

## Estimación-identificación como filtro digital integrado: descripción e implementación recursiva

J.J. Medel Juárez

*Centro de Investigación en Computación,  
Calle Venus S/N, 07738, Col. Nueva Industrial Vallejo,  
e-mail: jjmedelj@yahoo.com.mx*

M.T. Zagaceta Álvarez

*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada,  
Calzada Legaría 694, 11500 Col. Irrigación,  
e-mail: mtza79@yahoo.com.mx*

Recibido el 20 de abril de 2009; aceptado el 15 de enero de 2010

La teoría de filtrado digital en el proceso de identificación permite conocer la dinámica interna de los estados del sistema de referencia, considerado como caja negra o sistema base, que proporciona sus señales de entrada y de salida, que para el identificador es información esencial que forman parte de las acciones de identificación. Las acciones desarrolladas por el identificador consideran a la matriz de transición descrita por la función exponencial de los parámetros internos de la caja negra, la identificación de los estados con un retardo, la matriz de ganancias formada por error de correlación de convergencia y el proceso de innovación construido por la salida de ruido del sistema de referencia y el resultado de identificación. En el sistema de referencia visto como una caja negra, tanto los parámetros como los estados internos requieren ser descritos de alguna forma. Entre ambas descripciones, la más grave es la identificación de estados, al depender de la matriz de transición que está en función de los parámetros internos también por describir. Así que en la estructura del identificador, la matriz de transición se convierte en un problema esencial por resolver, muchas veces minimizado por el hecho de utilizar heurísticas que de algún modo permiten seleccionar una matriz de transición para minimizar el error de identificación. En este documento se propone un estimador como descriptor de los parámetros internos (técnica necesaria para conocer la dinámica interna de las ganancias de la caja negra), que permite generar la matriz de transición requerida por el identificador; respecto a la matriz de ganancia, el error de identificación (expresado por el segundo momento de probabilidad en forma recursiva) afecta el identificador como un algoritmo de adaptación. Y así lograr una tasa de convergencia adecuada. Es así como el filtro digital está construido con dos acciones: la estimación y la identificación; interconectadas por la adaptación generada por la ganancia que ajusta dinámicamente los niveles del identificador para llegar la convergencia, deseada y que se puede observar en los resultados de la simulación.

*Descriptor:* Filtro digital; funcional de error; gradiente estocástico; sistema de referencia.

The digital filter theory with identification process allows knowing internal states dynamics, with respect to a reference system, commonly considered as a black box or base system. This gives the identifier its input and output signals as essential information; so that the identifier is formed by identification actions. The actions developed by the identifier consider the transition matrix "described by the exponential function respect to internal parameters for the unknown black box reference system", identifying states delayed, with gain matrix "formatted by correlation convergence error" and the innovation process "build by the output base system noise and the identification result." Unfortunately, in the black box concept the internal parameters have the same problem, which means, neither observed nor transition matrix, because it is a description function depicted exponentially. Thus, the identifier structure considers that the transition matrix is an essential problem. This paper proposes the estimator as internal parameter descriptor "this is a technique required to describe the internal gains with respect to the black box system" thus generating the transition matrix. With respect to the gain matrix, the identification error "expressed by a second probability moment in recursive forms" affects the identifier as an adaptive algorithm. This allows having a sufficient convergence rate. The filter is built with two actions: estimator and identifier, this considers the adaptive properties with respect to the gain and dynamically adjusts the identifier convergence levels, observed in simulation results.

*Keywords:* Digital filter; functional error; stochastic gradient; reference model.

PACS: 02.30.Yy; 02.70.Bf; 02.10.Yn; 02.60.-x; 84.30.Vn

### 1. Introducción

En sistemas vistos como cajas negras en donde es necesario conocer su dinámica interna para algún propósito, ya que no es posible tener acceso a su estructura debido a su naturaleza, se realiza el proceso de identificación [2-4]. La identificación como tal es una forma de describir la dinámica interna del sistema base respecto al conjunto de entradas y salidas que lo afectan. En general, la descripción del comportamiento de

un sistema se hacía a través de ecuaciones diferenciales, de procesos en convolución, lo cual dio como resultado contar con descripciones de los sistemas fuera de línea. En casos críticos, las descripciones internas de un sistema se hacían a través de la identificación, resultando poco aceptables porque se presuponía conocida a la matriz de transición.

Los sistemas digitales utilizan aproximaciones a las ecuaciones diferenciales, descritas como ecuaciones en diferen-

cias, que cambian el orden por un retardo; es decir, una ecuación de quinto orden en diferencias es vista como una ecuación con cinco retardos. Lo cual permite usar la recursividad en los algoritmos computacionales.

De acuerdo con M.A. Peinado [4], comentó al respecto de que la expresión recursiva del identificador podría ser implementado dentro del sistema digital en el futuro.

