

# Estimación de parámetros usando la deconvolución y la pseudoinversa: descripción e implementación recursiva

J.J. Medel Juárez<sup>a,b</sup> y C.V. García Mendoza<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Centro de Investigación en Computación,

Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo, 07738,

e-mail: jjmedelj@yahoo.com.mx

<sup>b</sup>Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada,

Calzada Legaría 694 Col. Irrigación, 11500,

e-mail:varinia400@hotmail.com

Recibido el 18 de septiembre de 2009; aceptado el 1 de diciembre de 2009

En este trabajo se presenta un estimador de parámetros recursivo con base al modelo matricial de deconvolución como proceso de filtrado, con el cual es posible conocer la dinámica interna del modelo tipo caja negra con respuesta lineal, y con evolución invariante en el tiempo. La extensión del proceso de convolución a un periodo de tiempo conformado por un grupo de intervalos en los cuales el sistema no cambia de contexto, permite hacer una aproximación al producto matricial con base en el cual el sistema real, dadas sus entradas y salidas dentro de ese periodo de tiempo, será visto como un sistema multivariable al no cambiar de contexto y al mantener sus condiciones de invarianza, de manera que es necesario el uso de la pseudoinversa en la estimación, ya que se observan problemas de inversión y de singularidad en su desarrollo. De igual forma, las medidas de dispersión respecto a una referencia, considerando la traza tanto de la matriz de referencia como de su estimada, permiten describir al error cuadrático medio, decibels y Bode, todos desarrollados de manera recursiva, estableciendo un enlace con sus estados inmediatos anteriores para el consumo de la menor cantidad de recursos computacionales. Se realiza una descripción de las condiciones de estabilidad a cubrir por el estimador tomando en cuenta los criterios de Lyapunov. De manera ilustrativa, se presentó una simulación utilizando MatLab<sup>®</sup> [7], en la que las formas extendidas dentro de un intervalo de tiempo son vistas como matrices no cuadradas, permaneciendo el sistema invariante respecto a un vector de entrada, y se tiene como resultado un proceso de estimación recursivo. Se concluyó que en el proceso de deconvolución, la estimación extendida es una herramienta para sistemas no cuadrados con evolución invariante en el tiempo.

*Descriptores:* Deconvolución; pseudoinversa de una matriz; funcional del error; diagrama recursivo de Bode; estabilidad de Lyapunov.

This work presents a parameter estimator in recursive form based in deconvolution matrix model as a discrete filter process, in which is possible to know the internal convolution dynamics respect to black box with time invariant lineal answer. Extending the convolution process to a period conformed by a group of intervals where the system doesn't change, allows the approximation to matrix description in base to the real system, giving their inputs and outputs in the same period, generating a multivariable description, without change the context holding its invariance conditions, needs the pseudoinverse estimation, because observe in it singularities and inversion problems. In the same way the dispersion measures respect to the reference, considering the trace as the reference matrix as its estimated, described by the mean square error, Decibels and Bode, all of its developed in recursive form, allowing to link between its immediate past states to consume the minimal computational resources. The stability conditions evolved required estimator, considered in this case the Lyapunov Criteria. In illustrative sense, develop us the simulation in where the extended matrixes are non square form and bounded temporally into time interval, considering time invariant conditions respect to bounded input, having a recursive estimator as a final result. In this work concluded considering that the deconvolution as an estimator is a tool required for non square systems invariant in the time.

*Keywords:* Deconvolution; inverse matrix; pseudoinverse; functional error; recursively; Lyapunov stability.

PACS: 02.30.Yy; 02.70.Bf; 02.10.Yn; 02.60.-x; 84.30.Vn

## 1. Introducción

La convolución  $C(T)$  es el resultado del producto interno entre un modelo tipo caja negra retardado  $G(t-x)$  y la señal de excitación  $F(T)$  como se observa en la Fig. 1.

En el modelo tipo caja negra no se conoce la dinámica interna del sistema, que en función de la Fig. 1, es descrita

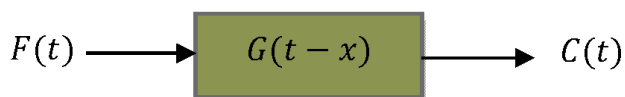


FIGURA 1. Diagrama de bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra.

por  $G(t-x)$ . Entonces es necesario preguntarse cómo evoluciona  $G(t-x)$  al ser conocidas la señal de excitación  $F(T)$  y la señal de respuesta  $C(T)$ .

Para conocer cómo evoluciona  $G(t-x)$  se requiere de la operación inversa, la deconvolución. La idea de la deconvolución ha sido utilizada en diferentes áreas del quehacer humano con el objetivo de describir qué es lo que ocurre con alguna de las dos señales que conforman al sistema con la menor cantidad de pérdidas de información posible. La deconvolución es analizada por diferentes métodos, tales como los vistos en las Refs. 1 a 4, 8, 9 a 11, 14, 23 y 24 por ejemplo: deconvolución en línea, homomórfica, iterativa, basada en un método de estimación de sistemas, etc. Todos esos métodos

buscan minimizar el error generado respecto a la señal original y su identificada y así minimizar éste en función a la señal original.

