

Umbral de percolación de sitios. Pequeñas celdas bidimensionales asimétricas

W. Lebrecht y J.F. Valdés

Departamento de Física, Universidad de La Frontera,

Casilla 54-D, Temuco, Chile,

e-mail: lebrecht@ufro.cl; jvaldes@ufro.cl

Recibido el 23 de marzo de 2009; aceptado el 30 de junio de 2009

Site percolation thresholds p_c and critical exponent ν associated to square lattices, triangular lattices and hexagonal lattices are obtained. We consider a methodology consisting in the growth in size of cells for each geometry, denoted for M . A site is occupied with probability p and $1 - p$ if it is not occupied. Two directions of the plane: horizontal and vertical, through asymmetrical cells are considered for studying site percolation phenomena, so, a percolation functions associated to horizontal or vertical direction, $f^H(M, p)$ or $f^V(M, p)$ are obtained respectively. Using finite scaling techniques, the critical points at the thermodynamic limit are obtained. Site percolation thresholds are compared through three different ways: first, using the maximum of the derivative of the function $f^{(H,V)}(M, p)$ denoted by $p_p^{(H,V)}(M)$, second, considering the solution of the equation $f^{(H,V)}(M, p) = p$, denoted by $p_g^{(H,V)}(M)$, and third, using the cross-point of the curves associated to percolation thresholds for horizontal and vertical directions, represented by $p_f(M)$. Critical exponent ν is obtained through two different ways: first, using the maximum of the derivative defined as $f'^{(H,V)}(M, p_p)$, and second, considering the cross point of both derivatives $f'(M, p_f)$. The values associated to site percolation thresholds and critical exponent ν are in good agreement with the similar ones informed in literature, validating the methodology proposed here.

Keywords: Percolation; percolation threshold; critical exponent.

Se estudia el umbral de percolación de sitios p_c y el exponente crítico ν en redes cuadradas, triangulares y hexagonales. Para ello se usa la metodología de hacer crecer pequeñas celdas de tamaño M en cada geometría. Se considera la probabilidad p si un sitio está ocupado y $1 - p$ si está desocupado. Con el fin de incorporar la percolación en las dos direcciones que define el plano (horizontal y vertical), se consideran celdas asimétricas, cuya función de percolación está respresentada por $f^H(M, p)$ o $f^V(M, p)$, dependiendo si se trata de percolación horizontal o vertical, respectivamente. Usando la técnica de escalamiento de tamaño finito, se calculan los puntos críticos que caracterizan el fenómeno en el límite termodinámico. Se comparan los umbrales de percolación mediante tres formas diferentes, aquel correspondiente el máximo de la derivada de la funciones $f^{(H,V)}(M, p)$ denotado por $p_p^{(H,V)}(M)$, el que determina la resolución del polinomio $f^{(H,V)}(M, p) = p$, denotado por $p_g^{(H,V)}(M)$ y el que se encuentra mediante el cruce de las curvas de los umbrales de percolación horizontal y vertical, representado por $p_f(M)$. Por otro lado, el exponente crítico ν se obtiene de dos formas diferentes, aquella relacionada con el máximo de la derivada definida como $f'^{(H,V)}(M, p_p)$ y con el punto de cruce de los umbrales de percolación horizontal y vertical sobre cada tipo de celda y definida como $f'(M, p_f)$. Los valores encontrados tanto para el umbral de percolación de sitio asociado a cada geometría, como el exponente crítico ν están en buena correspondencia con los informados en la literatura, lo que valida la metodología aquí propuesta.

Descriptores: Percolación; umbral de percolación; exponente crítico.

