantes no diatenuantes para las que  $Q(M) = 3$ . Las matrices  $M10, M11$  y  $M12$  fueron tomadas de las Refs. 27.

$$M10 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.988 & -0.152 & -0.022 \\ 0 & 0.151 & 0.986 & -0.067 \\ 0 & 0.032 & 0.063 & 0.998 \end{bmatrix},$$

$$M11 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99 & -0.138 & -0.027 \\ 0 & 0.136 & 0.99 & -0.048 \\ 0 & 0.033 & 0.044 & 0.998 \end{bmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.857 & 0.283 & -0.431 \\ 0 & 0.265 & 0.475 & 0.839 \\ 0 & 0.443 & -0.833 & 0.332 \end{bmatrix}.$$

## Apéndice E

Matrices físicamente inconsistentes para las que  $Q(M) > 3$ . Las matrices  $M_{13}$ ,  $M_{14}$  y  $M_{15}$  fueron tomadas de las Refs. 12, 31 y 32, respectivamente.

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0.019 & 0.021 & -0.130 \\ -0.024 & -0.731 & -0.726 & 0.005 \\ 0.008 & 0.673 & -0.688 & -0.351 \\ -0.009 & 0.259 & -0.247 & 0.965 \end{bmatrix},$$

$$M_{14} = \begin{bmatrix} 0.8488 & -0.0503 & 0.0294 & 0.0617 \\ -0.0503 & 0.8304 & 0.0913 & -0.0920 \\ 0.0294 & 0.913 & 0.8277 & 0 \\ 0.0617 & -0.0920 & 0 & 0.7947 \end{bmatrix},$$

$$M_{15} = \begin{bmatrix} 0.946 & 0.019 & 0.048 & -0.016 \\ -0.024 & -0.848 & 0.322 & 0.314 \\ 0.003 & -0.261 & 0.087 & -0.885 \\ 0.037 & -0.293 & -0.981 & -0.071 \end{bmatrix}.$$

1. J.J. Gil and E. Bernabeu, *Opt. Acta/J. Mod. Opt.* **32** (1985) 259.
2. J.J. Gil and E. Bernabeu, *Opt. Acta/J. Mod. Opt.* **33** (1986) 185.
3. J.J. Gil and E. Bernabeu, *Optik* **76** (1987) 67.
4. S.Y. Lu and R.A. Chipman, *Opt. Commun.* **146** (1998) 11.
5. B. DeBoo, J. Sasian, and R. Chipman, *Opt. Express* **12** (2004) 4941.
6. R. Chipman, *Appl. Opt.* **44** (2005) 2490.
7. R. Espinosa-Luna and E. Bernabeu, *Opt. Commun.* **277** (2007) 256.
8. R. Espinosa-Luna, E. Bernabeu, and G. Atondo-Rubio, *Appl. Opt.* **47** (2008) 1575.
9. J.J. Gil, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **40** (2007) 1.
10. R.M.A. Azzam and N.M. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (North-Holland, Amsterdam, 1989).
11. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics, 7<sup>th</sup> (expanded) ed.* (Cambridge, 2005).
12. D. Goldstein, *Polarized Light* (Marcel Dekker, NY, 2003).
13. C. Brosseau, *Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach* (John Wiley, NY, 1998).
14. R. Espinosa-Luna, G. Atondo-Rubio, E. Bernabeu, and S. Hinojosa-Ruíz, *Optik* (2009) doi:10.1016/j.ijleo.2008.12.030.
15. E.L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics* (John Wiley, NY, 1963), pp. 135.
16. D.G.M. Anderson and R. Barakat, *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994) 2305.
17. J.W. Hovenier, H.C. van de Hulst and C.V.M. van der Mee, *Astron. Astrophys.* **157** (1986) 301.
18. R. Espinosa-Luna, *Appl. Opt.* **46** (2007) 6047.
19. R. Espinosa-Luna, D. Rodríguez-Carrera, E. Bernabeu, and S. Hinojosa-Ruíz, *Optik* **119** (2008) 757.
20. C. Whitney, *J. Opt. Soc. Am.* **61** (1971) 1207.
21. J.J. Gil and E. Bernabeu, *Optik* **76** (1978) 67.
22. C. Ferreira, I. San José, J.J. Gil, and J.M. Correias, *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano* **33** (2006) 115.
23. P. Eliés, B. Le Jeune, P. Olivard, J. Cariou, and J. Lotrian, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** (1977) 2520.
24. G. Atondo-Rubio, R. Espinosa-Luna, and A. Mendoza-Suárez, *Opt. Commun.* **244** (2005) 7.
25. O.G. Rodríguez-Herrera and N.C. Bruce, *Opt. Eng.* **45**, Art. 053602 (2006) 1.
26. C. Collet, J. Zallat, and Y. Takakura, *Opt. Express* **12** (2004) 1271.
27. S. Manhas, *et al.*, *Opt. Express* **14** (2006) 190.
28. M.H. Smith, *Appl. Opt.* **41** (2002) 2488.
29. J. Cariou, B. Le Jeune, J. Lotran, and Y. Guern, *Appl. Opt.* **29** (1990) 1689.
30. A. Aiello, G. Puentes, D. Voigt, and J. P. Woerdman, *Opt. Lett.* **31** (2006) 817.
31. B. J. Howell, *Appl. Opt.* **18** (1979) 809.
32. L. Giudicotti and M. Brombin, *Appl. Opt.* **46** (2007) 2638.