La deconvolución como concepto ha sido usada para la restauración de información degradada por cualquier proceso físico [11]. Se han utilizado diversas técnicas en la búsqueda de  $G(t - x)$  para evitar la degradación de la señal a estimar, por ejemplo, los algoritmos iterativos como el de estimación de máxima verosimilitud en microscopía, que es referente al filtrado en el proceso de reconstrucción de imágenes [2]; la deconvolución ciega en astronomía, que sucesivamente va mejorando una estimación inicial del objeto real hasta alcanzar cierto criterio de calidad preestablecido respecto al modelo de referencia; en el análisis de medidas sísmicas por el método de división espectral [3]; o mediante la transformación discreta de paquetes de ondeletas [2]. Específicamente Snieder [23] propuso una técnica para obtener la respuesta sísmica de un edificio basada en la deconvolución de los movimientos registrados en los diferentes niveles de la construcción, observando la respuesta estructural respecto a las vibraciones del suelo.

El uso de transformaciones lineales ha ocasionado que dé como resultado una divergencia respecto a la información esperada [14]. ¿Qué es lo que sucede? Básicamente se diría que hay pérdida de información durante la transformación directa (convolución) e inversa (deconvolución), y que esa pérdida es sumada a las pérdidas ya existentes en la propia información al viajar de un dispositivo a otro, o al cambiar de medio [20].

La deconvolución vista como un proceso de filtrado cuenta con dos áreas básicas: estimación de parámetros e identificación de estados [9,14].

Se ha enfocado este trabajo a la estimación de parámetros, al sentar las bases que permitan dar sustento a la reconstrucción de señales, como por ejemplo se pueden citar a las Refs. 4 y 14.

Para lograr esta etapa de filtrado (la deconvolución), es necesario considerar sus propiedades matriciales establecidas entre los vectores  $F(T)$  y  $C(T)$ , que permiten llegar a la señal deseada  $\hat{G}(t - x)$  de acuerdo con un criterio previamente establecido. Lo que permite contar con la menor pérdida de información, observando a la deconvolución como una matriz de parámetros y no tan solo con una secuencia, como puede verse en Refs. 10, 12 y 20.

De forma que el estimador propuesto presenta un mayor nivel de convergencia con respecto a los resultados descritos en Refs. 4 y 6, al usar el método del rotacional [15] lo que permitió observar que el estimador es óptimo.

El trabajo está organizado en tres secciones. En la primera sección se describen a la convolución y deconvolución que sirven de base en el desarrollo del estimador recursivo de parámetros; en donde se presentan tres modelos recursivos para conocer el nivel de convergencia del estimador: error cuadrático medio, error en decibeles y diagramas de Bode [20] y se comprueba la estabilidad del estimador considerando los criterios de Lyapunov de acuerdo con las Refs. 5, 7

y 19. En la última sección se presenta la simulación del estimador, y las gráficas que ilustran su nivel de convergencia. Posterior a las conclusiones se presenta el anexo que contiene las pruebas de los teoremas desarrollados en la Sec. 2.

## 2. Descripción del filtro estimador recursivo usando el concepto de convolución de manera extendida y en diferencias finitas

En esta sección se propone la descripción matricial de la convolución. A través del producto punto extendido a un periodo de tiempo  $T$  conformado por un grupo de intervalos en los cuales el sistema se mantiene invariante.

**Teorema 1 (convolución en diferencias finitas).** La convolución en diferencias finitas dentro de un conjunto de intervalos de tiempo con métricas contenidas en  $T$ , está dada de forma matricial:

$$C(T)_{m \times 1} = G(T)_{m \times n} F(T)_{n \times 1}, \quad (1)$$

$C \in R^{[m \times 1]}$  es el vector de respuesta, resultado del producto matricial entre la matriz ampliada  $G \in R^{[m \times n]}$  (compuesta por filas de vectores desplazados de acuerdo al intervalo de tiempo correspondiente) y el vector fijo  $F \in R^{[n \times 1]}$ , que representa a la ventana de excitación para todos los intervalos de tiempo con métricas contenidas en la métrica del intervalo de tiempo extendido  $T$ .

### Prueba 1 (véanse anexos)

El problema a resolver como filtro una vez dado un modelo de tipo caja negra es describir la dinámica interna del sistema expresado en (1); es decir, es necesario preguntarse cómo evoluciona  $G_{m \times n}$  al ser conocidas, tanto la excitación  $F_{n \times 1}$  como la respuesta  $C_{m \times 1}$ , tal y como se ve en el diagrama a bloques de la Fig. 2.