PACS: 64.60.Ak; 64.60.Fr

1. Introducción y teoría

La teoría de percolación fue introducida por Broadbent y Hammersley como un modelo para estudiar la propagación de fluidos en medios porosos [1]. Este proceso se lleva a cabo mediante la dispersión de partículas de fluido a través de un medio aleatorio o desordenado que eventualmente puede ser, entre otros, el espacio poroso de una roca, el suelo o un arreglo de árboles. El efecto observado fue relacionado con propiedades de conectividad, mediante dos formas: a) la interacción entre sus moléculas, denominada percolación de sitios; y b) la interacción a través de sus enlaces químicos, denominada percolación de enlaces. Desde entonces, la teoría de percolación ha concentrado gran interés debido a su simplicidad y aplicabilidad. Los estudios canónicos están dentro de la mecánica estadística y fundamentalmente en temas relacionados con transiciones de fase [2-4]. Los resultados respecto de los umbrales de percolación son diferentes en cuanto a cómo

se conectan sus moléculas; sin embargo, el comportamiento global, definido a través de sus exponentes críticos tiende a la auto-organización y universalidad [5-9]. El fenómeno de percolación se analiza en diferentes ramas del conocimiento, tales como: modelos matemáticos basados en teoría de grafos para aglomerados o *clusters* infinitos [10-11], formación de estructuras biológicas con características de sistemas complejos y auto-organizados [12] y, actualmente, en modelos aplicados a comportamientos sociales [13,14]. Especial atención presentan los estudios de percolación asociados a dímeros, polímeros y k-meros [15-17].

En este trabajo se desarrolla una metodología para determinar el umbral de percolación p_c y el exponente crítico ν para percolación de sitios en redes cuadradas (SL), triangulares (TL) y hexagonales (HL). Para ello se consideran pequeñas celdas asimétricas de tamaño M , donde se supone que si un sitio está ocupado, su probabilidad es p ; en tanto,

$1 - p$ si está vacío [18,21]. La celda definida mediante una función polinomial $f^{(H,V)}(M, p)$ permite estudios de percolación horizontal (PH) y percolación vertical (PV), quedando representada por la función $f^H(M, p)$ y $f^V(M, p)$, respectivamente. Una trayectoria de percolación consiste en conectar ambos extremos de la celda a través de sitios ocupados. Las trayectorias de percolación tienen diferentes longitudes y están determinadas por la cantidad de sitios ocupados. Así, para una celda cualquiera se observa una longitud mínima de percolación L_{min} y una máxima determinada por el tamaño de la celda $L_{max} = M$. La metodología propuesta calcula todas las trayectorias de percolación para las celdas SL, TL y HL, primero se establece PH y luego PV de manera independiente. Estas funciones pueden ser descritas analíticamente como

$$f^{(H,V)}(M, p) = \sum_{i=L_{min}}^M g(i, M)^{(H,V)} p^i (1 - p)^{M-i}, \quad (1)$$

donde $g(i, M)^{(H,V)}$ representa el número de trayectorias percolantes de longitud i , ya sea en PH o PV, respectivamente.

Para calcular las trayectorias percolantes y sus longitudes se han usado cálculos numéricos basados en algoritmos computacionales, los cuales han sido desarrollados para el presente trabajo por los autores [22] y consiste en una enumeración secuencial de los sitios en cada celda mediante 1 ó 0. El algoritmo considera las entradas fijas para cada tamaño de la celda, igual que las salidas de ésta. Luego, compara al final del recorrido contando sólo unos si existe percolación e indica la longitud de la trayectoria percolante. Una vez que ha registrado todas las posibles combinaciones, suma y ordena, para obtener los coeficientes polinomiales en función de la longitud. Con ello se han determinado en forma exacta los coeficientes polinomiales para las celdas propuestas; sin embargo, para celdas de mayor tamaño, se requieren tiempos de cálculo computacional más prolongados, lo que limita el estudio del presente trabajo, esto ocurre para funciones polinomiales $f^{(H,V)}(M, p)$ de grado superior a 40. Este procedimiento se realiza para celdas de las redes SL, TL y HL y se usa escalamiento de tamaño finito, para buscar las tendencias en el límite termodinámico. La Fig. 1 ilustra el concepto de trayectoria percolante para redes de sitios SL ($M = 30$), TL ($M = 30$) y HL ($M = 38$), respectivamente. Estas celdas son las de mayor tamaño resueltas en el presente trabajo y en el caso de la red HL, cuyo polinomio es de grado 38, el número total de trayectorias percolantes alcanza el valor 8.976.313.852 para PH y 29.234.367.485 para PV, las cuales se clasifican por la longitud de la trayectoria percolante. En la figura las flechas verticales representan los sitios iniciales o de entrada para medir PV, en cambio las horizontales y diagonales representan los sitios iniciales para medir PH. La percolación se ilustra en cada celda de la figura cuando dos sitios de color negro están ligados a sus vecinos próximos por las caras, no por los vértices de ella.