La primera forma recursiva de un identificador implementada dentro de un sistema computacional del tipo digital se describió en la Ref. 1. Y de ahí en adelante, las diferentes formas de identificación requieren de la matriz de transición correspondiente, que a su vez es una función exponencial de los parámetros o ganancias internas del sistema de referencia [20].

Las áreas de las ciencias aplicadas que el filtrado ha impactado son: control automático (para predecir el comportamiento de un estado y sobre esa predicción tomar una decisión para afectar al sistema a controlar por medio de una acción reguladora [22]), sistemas digitales (en la eliminación de ruidos de forma dinámica que se adjuntan en las transformaciones de las señales a ser procesadas por medio del método de ventaneo dinámico [11], entre las más destacadas.

Los trabajos de identificación utilizados como una herramienta para describir la dinámica interna de un sistema base o de referencia, fueron enfocados hacia sistemas lineales, monovariantes, y estacionarios (en el sentido de probabilidad [21]) de acuerdo con las Refs. 2 y 3; observando sus propiedades de estabilidad en función de la matriz de transición propuesta [18,19].

Como ejemplo de identificación recursiva [21], se encuentra la predicción de las trayectorias de navegación para lograr el control de una nave espacial [5], con el objetivo de llevar una nave de un planeta a su asteroide y viceversa. Dentro de la predicción comúnmente son conocidas las ganancias necesarias en toda la trayectoria del sistema de navegación con el flujo decreciente de combustible y condiciones cambiantes del ambiente; requiriendo grandes sistemas de cómputo que realizasen el proceso de adaptación o ajuste de la matriz de transición de acuerdo con los cambios de gravedad y de atmósfera que sufriera el sistema base en su trayectoria.

Dentro de la navegación inercial terrestre [6], la identificación permite utilizar información redundante para describir el estado del sistema estocástico en diferentes posiciones y velocidades extraídas de observaciones a través del *Global Navigation Satellite System* (GNSS); corrigiendo los errores cometidos en la identificación de sus estados internos al dar por conocida la matriz de transición, así como disminuir los errores en la identificación de altitud; todo ello, dentro de un proceso de adaptación [21]: el error producido en la identificación de la posición y la velocidad es generado por los errores de lectura de los sistemas inerciales, así como de las etapas de acoplamiento digital, y el haber considerado para todos los casos conocida a la matriz de transición.

El proceso de identificación bajo la consideración anterior, resultaría imposible si se observa que el filtrado parte de

la idea de describir lo que está dentro de la caja negra, y que incluye a todas las dinámicas internas que hacen que el sistema dé una respuesta a un estímulo. Para lograr usar a los identificadores, se consideró conocida la matriz de transición para lograr el proceso de adaptación [21], que se basa en:

- 1) proponer las condiciones iniciales de la matriz de transición;
- 2) el funcional de error de identificación de manera recursiva;
- 3) establecer un criterio que modifique de manera dinámica la ganancia.

Se buscó ante todo que se tuviera la convergencia entre la respuesta del sistema base y la emitida por el filtro.

Dentro de la navegación terrestre una herramienta satelital para encontrar trayectorias-destino dado un punto de referencia es el *Global Position System* (GPS); contando con la acumulación de los errores en los sensores de los sistemas inerciales [5], debido a:

- a) error de inicialización (INS); y
- b) error de alineamiento al sistema de acuerdo al grupo de satélites considerados para ubicar un punto.





De forma que el proceso de innovación en el identificador construido por ese grupo de errores, permite minimizar la aproximación al punto destino [7].

A pesar del uso que se ha dado a esta clase de filtros, el problema de considerar una dinámica interna conocida para describir los estados internos dentro de un sistema que se comporta como caja negra, no se ha resuelto [14,15,16,17]. Se desarrolló el concepto de adaptación para proponer condiciones iniciales respecto a la matriz de transición [21]. Se propuso la diferencia entre estimador e identificador [13]. Se establecieron condiciones de estabilidad para la matriz de transiciones, logrando con ello acotar la región en la cual podía ser válido el resultado dada una condición de operación acotada [20,22], entre otras consideraciones, sin llegar a enfrentar el problema de describir la dinámica interna del sistema de referencia con sus parámetros asociados.

De acuerdo con lo visto en los diversos resultados de identificación, se observa que la forma de lograr que el filtrado dé una buena respuesta, es el integrar la estimación en la identificación y no presuponer conocida a la matriz de transición. Una vez estimada la matriz de parámetros internos, se procede a construir la matriz de transición a usarse en la identificación del estado interno del sistema de referencia.

En el caso presente al usar un modelo de referencia, se compara la señal del identificador y se encuentra un funcional del error construido en base al segundo momento de probabilidad, que permite corregir al estimador y al propio identificador de manera dinámica, logrando que la interacción lleve al filtro a una región de convergencia y así llegar al valor de identificación deseado, sin poner por delante la intuición en la descripción de la matriz de transición.

TABLA I. Símbolos usados en los diagramas a bloques.