El proceso de estimación, dado el modelo tipo caja negra de acuerdo a la Fig. 2, ayuda a conocer la dinámica interna del sistema de referencia  $G_{m \times n}$ . Para ello es necesario saber qué es lo que entra y sale de la caja con sus retardos, necesitando para ello usar el proceso de deconvolución. De esta forma, la innovación es descrita por la diferencia existente entre la señal de respuesta  $C_{m \times 1}$  respecto a la señal identificada  $\hat{C}_{m \times 1}$ , teniendo así a dos sistemas en operación paralela, como se ve en la Fig. 3.

Para describir a  $G_{m \times n}$ , que corresponde con el diagrama de bloques a la expresión (1) y por medio de su estimado  $\hat{G}_{m \times n}$ , se requiere considerar el proceso de innovación de la función convolucionada, y al usar el rotacional del funcional



FIGURA 2. Diagrama de bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra.

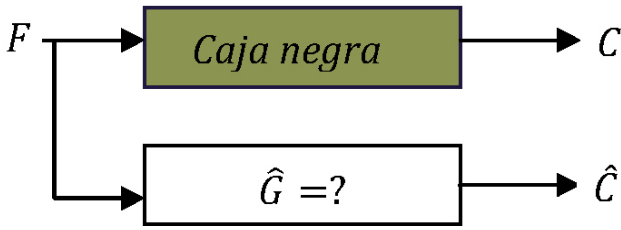


FIGURA 3. Diagrama de bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra y la de su identificador respecto a la dinámica interna.

del error, encontrar el valor óptimo para el sistema identificado  $\hat{C}_{m \times 1}$ .

Como se puede ver en el siguiente resultado, es necesario el uso de la pseudoinversa del vector de entradas  $F \in R^{[n \times 1]}$ , evitando que el proceso de estimación contenga una condición de singularidad.

**Teorema 2 (estimador por deconvolución en diferencias finitas).** Considérese al sistema extendido de la expresión (1) dentro de la métrica del intervalo de tiempo  $T$ , su respuesta identificada en relación con la Fig. 3, es óptima y tiene la forma

$$\hat{C}_{m \times 1} = \hat{G}_{m \times n} F_{n \times 1}. \quad (2)$$

Al ser su estimador  $G_{m \times n}$  una función respecto a la señal de excitación  $F_{n \times 1}$  y a la de salida  $C_{m \times 1}$ :

$$\hat{G}_{n \times m}^T = (F_{n \times 1} F_{1 \times n}^T)^+ F_{n \times 1} C_{1 \times m}. \quad (3)$$

En donde el operador  $+$  en el exponente indica que se ha realizado la pseudoinversa de acuerdo con Refs. 13 y 18.

### Prueba 2 (véanse anexos)

**Teorema 3 (estimador recursivo).** El estimador (3), expresado de manera recursiva para condiciones estacionarias en dos intervalos adyacentes con métricas descritas como  $T$  y  $T - 1$ , es:

$$\hat{G}_{n \times m, T}^T = P_{s_{n \times 1, T}} C_{1 \times m, T}^T + \hat{G}_{n \times m, T-1}^T. \quad (4)$$

### Prueba 3 (véanse anexos)

A continuación se presentan tres modelos recursivos para conocer el nivel de convergencia del estimador.

**Teorema 4 (error cuadrático medio).** El valor medio del error expresado de manera recursiva (RMSE de sus siglas en inglés: *Recursive Mean Square Error*) se encuentra en el funcional descrito por el segundo momento de probabilidad de la diferencia de la traza de la señal original ampliada ( $h_i := \text{traza}(G_{m \times n})_i$ ) dentro del grupo de intervalos con métricas  $t_i \uparrow T$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \in Z_+$  respecto a la traza estimada ( $\hat{h}_i := \text{traza}(\hat{G}_{m \times n})_i$ ), diferencia descrita con base en el error de estimación, definida como  $I_i := h_i - \hat{h}_i$ :

$$\text{RMSE}_n = \frac{1}{n} [I_n^2 + (n-1)\text{RMSE}_{n-1}]. \quad (5)$$

### Prueba 4 (véanse anexos)

**Teorema 5 (error expresado en decibeles).** En relación con el Teorema 4, de acuerdo con el error de estimación definido para el presente caso en función de la traza, tanto de la señal de referencia como de su estimada  $e_i := h_i / \hat{h}_i$ . Es descrito en decibeles de forma recursiva:

$$D_n = 10 \log_{10} \left( \left( \frac{n-1}{2n} \right) e_n^2 \right) + D_{n-1}. \quad (6)$$

### Prueba 5 (véanse anexos)

**Teorema 6 (error expresado en Bode).** La descripción recursiva de Bode de acuerdo con el Teorema 5, y a Ref. 20, se tiene:

$$B_n = 5 \log_{10} \left( \left( \frac{n-1}{2n} \right) e_n^2 \right) + B_{n-1}. \quad (7)$$

### Prueba 6 (véanse anexos)

La respuesta del sistema es estable, considerando que al ser un sistema discreto expresado en diferencias finitas de manera global de acuerdo con (2), existe una descripción de Lyapunov que cubre la trayectoria del sistema dentro de una región, condición que cubre el estimador, convergiendo a la matriz de parámetros.