En la red SL (Fig. 1a) se observa una trayectoria percolante con ocho sitios que admite sólo PH (notar que la

longitud menor de la trayectoria percolante para esta celda incluye sólo seis sitios, donde el número total de trayectorias percolantes de esta longitud es cinco), en cambio para la red TL (Fig 1b), la trayectoria percolante admite PH y PV y está compuesta por once sitios (la longitud menor de la trayectoria percolante horizontal incluye sólo seis sitios, en cambio la longitud menor de la trayectoria percolante vertical incluye cinco sitios). Para la celda de la red HL (Fig. 1c), los catorce sitios que componen la longitud de la trayectoria percolante admiten sólo PV, aun cuando existen otros sitios ocupados que no pertenecen al dominio mayor. Se puede observar que el dominio mayor es el que percola con sus ocho sitios conectados. La longitud menor de la trayectoria percolante horizontal admite nueve sitios, en cambio la longitud menor de la trayectoria percolante vertical admite sólo siete sitios. Cuando todos los sitios están ocupados, se dice que existe una sola trayectoria percolante de longitud igual a su tamaño M .

La Fig. 2 es una curva típica de umbrales de percolación [23], correspondiente a la derivada de la función $f^{(H,V)}(M, p)$ que ha sido desarrollada para celdas hexagonales de tamaño $M = 10$, $M = 22$ y $M = 38$. La línea continua gris corresponde a umbrales de PH, en cambio la línea continua negra a umbrales de PV.

Se indica además con cuadrados negros los puntos máximos de la curva representados por la derivada en ese punto $f'(M, p_p^{(H,V)})$ y los triángulos blancos el punto de cruce de las curvas $f'(M, p_f)$. Definimos los valores de $p_p^{(H,V)}(M)$ y $p_f(M)$ como puntos críticos del sistema, puesto que representan una transición a que los sitios permanezcan cada vez más unidos y formen un único aglomerado. Por otro lado, se observa en la gráfica cómo los máximos de las

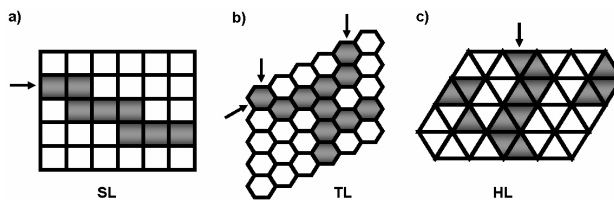


FIGURA 1. Celdas para las geometrías SL, TL y HL que muestran trayectorias percolantes, ya sea en forma horizontal como vertical.

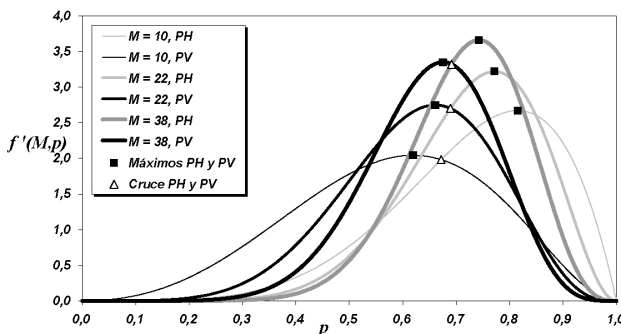


FIGURA 2. Umbral de percolación para celdas hexagonales, tanto para PH, como para PV.

curvas de PH y PV y también sus puntos críticos se acercan a un único valor mientras crece el tamaño de las celdas y desaparece el efecto de asimetría.

Los polinomios $f^{(H,V)}(M, p)$ que representan cada celda asimétrica de las redes SL, TL y HL permiten determinar el umbral de percolación de tres formas distintas, las cuales se determinan de la siguiente manera:

Forma 1: Calculando la derivada de $f^{(H,V)}(M, p)$ y obteniéndose el valor para la cual esta función es máxima. Estos valores son representados por $p_p^{(H,V)}(M)$.