	Señales de entrada o salida del sistema.
	Retardo de la señal considerada y descrita como: $X_{k-1} := X_{kz-1}$ .
	Sumador algebraico de señales.
	Multiplicador algebraico de señales.

La simbiosis entre estimador e identificador relacionados por el funcional del error, permite contar con un filtro digital dinámico e integrado, el cual es descrito a través de este trabajo para un sistema monovariable y estacionario, de acuerdo al siguiente orden: el estimador es del tipo gradiente estocástico teniendo acceso a la salida del sistema, el identificador es descrito por el filtro óptimo, el funcional del error se expresa de manera recursiva y afecta a ambos filtros; se presenta la simulación como un ejemplo ilustrativo, que a través de un modelo de referencia se logra observar las fronteras entre la estimación y la identificación, así como su interacción dinámica; finalmente se concluye y se presentan las referencias utilizadas.

## 2. Descripción del filtro estimador identificador recursivamente

El filtro identificador es una estructura utilizada para predecir, describir o reconstruir el estado interno del sistema de referencia, considerando que su respuesta es estable (en el sentido más simple: entradas acotadas, salidas acotadas) a la excitación con ruido acotado.

Se requiere el uso de simbología estándar (como puede verse en la Tabla I) para describir por diagramas a bloques de sistemas discretos, las operaciones a realizarse, tanto por el sistema de referencia como por el filtro integrado, de acuerdo con la Ref. 25.

El sistema de referencia, es descrito por el proceso de primer orden por un modelo ARMA:

$$y_k - CAC^+y_{k-1} = CB_kv_{k-1} + Dw_k - CAC^+Dw_{k-1},$$

como puede verse en la Fig. 1.

En el espacio de estados, se tiene:  $x_{k+1} = A_kx_k + B_kv_k$ ; cuya salida es descrita como  $y_k = C_kx_k + Dw_k$ , según [24]  $\{w(k), k \geq 0\}$  es un proceso estocástico

$$\{w_{k_i}, k_{i=0} = 0, k_{i=1} = 1, k_{i=2} = 2, \dots\}.$$

tal que, para cualquier conjunto arbitrario de puntos  $\{k_i\}$  se tiene la distribución asociada a la variable aleatoria  $w_{k_i}$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  correspondiente a la variación normal de  $w_{k_i}$ , llamado *proceso estocástico gaussiano* para  $N(\mu = kw_k, \sigma_{w_k}^2 < \infty)$ . Similarmente,  $\{v_k, k \geq 0\}$  es un proceso *estocástico gaussiano* para  $N(\mu = kv, \sigma_v^2 < \infty)$ .

En el diagrama de la Fig. 2 se observa el espacio de estados del sistema de referencia ARMA, donde es posible apreciar las entradas y perturbaciones que lo afectan [23].

La evolución de una señal, incluyendo las perturbaciones que lo alteran, tanto interna  $v_k$ , como externa  $w_k$  al sistema. Y que dentro de la caja punteada, se encuentra lo que se conoce como dinámica interna del sistema en espacio de estados en su forma recursiva como un ARMA.

En la Fig. 3 y de acuerdo con la Tabla I, se muestra el modelo propuesto en este trabajo, en donde la salida del sistema de referencia y el sistema aproximado, se utilizan para conocer la ganancia  $K$  requerida por el filtro identificador y así describir el estado interno.

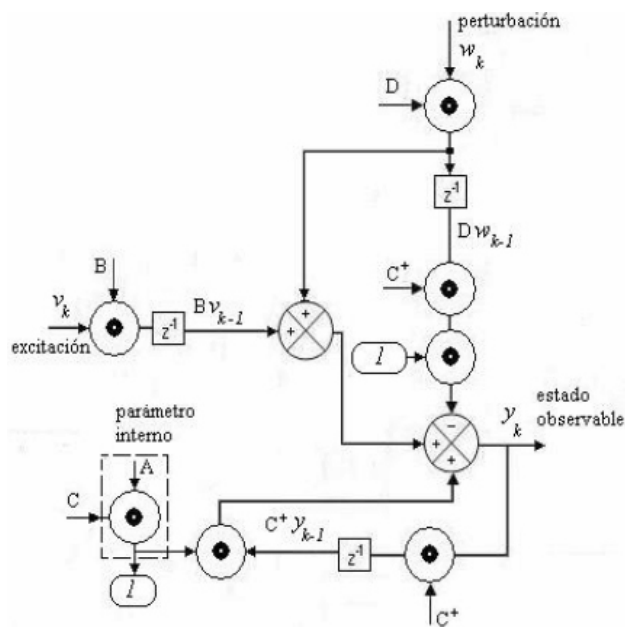


FIGURA 1. Representación del sistema de referencia

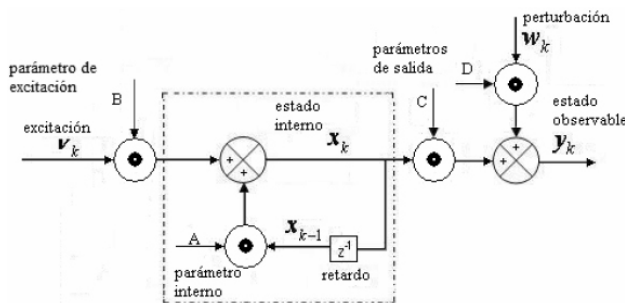


FIGURA 2. Diagrama de estados del sistema de referencia.