**Teorema 7 (estabilidad robusta).** Considérese el sistema descrito en (1) como un sistema afín, teniendo la siguiente estructura:

$$F(T)_{n \times 1} = \tilde{G}(T)_{n \times n} F(T - \varepsilon)_{n \times 1}. \quad (8)$$

Con

$$\tilde{G}(T)_{n \times n} := I - \bar{G}(T - \varepsilon)_{n \times n} \varepsilon$$

es estable si cumple en el sentido de Lyapunov con (9)

$$M_{n \times n}^T(T) \bar{P}_{n \times n}(T) + \bar{P}_{n \times n}(T) M_{n \times n}(T) \leq 0 \quad (9)$$

### Prueba 7 (véanse anexos)

## 3. Simulación

En esta sección se considera, al contar tan sólo con la información del emisor y del receptor, que el estimador realice su trabajo de conocer la dinámica interna del modelo tipo caja negra. A continuación se presentan las simulaciones en MatLab<sup>®</sup> ver. 7, del filtro con una señal original descrita como  $F(x) = 0.006 \cos(x) + 0.02 \text{randn}$ , y la salida descrita como  $C(y, x) = 0.03 \cos(y - x) + 0.02 \text{randn}$ .

El problema es encontrar la secuencia de vectores renglón que conforman a la matriz  $G(y, x)$ , considerando a la señal fija  $F(x)$  para un rango de 9 vectores cada uno de ellos formado por un vector de 100 elementos. Se tiene de manera secuencial su descripción en la Fig. 4:

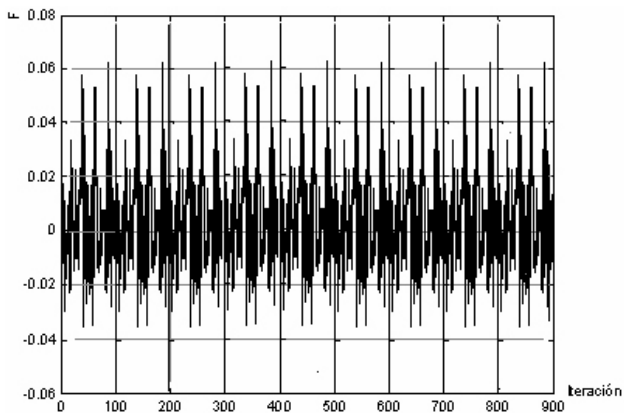


FIGURA 4. Señal original fija  $F$  para un intervalo de tiempo de 100 iteraciones evolucionando 9 veces.

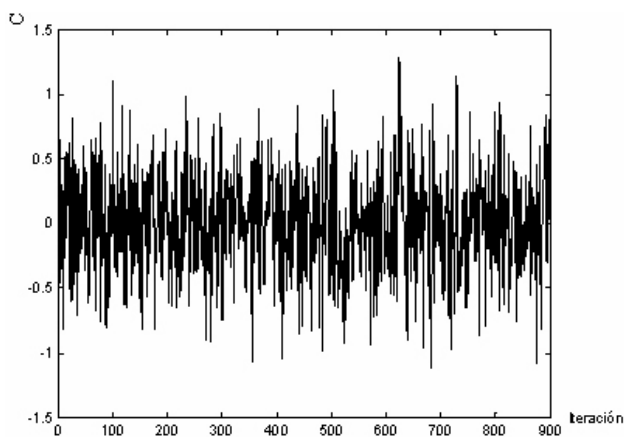


FIGURA 5. Señal de salida  $C_{m \times 1}$  vista a través de las 900 iteraciones.

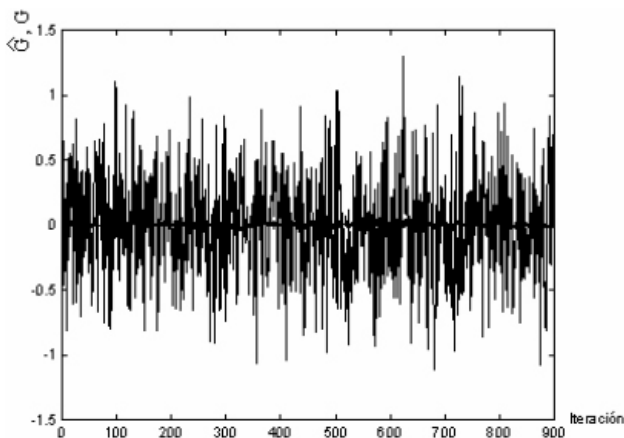


FIGURA 6. Señal estimada  $\hat{G}$  de acuerdo con (4), escribiendo a sus 900 elementos de forma secuencial respecto de  $G$ .

La respuesta de salida del sistema descrito en (1), dada su condición interna, fue simulada y se presenta en la Fig. 5.