Forma 2: Calculando la derivada de las funciones $f^{(H,V)}(M, p)$ y obteniendo el punto de cruce de ellas, esto es $f'^H(M, p_f) = f'^V(M, p_f)$ y representado por $p_f(M)$.

Forma 3: Calculando la probabilidad de que un sitio ocupado cualquiera pertenece a un aglomerado, lo que significa resolver la ecuación $f^{(H,V)}(M, p_g) = p_g^{(H,V)}$ y calcular $p_g^{(H,V)}(M)$.

Por otro lado, el exponente crítico $\nu(M)$ para cada celda puede ser calculado basado en el concepto de que la longitud de correlación diverge en el umbral de percolación, lo que caracteriza al sistema como crítico [7,9,24]. Para nuestro caso, el tamaño de las celdas es finito y esta longitud de correlación no diverge y lo que se observa es un máximo en el punto crítico, cuyo valor tiende a ser único y se puede calcular reescalando la celda en cierta longitud $L(M)$ definida como el promedio de sus trayectorias mínimas de percolación de la siguiente manera:

$$L(M) = \frac{L_{min}^H(M) + L_{min}^V(M)}{2}, \tag{2}$$

de este modo, la primera forma (I) como se calcula el exponente crítico es considerando los máximos de las curvas de los umbrales de percolación, a través de la expresión

$$L(M)^{\frac{1}{\nu(M)}} = \langle f'^{(H,V)}(M, \langle p_p(M) \rangle) \rangle, \tag{3}$$

donde $\langle \rangle$ representa un promedio ponderado de las funciones asociadas a percolación horizontal y vertical que está definido más adelante. Alternativamente la segunda forma (II) es considerando el cruce de ambas curvas de umbrales de percolación para PH y PV y definida como

$$L(M)^{\frac{1}{\nu^*(M)}} = f'(M, p_f). \tag{4}$$

Con el fin de ejemplificar y calcular los umbrales de percolación $p_p^{(H,V)}(M)$, $p_g^{(H,V)}(M)$ y $p_f(M)$ y los exponentes críticos $\nu(M)$ y $\nu^*(M)$ usemos una celda cuadrada de tamaño $M = 6$ que muestra la Fig. 3.

Allí se ilustran las distintas trayectorias percolantes sólo de longitud cuatro, tanto para PH, parte a) de la figura, como PV parte b) de la figura. Se observan ocho trayectorias percolantes para PH y quince para PV, que corresponden a los coeficientes polinomiales para esa longitud. Para esta celda, se encuentran las siguientes funciones de percolación hori-

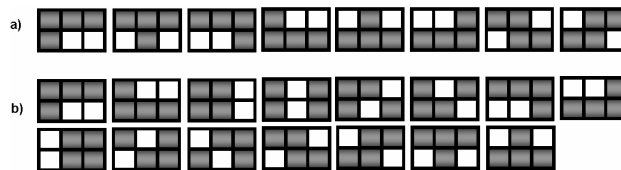


FIGURA 3. Celda cuadrada de tamaño 6, en la cual se indican trayectorias percolantes. a) 8 trayectorias percolantes horizontales, b) 15 trayectorias percolantes verticales.

zontal y vertical considerando todas las trayectorias percolantes:

$$\begin{aligned} f^H(6, p) &= 2p^3(1-p)^3 \\ &\quad + 8p^4(1-p)^2 + 6p^5(1-p) + p^6 \\ &= 2p^3 + 2p^4 - 4p^5 + p^6, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f^V(6, p) &= 3p^2(1-p)^4 + 12p^3(1-p)^3 \\ &\quad + 15p^4(1-p)^2 + 6p^5(1-p) + p^6 \\ &= 3p^2 - 3p^4 + p^6. \end{aligned} \tag{6}$$