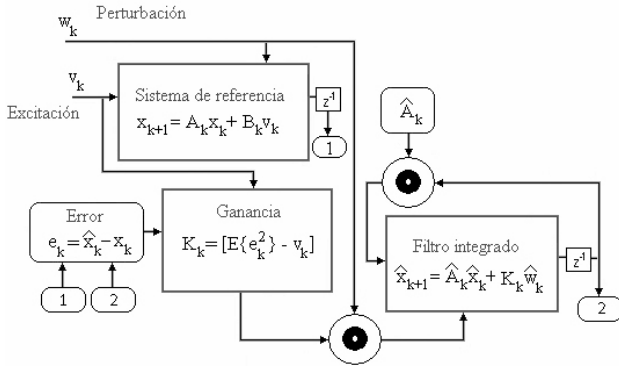


FIGURA 3. Diagrama de la estructura global del filtro identificador, teniendo estimada la matriz de parámetros.

En donde el filtro de identificación, requiere conocida o estimada la matriz de parámetros internos del sistema, parte de lo que se desarrollará en este trabajo.

A continuación se describe como se integran la estimación y la identificación implementada en el filtro.

**Teorema 1 (estimación de parámetros por el gradiente estocástico).** *Considérese que un sistema es descrito por el modelo estocástico de primer orden expresado en diferencias finitas:*

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k; \quad y_k = C_k x_k + w_k \quad (1)$$

Tiene un tiempo de evolución acotado  $\tau_k < \infty$  (por cada intervalo)<sup>i</sup>, que cumple con la condición de Nyquist [26]  $\tau_k = 1/2f_{\text{máx}}^{ii}$  y que según la Ref. 24:  $\{w(k), k \geq 0\}$  es un proceso estocástico

$$\{w_{k_i}, k_{i=0} = 0, k_{i=1} = 1, k_{i=2} = 2, \dots\},$$

tal que, para cualquier conjunto arbitrario de puntos  $\{k_i\}$  se tiene la distribución asociada a la variable aleatoria  $w_{k_i}$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  correspondiente a la variación normal de  $w_{k_i}$ , llamado proceso estocástico gaussiano para  $N(\mu = k_{w_k}, \sigma_{w_k}^2 < \infty)$ . Similarmente,  $\{v_k, k \geq 0\}$  es un proceso estocástico gaussiano para  $N(\mu = k_v, \sigma_v^2 < \infty)$ . En donde de acuerdo con (1)

$$x_k, x_{k+1}, y_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times 1], k};$$

así como con las parámetros

$$A_k, B_k, C_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}.$$

Cuya respuesta se aproxima al comportamiento del sistema considerado de acuerdo a la Fig. 2. Su estimador usando la técnica del gradiente estocástico es descrito como:

$$\hat{A}_k = E\{y_{k-1} \hat{y}_k^T\} (E\{y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T\})^{-1}. \quad (2)$$

**Prueba 1** (véase Anexo I).

**Teorema 2 (Estimación de parámetros en forma recursiva).** *Considerando el modelo (2) y con las propiedades de invarianza, se obtiene su forma recursiva*

$$\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}_k \quad (3)$$

**Prueba 2** (véase Anexo I).

De esta manera una vez que se obtiene la matriz de parámetros  $\hat{A}_k$  es posible proceder a la identificación del estado interno y que de acuerdo al modelo (1) corresponde a  $x_{k+1}$ .

**Teorema 3 (Identificación de estados internos caso una entrada una salida):** *Considerando el sistema descrito en (1) Cuyo identificador es:*

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k \hat{w}_k \quad (4)$$

Con la ganancia descrita:

$$K_k := \hat{A}_k J_k C_k^T [C_k J_k C_k^T + R_k]^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k};$$

$$\hat{A}_k, C_k, J_k, R_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k} \quad (5)$$

Es un identificador óptimo en el sentido de probabilidad, respecto del funcional del error que tiene la forma:

$$J_{k+1, \text{mín}} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T,$$

$$Q_k := E\{v_k v_k^T\}, \quad R_k := E\{w_k w_k^T\} \quad (6)$$

**Prueba 3** (véase Anexo I).

### 3. Simulación

Conforme al modelo expresado en (1) descrito en diferencias finitas; para el caso monovariable se considero que el estimador expresado en (3), de acuerdo a la Fig. 3 se usa en la identificación del estado interno descrito en (4), respecto al modelo de referencia. Es así, como el parámetro estimado es graficado respecto a una referencia de 0.4 unidades. Para diferentes amplitudes de ruido se realizo la estimación usando al modelo descrito en (3), las cuales variaron desde 0.1 hasta 0.9 observando, que a una varianza de 0.6, el estimador tiene una mejor convergencia que el resto de las estimaciones realizadas. En la Fig. 4, se presenta el resultado de la simulación para cuatro varianzas de ruido (0.1, 0.3, 0.6 y 0.9) que corresponden a una estimación que llega a su estado estacionario en 0.05, 0.22, 0.41 y 0.35, respectivamente.