De acuerdo con la Fig. 3, dada la excitación y la respuesta del sistema (1), así como la matriz extendida formada por los 9 vectores fila, se presenta de manera ilustrativa como una

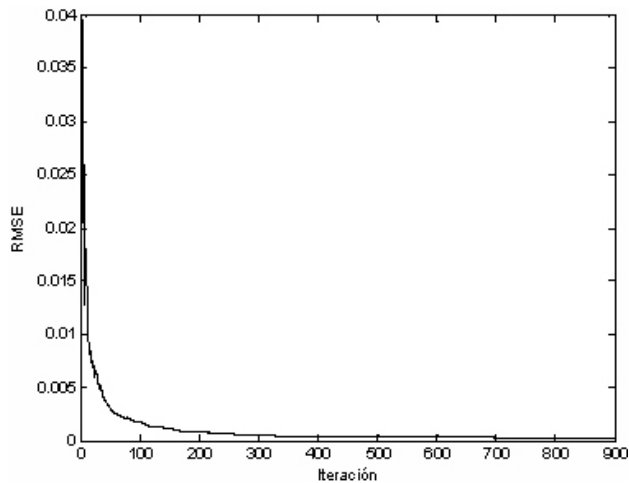


FIGURA 7. Funcional del error descrito como RMSE de acuerdo con (5) y a las trazas de las matrices extendidas  $G$  y  $\hat{G}$ .

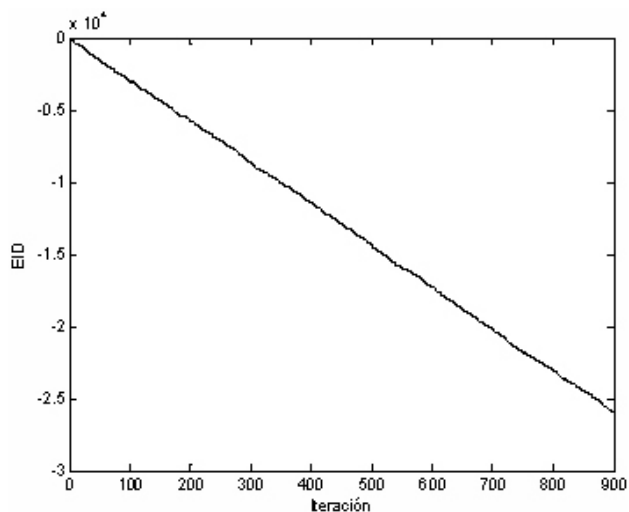


FIGURA 8. Error de estimación en decibeles ( $D$ ) de acuerdo con (6) para las 900 iteraciones.

secuencia de 900 iteraciones. La estimación de acuerdo con la expresión (4) se presenta en la Fig. 6.

Con el funcional del error descrito en (5), obtenido de manera recursiva a través de las trazas de las matrices extendidas  $G$  y  $\hat{G}$  fue posible observar el nivel de convergencia como lo muestra el resultado en la Fig. 7.

Se presenta el error de estimación en decibeles entre la señal original y su estimada de acuerdo con (6), observando en la Fig. 8, que hay un decaimiento que permite decir que el estimador converge a la información de la señal de referencia.

Haciendo variar la amplitud de los ruidos tanto de la señal de entrada como de salida de acuerdo con las siguientes reglas:  $F(x)_s = 0.006\cos(x) + 0.02(s/s - 1)$ ,  $C(y, x)_s = 0.03\cos(y - x) + 0.02(s/s - 1)$ , con  $s = \overline{1, 10}$ , que representa el hacer que el sistema evolucione en este caso 9000 veces, pero que en cada 900 iteraciones se reinicia y se incrementa  $s$  en una unidad hasta llegar a nueve. El resultado

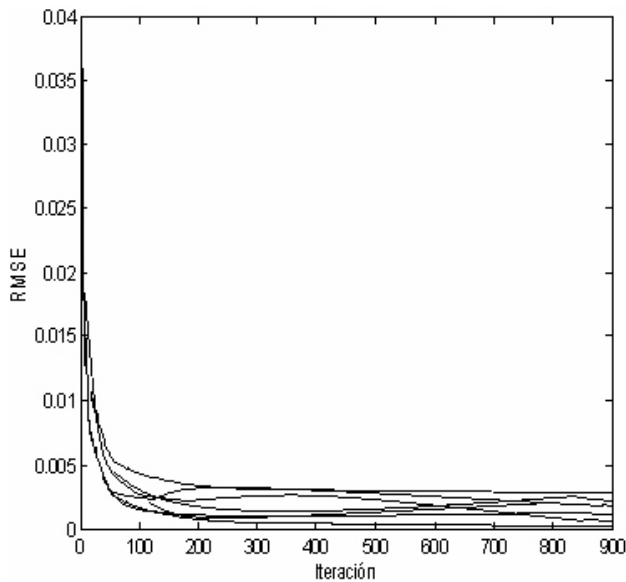


FIGURA 9. Funcional del error descrito como RMSE de acuerdo con (5) y a la variación de los ruidos tanto en  $C$  como en  $F$ .

son 10 gráficas de funcionales de error que, al sobreponerlas, son ilustradas en la Fig. 9.