Ambos polinomios representan la celda, cuyo grado máximo da cuenta de su tamaño. Además, su grado mínimo representa la longitud de la trayectoria percolante que contiene el menor número de sitios definida anteriormente como $L_{min}^{(H,V)}$. Analizando cada una de estas funciones se puede determinar que cada una de ellas posee un máximo en $f'^{(H,V)}(6, p_p^{(H,V)})$, correspondiente a la derivada de la función $f^{(H,V)}(6, p)$ evaluada en $p = p_p^{(H,V)}(6)$. Esto significa que los sitios ocupados forman un único dominio percolante para $p > p_p^{(H,V)}(6)$ y cualquier otro sitio que se agregue forma parte de ella. En nuestro caso y siguiendo la nomenclatura se tiene $p_p^H(6) = 0.697$ y $p_p^V(6) = 0.447$, cuyos máximos se encuentran en $f'^H(6, 0.697) = 1.891$ y en $f'^V(6, 0.447) = 1.717$. Con estos datos el umbral de percolación $p_p(6)$ de la celda corresponde al promedio ponderado definido como

$$\begin{aligned} p_p(6) &= \frac{p_p^H(6)f'^H(6, p_p^H) + p_p^V(6)f'^V(6, p_p^V)}{f'^H(6, p_p^H) + f'^V(6, p_p^V)} = 0.578. \end{aligned} \tag{7}$$

El umbral de percolación representado por $p_f(6)$ consiste en igualar las derivadas de las funciones de las Ecs. (5) y (6), esto es, $f'^H(6, p_f) = f'^V(6, p_f)$, en cuyo caso se encuentra el valor $p_f(6) = 0.548$ y su derivada a $f'(6, 0.548) = 1.610$. Por otro lado, para calcular el umbral de percolación $p_g(6)$ se deben resolver las dos ecuaciones

$$f^{(H,V)}(6, p_g^{(H,V)}) = p_g^{(H,V)},$$

cuyos valores son $p_g^H(6) = 0.808$ y $p_g^V(6) = 0.389$. Para encontrar el valor representativo para ese tamaño se pondera respecto de la trayectoria mínima de percolación, esto es,

$$p_g(6) = \frac{p_g^H(6)L_{min}^H(6, p_g^H) + p_g^V(6)L_{min}^V(6, p_g^V)}{L_{min}^H(6, p_g^H) + L_{min}^V(6, p_g^V)} = 0.640. \quad (8)$$

El exponente crítico representado por $\nu(6)$ y por $\nu^*(6)$ se obtiene calculando los valores máximos del umbral de percolación (forma I) y el valor del cruce en la curva del umbral de percolación (forma II) de acuerdo a las Ecs. (3) y (4), respectivamente. Los dos valores para los $f^{(H,V)}(6, p_p^{(H,V)})$ son promediados respecto del número total de trayectorias percolantes de la celda para el caso de PH y para el caso de PV. De este modo, contabilizando 17 trayectorias percolantes totales en el caso PH y 37 en el caso PV el valor máximo ponderado es $\langle f'(6, p_p) \rangle = 1.772$. Reemplazando en las ecuaciones respectivas, se encuentra

$$\nu(6) = \frac{\ln L(6)}{\ln \langle f'(6, p_p) \rangle} = 1.602$$

$$\nu^*(6) = \frac{\ln L(6)}{\ln f'(6, p_f)} = 1.923. \quad (9)$$

Los valores del ejemplo difieren de los informados en la literatura [4,9,19], sin embargo, se espera que mientras mayor sea el tamaño de la celda mejor es el ajuste.

Este mismo razonamiento se empleó para obtener las 6 funciones polinomiales asociadas a la percolación horizontal y vertical de las 3 celdas HL mostradas anteriormente en la Fig. 2. En este caso en particular, se ilustra el polinomio que representa los umbrales de percolación PH y PV.

A continuación se muestran los principales resultados que incluyen las tendencias del umbral de percolación p_c y exponente crítico ν calculado para redes SL, TL y HL en percolación de sitios. Para el caso de la red SL y TL se usaron cuatro celdas, de tamaños $M = 6, M = 12, M = 20$ y $M = 30$ que son las mínimas posibles para garantizar PH y PV, análogamente en el caso de la red HL se usaron tres celdas, $M = 10, M = 22$ y $M = 38$.