Encontrando que la estimación óptima fue para una varianza de ruido de 0.6 unidades, como puede verse en la Fig. 5.

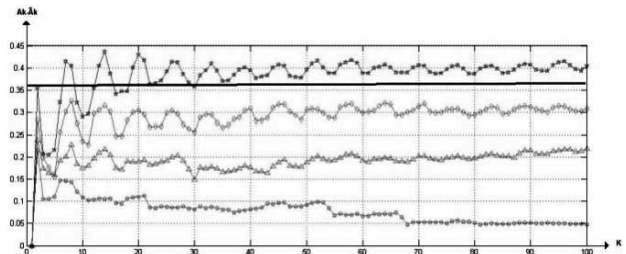


FIGURA 4. Simulación de la estimación para diferentes amplitudes de ruidos.

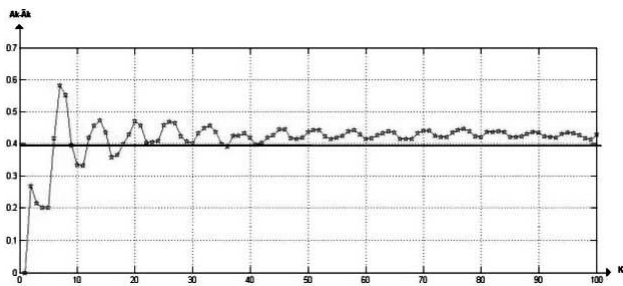


FIGURA 5. Estimación óptima en relación con el parámetro de referencia.

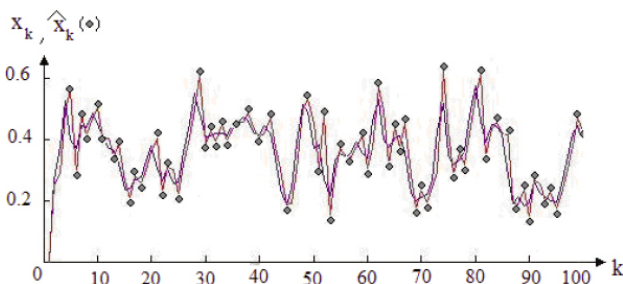


FIGURA 6. Identificación de los estados internos.

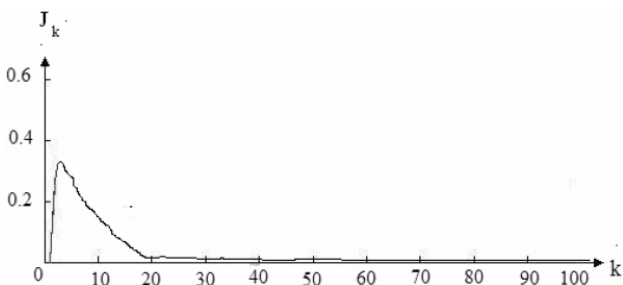


FIGURA 7. Funcional del error  $J_k$  con un resultado menor al 0.01 de varianza de error.

El resultado obtenido del estimador de acuerdo con (3) como se observa en la Fig. 5, es utilizado en línea en (5) y aplicado en (4) dentro del algoritmo de identificación de acuerdo con la Fig. 3: La identificación requiere de la matriz de ganancias (5), en la cual se observa el error de identificación por medio del segundo momento de probabilidad de manera recursiva (6). Lo que permite obtener la respuesta del identificador, mostrado en la Fig. 6. Es decir, el proceso de adaptación se da cuando el estimador (3) es usado en el identificador (4) en conjunto con la matriz de ganancia (5).

El funcional del error es descrito en (6) a partir del error de identificación que en forma ilustrativa se observa en la Fig. 7.

En la Fig. 7 se observa un decaimiento exponencial hasta llegar a una condición estacionaria a partir de las 20 unidades en  $k$ , que corresponde a menos de 1%.

### 4. Conclusión

En este trabajo se presentó un filtro formado por un estimador de parámetros unido con un identificador de estados, utilizando un modelo de referencia de primer orden estocástico, invariante en el tiempo, descrito en diferencias finitas, con un tiempo de evolución entre estados acotado. La metodología propuesta dentro del proceso de filtrado consistió en tener una señal de referencia para realizar la estimación de la matriz de parámetros, con base en la cual se realizó la identificación del vector de los estados internos. La Fig. 3, nos permitió dar una descripción del algoritmo para ser implementado. La forma de realizar la prueba de integración de un estimador con un identificador, fue por medio de utilizar el modelo descrito de (1) con un solo parámetro.