La simulación es una forma de ver de manera ilustrativa los resultados anteriormente desarrollados desde (2) hasta (7), de forma que el estimador recursivo que se encuentra en función de dos estados de tiempo adyacentes (su presente y su pasado inmediato), logra describir de una manera aproximada el comportamiento interno del sistema convolucionado dentro de un intervalo de tiempo. La secuencia de matrices en la convolución permitió construir un sistema extendido formado por vectores fila, que al momento de realizar la simulación, permite establecerlos como una secuencia dentro de un proceso, como se puede observar en las Figs. 4, 5 y 6.

#### 4. Conclusión

En este trabajo se presentó un modelo matricial que permitió observar a la convolución dentro de un intervalo de tiempo  $T$  como un producto de matrices, una de ellas extendida respecto del vector fijo al que se le dio el nombre de vector de excitación o de entrada, observando que en todo este proceso no se perdiera el orden.

Se consideró el modelo tipo caja negra de acuerdo con la Fig. 3, para realizar la deconvolución y estimar a la matriz  $\hat{C}$  de una manera recursiva.

El funcional del error de estimación se describió a través de las trazas tanto de la matriz extendida de referencia como de su estimado para todos los intervalos de tiempo descritos en  $T$ .

En la simulación se propusieron dos funciones periódicas con la adición de perturbaciones que afectaron tanto a la entrada como la salida del modelo tipo caja negra.

Dentro de lo que fue el error de estimación, en la simulación se observó un nivel de convergencia del orden de  $10^{-25}$  unidades.

En relación con la estabilidad, esta es robusta, requiriendo que el modelo considerado tuviera una forma cuadrática de Lyapunov como la expresada en la demostración del teorema 7. Este tipo de descripción es válida para sistemas discretos a trozos, y se cumple la condición de semidefinida negativa.

Como trabajo futuro, queda el desarrollar el identificador por un proceso de deconvolución en diferencias finitas.

#### ANEXOS

**Prueba 1.** La convolución de forma aproximada por diferencias finitas con métricas de los intervalos de tiempo  $t_i \in T$ , y con  $C_i := (C(t_i), \forall i = \overline{1, m}, m \in \mathbb{Z}_+$  es descrita como

$$C(t_i) = \sum_{j=1}^n G(t_i - x_j) F(x_j). \quad (10)$$

Desarrollando la sumatoria de (10) con el índice  $i$  fijo se tiene

$$G(t_i - x_1)F(x_1) + G(t_i - x_2)F(x_2) + \dots + G(t_i - x_n)F(x_n). \quad (11)$$

Vectorialmente (11) para  $\forall i = \overline{1, m}, m \in \mathbb{Z}_+$  es

$$C_i = \begin{bmatrix} G(t_i - x_1) \\ G(t_i - x_2) \\ \vdots \\ G(t_i - x_n) \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} F(x_{j=1}) \\ F(x_{j=2}) \\ \vdots \\ F(x_{j=n}) \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (12)$$

Sabiendo que el vector extendido  $F(x_{j=\overline{1, n}})$  es fijo para todos los intervalos de tiempo con métricas contenidas en la métrica del intervalo de evolución del sistema  $T$ , la secuencia del vector de salida que abarca todos los intervalos contenidos en el intervalo de evolución  $T$  con  $C_i|_{i=1}^m$  queda expresada de acuerdo con (13):

$$C_{m \times 1} = \begin{bmatrix} G(t_1 - x_1) & \dots & G(t_1 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G(t_m - x_1) & \dots & G(t_m - x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_n) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Y que simbólicamente se tiene

$$C(T)_{m \times 1} = G(T)_{m \times n} F(T)_{n \times 1} \quad (14)$$

**Comentario 1.** En (14), al considerar que el desplazamiento temporal entre los vectores fila  $\{G(t_i - x_j)\}$  para todos los casos contenidos en  $T$  no afecta a la descripción matricial del sistema, se tiene un vector de excitación fijo  $F(X)$ ,  $X = \{x_j\}, j = \overline{1, n}, n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Prueba 2.** Transponiendo (2), el proceso de innovación cuadrático  $Q^T$  es descrito como

$$Q_{1 \times m}^T := (C_{1 \times m}^T - \hat{C}_{1 \times m}^T)^2 \quad (15)$$

El rotacional del proceso de innovación  $\nabla \times Q_{G,n \times m}^T$  es

$$\frac{\partial \times Q^T}{\partial \hat{G}_{n \times m}^T} = \frac{\partial \times (C_{1 \times m}^T - F_{1 \times n}^T \hat{G}_{1 \times m}^T)^2}{\partial \hat{G}_{1 \times m}^T} \quad (16)$$