2. Resultados

La gráfica de la Fig. 4 muestra el resultado de los valores $\nu(M)$ y $\nu^*(M)$ calculados a través de la Ec. (3) y de la Ec. (4) para las celdas definidas en cada caso SL, TL y HL. Se ha identificado con el color negro la Ec. (3) del promedio del máximo de la derivada $\langle f'(M, p_p) \rangle$ y con el color gris la Ec. (4) asociada al cruce $f'(M, p_f)$. Para cada forma de cálculo, los símbolos cuadrados representan una red SL, los triángulos una red TL y los rombos una red HL. Las pendientes de cada recta representa el exponente crítico ν , el cual se ilustra con una línea segmentada para el caso particular de la Ec. (4) que muestra una mejor respuesta. Complementando esta información, se incluyen las ecuaciones de las líneas

rectas que representan los puntos $\nu^*(M)$. La pendiente en cada caso es constante y se ajusta al valor esperado $4/3$ lo que representa la criticalidad y universalidad del fenómeno. Las pendientes de las rectas para el caso de la Ec. (3) son 1.522 para SL, 1.617 para TL y 1.510 para HL, en la cual se consideraron promedios ponderados. Llama la atención lo cercano que se observan los puntos $\nu(M)$ y $\nu^*(M)$ en las celdas SL y TL, explicándose este efecto por considerar mismos tamaños de celdas para ambas geometrías.

La Fig. 5 representa el umbral de percolación de sitios p_c para cada una de las geometrías SL, TL y HL. La gráfica ha sido escalada a la trayectoria mínima de percolación definida por la Ec. (2) y al exponente crítico $\nu = 4/3$. La nomenclatura de los símbolos incluye la geometría y las distintas formas de cálculo como se puede observar en el recuadro inferior de la figura. Las líneas segmentadas representan las ecuaciones de las rectas de cada punto y en la parte derecha se ha incluido el valor con que cruza el eje vertical. Se observa para la red TL que las tres formas de calcular el umbral de percolación se obtiene una línea recta que está montada en $p_c = 0.5$. Este valor es el que se informa para esta red mediante diferentes metodologías. Además, se observa que la forma 3 es la que mejor describe los umbrales de percolación en cada caso, representada por símbolos en negro, especialmente para la

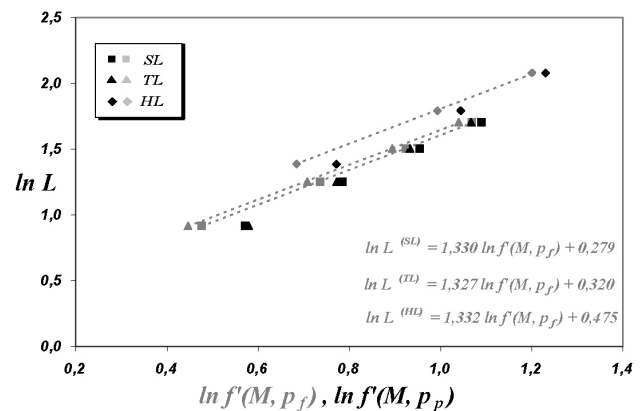


FIGURA 4. Exponente crítico ν y ν^* para las redes SL, TL y HL.

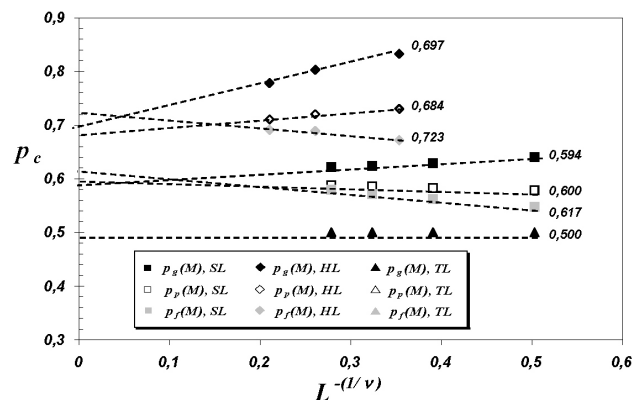


FIGURA 5. Umbral de percolación de sitio p_c para redes SL, TL y HL.

red SL y la red HL. Ellos están en perfecto acuerdo con aquellos informados en la literatura por distintos y variados procedimientos numéricos, lo cual valida la metodología propuesta. Para la red SL y HL la forma 1 correspondiente al máximo de la derivada representado por p_p (símbolos vacíos) informa valores cercanos, pero con una buena aproximación al fenómeno, en cambio la forma 2, correspondiente al punto de cruce de las curvas de los umbrales de percolación, no refleja el fenómeno, cuyos valores están por encima de los esperados.