El proceso de estimación fue probado para diferentes varianzas de ruidos, que iban desde 0.1 hasta 0.9, lo que nos permitió dado el modelo (1) para un parámetro de referencia de 0.4, seleccionar la mejor varianza de ruido, la que correspondió a la de 0.6.

Para la identificación se usó este último resultado y se logró la descripción del estado interno con un alto grado de similitud como puede observarse en la Fig. 6. Su convergencia, descrita por (3) fue simulada y se observa en la Fig. 7, la cual llega a un estado estacionario menor a 1%.

Observando así, que la integración del estimador- identificador como un filtro es una buena alternativa para conocer la dinámica interna de un sistema, sin la necesidad de presuponer conocida alguna de sus magnitudes; en vez de eso, se estiman e identifican para lograr una descripción lo más parecida posible a su funcionamiento en relación con su señal de respuesta del sistema de referencia.

### Anexo I

**Prueba del teorema 1 :** *Considérese al funcional del error de manera recursiva de:*

$$J_k = \frac{1}{k}(e_k e_k^T + (k - 1)J_{k-1}) \tag{7}$$

*Con error de identificación:*

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \tag{8}$$

*Y que al sustituir (1) en (8):*

$$e_k = \tilde{A}y_{k-1} + \omega_k - \hat{y}_k \tag{9}$$

*Multiplicando por el transpuesto de  $e_k$  a (9)*

$$e_k e_k^T = \tilde{A}y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T \tilde{A}^T + \omega_k \omega_k^T + y_k \hat{y}_k^T + 2(\tilde{A}y_{k-1} \omega_k^T - \tilde{A}y_{k-1} \hat{y}_k^T - \omega_k \hat{y}_k^T) \tag{10}$$

*Y que al considerar en (7) a (10):*

$$J_k = \frac{1}{k}(\tilde{A}y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T \tilde{A}^T + \omega_k \omega_k^T + y_k \hat{y}_k^T + 2(\tilde{A}y_{k-1} \omega_k^T - \tilde{A}y_{k-1} \hat{y}_k^T - \omega_k \hat{y}_k^T)) + (k - 1)J_{k-1}. \tag{11}$$

Con el gradiente de (11), respecto de  $\tilde{A}$

$$\nabla J_k|_{\tilde{A}_k} = (2\tilde{A}y_{k-1}y_{k-1}^T + 2(y_{k-1}\omega_k^T - y_{k-1}\hat{y}_k^T)) \quad (12)$$

Quedando resumido en la igualdad:

$$\left( 2\tilde{A}E\{y_{k-1}y_{k-1}^T\} + 2(E\{y_{k-1}\omega_k^T\} - E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\}) \right) = 0 \quad (13)$$

Y obteniendo:

$$\hat{A}_k = (E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\} - E\{y_{k-1}\omega_k^T\}) \times (E\{y_{k-1}y_{k-1}^T\})^{-1} \quad (14)$$

El estimador sin ruidos es:

$$\hat{A}_k = E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\} (E\{y_{k-1}y_{k-1}^T\})^{-1} \quad (15)$$

**Prueba del teorema 2:** Expresando (4) en forma discreta:

$$\hat{A}_k = \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1}\hat{y}_i^T \right] \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1}y_{i-1}^T \right]^{-1} \quad (16)$$

Expresando los términos de (16) en forma recursiva se obtiene:

$$P_k = \sum_{i=1}^k y_{i-1}\hat{y}_i^T, \quad P_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1}\hat{y}_i^T$$

$$P_k = y_{k-1}\hat{y}_k^T + P_{k-1} \quad (17)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^k y_{i-1}y_{i-1}^T, \quad Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1}y_{i-1}^T$$

$$Q_k = y_{k-1}y_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (18)$$

La matriz de parámetros es expresado de forma recursiva como:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1}\hat{y}_k^T + (k-1)P_{k-1}] [Q_k]^{-1} \quad (19)$$

Desarrollando (19) se obtiene:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1}\hat{y}_k^T + (k-1) \times ([P_{k-1}][Q_{k-1}]^{-1})Q_{k-1}] [Q_k]^{-1} \quad (20)$$

sustituyendo  $[P_{k-1}][Q_{k-1}]^{-1}$  por  $\hat{A}_{k-1}$  se obtiene:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1}\hat{y}_k^T + (k-1)\hat{A}_{k-1}Q_{k-1}] [Q_k]^{-1} \quad (21)$$

Separando términos:

$$\hat{A}_k = [(k-1)Q_{k-1}] [Q_k]^{-1} \hat{A}_{k-1} + \frac{1}{k} [y_{k-1}\hat{y}_k^T] [Q_k]^{-1} \quad (22)$$