De forma que la derivada direccional de  $F_{1 \times n}^T \hat{G}_{n \times m}^T$  respecto de  $\hat{G}_{n \times m}^T$  es  $F_{n \times 1}$ , al ser resultante ortogonal el vector derivado y aplicando (15) en (16):

$$\frac{\partial \times Q^T}{\partial \hat{G}_{n \times m}^T} = -2F_{n \times 1} C_{1 \times m}^T + 2F_{n \times 1} F_{1 \times n}^T \hat{G}_{n \times m}^T \quad (17)$$

En su punto de equilibrio, el rotacional del proceso de innovación es:

$$2F_{n \times 1} C_{1 \times m}^T = 2F_{n \times 1} F_{1 \times n}^T \hat{G}_{n \times m}^T \quad (18)$$

Y que al organizar (18), el estimador es descrito en (3).

**Comentario 2.** El estimador es óptimo al considerar el punto de equilibrio usado en (17) para describir (3).

**Prueba 3.** Considérese a (3) con

$$P_{sT} := [(F_{n \times 1, T} F_{1 \times n, T}^T)^+ F_{n \times 1, T}] \in R^{[n \times 1]}$$

se escribe para el conjunto de métricas de los intervalos que conforman a  $T$ :

$$\hat{G}_{n \times m, T}^T = \sum_{t=1}^T P_{s_{n \times 1, t}} C_{1 \times m, t}^T \quad (19)$$

Con condiciones estacionarias para el periodo de tiempo inmediato anterior:

$$\hat{G}_{n \times m, T-1}^T = \sum_{t=1}^{T-1} P_{s_{n \times 1, t}} C_{1 \times m, t}^T \quad (20)$$

Y que al ver (20) en (19), tomando el último término  $P_{s_{n \times 1, T}}$  de (19) se logra la obtención de (4).

**Prueba 4 (forma directa).** El RMSE, al usar el segundo momento de probabilidad respecto a la diferencia del error de estimación  $I_i$  para  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \in Z_+$ :

$$\text{RMSE}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_i)^2. \quad (21)$$

Para el último término con  $i = n$  de (21):

$$\text{RMSE}_n = \frac{1}{n} \left[ I_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (I_i)^2 \right] \quad (22)$$

El RMSE retardado con  $i = \overline{1, n-1}$  y condiciones estacionarias de acuerdo con las Refs. 16, 17, 21 y 22:

$$\text{RMSE}_{n-1} = \frac{1}{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} I_i^2. \quad (23)$$

Al describir este último resultado de acuerdo con (22):

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_i^2 = (n-1) \text{RMSE}_{n-1}. \quad (24)$$

El RMSE, considerando (24) en (22), se obtiene (5).

**Prueba 5.** El error dentro de la secuencia de estimación se define como un vector expandido:

$$|e_{1 \times 1, n}| = (E\{e_{1 \times n, i} e_{n \times 1, i}^T\})^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

El comportamiento de error en decibeles de forma estocástica respecto a su segundo momento de probabilidad para la secuencia  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \in Z_+$ , es

$$D_n = 20 \log_{10}(E\{e_{1 \times n, i} e_{n \times 1, i}^T\}_{i=\overline{1, n}})^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Su descripción discreta:

$$D_n = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \right). \quad (27)$$

Expandiendo respecto a su último término:

$$D_n = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{n} e_n^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 \right). \quad (28)$$

Usando las propiedades de los logaritmos:

$$D_n = 10 \log_{10}(e_n^2) - 10 \log_{10}(n) + 10 \log_{10} \left( \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 \right). \quad (29)$$

Para las propiedades de decaimiento estacionario, en el mismo sentido de los conceptos anteriores, la descripción en decibeles para  $i = \overline{1, n-1}$ :

$$D_{n-1} = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 \right). \quad (30)$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$D_{n-1} = 10 \log_{10} \left( \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 \right) - 10 \log_{10}(n-1), \quad (31)$$

donde

$$10 \log_{10} \left( \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 \right)$$

en términos de  $D_{n-1}$ :

$$10 \log_{10} \left( \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 \right) = 10 \log_{10}(n-1) + D_{n-1} \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (29), se obtiene

$$D_n = 10 \log_{10}(e_n^2) - 10 \log_{10}(2n) + 10 \log_{10}(n-1) + D_{n-1}. \quad (33)$$

Reescribiendo, y usando las propiedades de los algoritmos se obtiene (6).

**Prueba 6.** El error estocástico considera las propiedades de Bode y la descripción del error respecto al segundo momento de probabilidad. Para  $i = 1, n, n \in Z_+$  es

$$B_n = 10 \log_{10} (E \{ e_{1 \times n} e_{n \times 1}^T \}_{i=1, n})^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Considerando las propiedades de los logaritmos, se obtiene (7).

**Comentario 3.** El Bode recursivo de acuerdo con (7) y respecto con (26), cumple  $B(n) = 0.5D(n)$  en un sentido logarítmico.