3. Conclusiones

Se puede concluir que el estudio mediante el crecimiento de pequeñas celdas asimétricas, permite determinar el umbral de percolación de sitio en las redes SL, TL y HL y el exponente crítico que caracteriza la longitud de correlación. Mientras mayor sea el grado de la función polinomial, mejor es la descripción del fenómeno. La Fig. 5 ilustra un número satisfactorio para p_c en todas las geometrías cuando se resuelven las ecuaciones $f^{(H,V)}(M, p_g) = p_g^{(H,V)}$ para cada celda

y se escala respecto de la longitud mínima de percolación. Por otro lado, la Fig. 4, que caracteriza el exponente crítico ν , muestra un mejor comportamiento cuando se considera el cruce de las funciones correspondiente al umbral de percolación de las celdas asimétricas, siendo su valor constante para las tres geometrías en estudio, representando la universalidad del fenómeno de percolación. El presente trabajo y su metodología permite estudios de otras geometrías, tales como aquellas arquimedianas, donde se mezclan las topologías presentadas. De igual modo, la presente metodología se puede aplicar a estudios de percolación en 3D, tanto en enlaces, como en sitios. Otro fenómeno interesante donde se puede aplicar esta metodología corresponde a percolación de sitios correlacionados, tales como dímeros y k-meros.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad de la Frontera a través del proyecto DIDUFRO DI 09-102 por el apoyo parcial en el desarrollo de este trabajo.

-
1. S.R. Broadbent y J.M. Hammersley, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957) 629.
 2. J.W. Essam, *Rep. Prog. Phys.* **43** (1980) 834.
 3. H. Kesten, *Percolation Theory for Mathematicians* (Birkhauser, Boston, 1982).
 4. D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1985).
 5. J.C. Wierman, D. Passen Naor y Rulian Cheng, *Phys. Rev E* **72** (2005) 066116.
 6. Chin-Kun Hu y Chai-Yu Lin, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 8.
 7. Ming-Chang Huang y Hsiao-Ping Hsu, *International Journal of Modern Physics C* **3** (2002) 383.
 8. P.N. Suding y R. Ziff, *Phys. Rev. E* **60** (1999) 275.
 9. F. Yonezawa, S. Sakamoto y M. Hori, *Phys. Rev. B*, **40** (1989) 636.
 10. G. Grimmett, *Percolation Theory* (Springer-Verlag, NY, 1999).
 11. S. Smirnov y W. Werner, *Mathematical Research Letters*, **8** (2001) 729.
 12. Kim Sneppen y Giovanni Zocchi, *Physics in Molecular Biology* (Cambridge, NY, 2005).
 13. S. Salomón, G. Weisbuch, Lucilla de Arcangelis, N. Jan y D. Stauffer, *Physica A* **277** (2000) 239.
 14. Ana Proykova y Dietrich Stauffer, *Physica A* **312** (2002) 300.
 15. M. Quintana, I. Kornhauser, R. Lopez, A.J. Ramirez-Pastor y G. Zgrablich, *Physica A* **361** (2006) 195.
 16. M. Dolz, F. Nieto y A.J. Ramirez-Pastor, *Phys. Rev. E* **72** (2005) 066129.
 17. V. Cornette, A.J. Ramirez-Pastor y F. Nieto, *Phys. Lett. A* **353** (2006) 452.
 18. C. Tsallis, A. Coniglio y G. Schwachheim, *Phys. Rev. B* **32** (1985) 3322.
 19. R.M. Ziff y M.E.J. Newman, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 016129.
 20. André Rosowsky, *Eur. Phys. Journal B* **15** (2000) 77.
 21. M.Z. Bazant, *Physica A*, **316** (2002) 29.
 22. E.E. Vogel, *Comunicación privada*.
 23. W. Lebrecht, M. Cecilia Fuentes y E.E. Vogel, *Rev. Mex. Fís.* **44** (1998) 85.
 24. Fumiko Yonezawa y Shoichi Sakamoto, *Phys. Rev. B* **40** (1989) 650.