Igualando

$$M_k = [(k-1)Q_{k-1}] [Q_k]^{-1}, \quad y$$

$$\tilde{Q}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1}\hat{y}_k^T] [Q_k]^{-1} :$$

$$\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}_k \quad (23)$$

**Prueba del teorema 3:** Considérese que el error de identificación es:

$$e_k := x_k - \hat{x}_k; \quad e_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times 1], k} \quad (24)$$

Donde su funcional de error y varianzas de los ruidos:

$$J_k := E\{e_k e_k^T\},$$

$$R_k := E\{w_k w_k^T\}$$

$$Q_k := E\{v_k v_k^T\} \quad (25)$$

En relación con (6), desplazado un tiempo, son sustituidos sus estados considerando la definición expresada en (4) respecto a (1):

$$e_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k - (\hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k \hat{w}_k) \quad (26)$$

El ruido en el identificador convergen en casi todos los puntos al ruido que afecta al sistema; de forma tal  $\lim_{i \rightarrow k} \hat{w}_i \xrightarrow{c.t.p} w_k$  y el proceso de innovación descrito como:

$$\hat{w}_k := y_k - C_k \hat{x}_k \quad (27)$$

Al sustituir (27) en (26), se obtiene:

$$e_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k - (\hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k (y_k - C_k \hat{x}_k)) \quad (28)$$

La señal observable de (27), de acuerdo con (1) y agrupando respecto a  $x_k, \hat{x}_k, y_k$  ya  $\hat{K}_k$ :

$$e_{k+1} = (A_k - \tilde{K}_k C_k) x_k + B_k v_k - (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) \hat{x}_k - \tilde{K}_k w_k \quad (29)$$

Cabe mencionar que el conjunto de valores propios cumple  $\{\lambda_i(\hat{A}_k)\}_k \subseteq ([0, 1], k)$ , que son las condiciones de estabilidad desde un punto de vista robusto para sistemas discretos variantes [11]. Considerando la expresión (4.8), respecto con  $(\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k)$ , como factor común entre  $x_k$  y  $\hat{x}_k$

$$e_{k+1} = (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) (x_k - \hat{x}_k) + B_k v_k - \tilde{K}_k w_k \quad (30)$$

Que al sustituir (24) en (30):

$$e_{k+1} = (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) e_k + B_k v_k - \tilde{K}_k w_k \quad (31)$$

Con

$$\hat{\tilde{A}}_k := \left( \hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k \right) \quad (32)$$

Sustituyendo (31) en (32) se obtiene

$$e_{k+1} = \hat{\tilde{A}}_k e_k + B_k v_k - \tilde{K}_k w_k \quad (33)$$

De acuerdo con (25), la varianza del ruido en (k+1):

$$J_{k+1} = E \left\{ e_{k+1} e_{k+1}^T \right\} \quad (34)$$

Sustituyendo en (33) a (34), es requerido realizar el producto interno y considerando las propiedades de la esperanza matemática:

$$\begin{aligned} & \hat{\tilde{A}}_k E \left\{ e_k e_k^T \right\} \hat{\tilde{A}}_k^T + \hat{\tilde{A}}_k E \left\{ e_k v_k^T \right\} B_k^T \\ & - \hat{\tilde{A}}_k E \left\{ e_k w_k^T \right\} \tilde{K}_k^T + B_k E \left\{ v_k e_k^T \right\} \hat{\tilde{A}}_k^T \\ & + B_k E \left\{ v_k v_k^T \right\} B_k^T - B_k E \left\{ v_k w_k^T \right\} \tilde{K}_k^T \\ & - \tilde{K}_k E \left\{ w_k e_k^T \right\} \hat{\tilde{A}}_k^T - \tilde{K}_k E \left\{ w_k v_k^T \right\} B_k^T \\ & + \tilde{K}_k E \left\{ w_k w_k^T \right\} \tilde{K}_k^T \end{aligned} \quad (35)$$

Con ruidos independientes y varianzas descritas en (4.4), la expresión (4.14), se reduce a la forma:

$$J_{k+1} = \hat{\tilde{A}}_k J_k \hat{\tilde{A}}_k^T + B_k Q_k B_k^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T \quad (36)$$

Abriendo la descripción de (32) en (36):

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \left( \hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k \right) J_k \left( \hat{A}_k^T - C_k^T \tilde{K}_k^T \right) \\ &+ B_k Q_k B_k^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T \end{aligned} \quad (37)$$

Desarrollando (37):

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T - \hat{A}_k J_k C_k^T \tilde{K}_k^T \\ &+ \tilde{K}_k C_k J_k C_k^T \tilde{K}_k^T + B_k Q_k B_k^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T \end{aligned} \quad (38)$$

El gradiente estocástico  $\nabla J_{k+1} / \partial \tilde{K}_k$  para (38) tiene la forma  $\partial J_{k+1} / \partial \tilde{K}_k = 0$ , y considerando que las matrices son simétricas

$$K_k = \tilde{K}_k^T, \quad \hat{A}_k J_k C_k^T = C_k J_k \hat{A}_k^T, \quad \tilde{K}_k R_k = R_k^T \tilde{K}_k^T;$$

y que al reorganizar con respecto a  $\tilde{K}_k$ :

$$\nabla J_{k+1} / K_k = -\hat{A}_k J_k C_k^T + \tilde{K}_k [C_k J_k C_k^T + R_k] \quad (39)$$