**Prueba 7.** Existe una matriz  $S_{n \times m}$  que permite tener la forma

$$\dot{F}(T) = \bar{G}_{n \times n}(T) F(T)_{n \times 1}, \quad (35)$$

que en diferencias finitas tiene la estructura de (8) de acuerdo con

$$\tilde{G}(T)_{n \times n} = I_{n \times n} - \bar{G}(T - \varepsilon)_{n \times n} \varepsilon. \quad (36)$$

Al ser

$$\tilde{G}(T)_{n \times n} := S(T)_{n \times m} - G(T)_{m \times n}, \quad (37)$$

es estable si cumplen en el sentido de Lyapunov las condiciones siguientes:

$$V(T) = F(T)^T P F(T). \quad (38)$$

Dada la función candidata definida positiva y que en el caso que su incremento sea semidefinido negativo, es decir, que  $\Delta V \leq 0$ .

La función candidata en su primera diferencia finita es  $\Delta V(t) = \varepsilon \dot{V}(T)$ , en donde

$$\begin{aligned} \dot{V}(T) &= \dot{F}_{1 \times n}^T(T) P_{n \times n} F_{n \times 1}(T) \\ &+ F_{1 \times n}^T(T) P_{n \times n} \dot{F}_{n \times 1}^T(T). \end{aligned} \quad (39)$$

Y al considerar que se tiene el sistema afín:

$$\dot{F}_{n \times 1}(T) = \tilde{G}_{n \times n}(T) F_{n \times 1}(T) \quad (40)$$

Al sistema (3), y en diferencias finitas a (8), donde

$$\check{G}_{n \times n}(T - \varepsilon) := [I_{n \times n} - \bar{G}_{n \times n}(T - \varepsilon)] \quad (41)$$

Así como

$$M_{n \times n}(T) := \tilde{G}_{n \times n}(T) \check{G}_{n \times n}(T - \varepsilon) \quad (42)$$

Y

$$\bar{P}_{n \times n}(T) := \bar{P}_{n \times n} \check{G}_{n \times n}(T - \varepsilon) \quad (43)$$

Al desarrollar todo el proceso algebraico, considerando que la matriz  $\bar{P}$  es del tipo hermit, se cumple (9).

1. P. Bandzuch, M. Morhác y J. Kristiak, *Study of the Van Cittert and Gold Iterative Methods of Deconvolution and their Application in the Deconvolution of Experimental Spectra of Positron Annihilation* (Elsevier Science Publishers A1997) p. 506.
2. M. Chacón, *Procesamiento Digital de Imágenes* (Trillas, 2007).
3. S. Cordero, *CNDG-Library Geophysical Institute of Peru* **4** (2003) 131.
4. J.I. De la Rosa *et al.*, *Computación y Sistemas* **10-2** (2006) 135.
5. R.C. Dorf y R.H. Bishop, *Sistemas de Control Moderno*, (Pearson 2005).
6. C.V. García y J.J. Medel, *Filtrado por Deconvolución*, 2do. Simposio de Tecnología Avanzada (IPN 2008) 60.
7. J.C. García *et al.*, *Sistemas con Lógica Difusa* (IPN 2009).
8. M.S. Grewal y A.P. Andrews, *Kalman Filtering Theory and Practice* (Prentice Hall 1993).
9. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory* (Prentice Hall, 2002).
10. J.G. Holbrook, *Transformadas de Laplace Para Ingenieros en Electrónica* (Limusa, 1990).
11. P.A. Jansson, *Deconvolution with Applications in Spectroscopy* (Academic Press, 1984).
12. E. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (Vol. I, Limusa, 2003).
13. D.C. Lay, *Linear Algebra and its Applications* (Pearson, 1999).
14. J.J. Medel, *Computación y Sistemas* **5-3** (2008) 215.
15. J.E. Marsden y A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial* (Addison Wesley, 1988).
16. J. J. Medel, P. Guevara y D. Cruz, *International Conference on Mathematical Methods and Computational Techniques in Electrical Engineering* **7** (2005) 214.
17. W. Mendenhall y T. Sincich, *Probability and Statistics for Engineering and Science* (Prentice Hall, 1997).
18. B. Noble y J.W. Daniel, *Applied Linear Algebra* (Prentice Hall, 1989).
19. K. Ogata, *Discrete Time Control Systems* (Prentice Hall, 1996).
20. A.V. Oppenheim y A.S. Willsky, *Señales y Sistemas* (Pearson, 1998).
21. A.S. Poznyak y K. Najim, *Learning Automata and Stochastic Optimization* (Springer-Verlag, 1997).
22. V.S. Pugachev, *Introduction to the Theory of Probability* (Mir Moscú, 1973).
23. R. Snieder, J. Sheiman y C. Rodney, *Phys. Rev. E* **73** (2006) 066620.
24. M.A. Toledo y J.J. Medel, *International Conference on Automation and Information* **8** (2007) 271.