De (39) al ser un mínimo,  $\tilde{K}_k$ , tiene la forma:

$$\tilde{K}_k = \hat{A}_k J_k C_k^T [C_k J_k C_k^T + R_k]^{-1}; \quad (40)$$

Sustituyendo (40) y su transpuesta en (38)

$$J_{k+1} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T. \quad (41)$$

Y dado que  $\hat{A}_k J_k C_k^T$  de acuerdo con (40), es descrito como:

$$\hat{A}_k J_k C_k^T = K_k (C_k J_k C_k^T + R_k) \quad (42)$$

Se observa que

$$\hat{A}_k J_k C_k^T \tilde{K}_k^T = \tilde{K}_k (C_k J_k C_k^T + R_k) \tilde{K}_k^T \quad (43)$$

Reduciéndose (41) de acuerdo con (42) y (43), se obtiene (6) como puede verse

$$J_{k+1} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T. \quad (44)$$

- i. Donde su índice de evolución k, nos indica que de acuerdo con Nyquist el intervalo de tiempo en el que el sistema pasa de un estado a otro.
- ii.  $f_{m\acute{a}x_k}$  es la frecuencia representativa del sistema a considerarse y está acotada  $f_{m\acute{a}x_k} < \infty$ .
1. R.E. Kalman, *Journal of Basic Engineering* **82** (1960) 35.
2. A. Sendín Escalona, *Fundamentos de sistemas de comunicaciones móviles* (McGraw-Hill 2004).
3. C. Angulo y C. Rayar, *Tecnología de Sistemas Control* (Ediciones UPC 2004).
4. M.A. Peinado, *Filtro de Wiener Introduccion y Formulación* (Universidad de Granada, España, 2003).
5. A.L. McGee y F.S. Stanley, *Discovery Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry* (National Aeronautics and Space Administration, November 1985).
6. F.I. Creixell y A. Baron, *Determinación precisa de trayectorias con sistemas inerciales y GNSS* (Instituto Cartográfico de Cataluña, ICC 2000).

7. A.G. Ramírez y A.J.A.R. Fernández, *Estudio y Modelado de Errores en Sistemas Inerciales para Navegación Terrestre* (Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona España 2006).
8. J. Ruiz, *Investigaciones Económicas XXVI* (1) 2002.
9. J.D.C. Del Pino, *Aplicación de los filtros de Kalman para el pronóstico de variables meteorológicas en superficie GPV del CMT en Juan de Dios Andalucía Occidental y Ceuta* (INM 2000).
10. D.P. Cruz, J.J. Medel y P.L. Guevara, *Int. Conf. on Signal Processing* (Malta, Computational Geometry & Artificial Vision, 2005).
11. J.J. Medel, P.L. Guevara y D.P. Cruz, *Int. Conf. on Mathematical Methods and Computational Techniques In Electrical Engineering Sofia* **1** (2005) 214.
12. A.S. Pojznyak y J.J. Medel, *Int. J. of Systems Science* **30** (1999) 865.
13. J.J. Medel, *C y Sistemas* **5** (2002) 215.

14. R. Chen y L.S. Jun, *Texas University and Stanford University* **1** (2000) 135.
15. E.A. Wan, R. Van der Merwe y N. Alex, *Institute of Science & Technology* **1** (2000) 240.
16. C.J. Johns y J.R. Mandel, *CCM Report 221 conference on New Developments of Statistical Analysis in Wildlife* (Fisheries, and Ecological Research, Columbia, MI. 2004).
17. S.J. Julier y J.K. Uhlmann, *Int. S. on Aerospace/Defence Sensing* **1** (1997) 124.
18. A.N. Shiryaev, *Probability* (Moscow, 1984).
19. M.T. Wasan, *Stochastic Approximation* (Cambridge University Press, 1964) .
20. H. Crámer y M.R. Leadbetter, *Stationary and related Stochastic Process: Sample function properties and theirs applications* (1968) 120.
21. S Haykin, *Adaptive Filter Theory* **2** (1991).
22. H. Fan y M. Nayeri, *IEEE Transaction On Circuits and Systems* **3** (1989) 1748.
23. M.T. Zagaceta y J.J. Medel, *Identification first order stochastic system with estimation parameters: recursive description*. Conf. on Signal Processing, & Robotics and Automation (University of Cambridge 2009).
24. U. Narayan Bhat, *Elements of Applied Stochastic Processes* **1** (1972) 7.
25. K. Ogatta, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto* **2**(1995).
26. H. Nyquist, *Certain topics in Telegraph Transmission Theory*, AIEE, (Dan Lavry of Lavry Engineering, Inc. 1928)