Métrica de despolarización escalar Q(M) como criterio para identificar sistemas retardadores o desfasadores puros

R. Espinosa-Luna
GIPYS, Centro de Investigaciones en Óptica, A.C.,
Loma del Bosque 115, Colonia Lomas del Campestre, 37150 León, Guanajuato, México,
e-mail: reluna@cio.mx

G. Atondo-Rubio y O.J. Velarde-Escobar
GIPYS, Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa,
Ciudad Universitaria s/n, 80010 Culiacán, Sinaloa, México,
e-mail: p027005@uas.uasnet.mx, osvel@uas.uasnet.mx

Recibido el 10 de junio de 2010; aceptado el 29 de julio de 2010

El criterio de la traza o teorema de Gil-Bernabeu es una condición necesaria y suficiente para que una matriz de Jones sea derivable de una matriz de Mueller asociada a sistemas ópticamente pasivos. La matriz que se obtiene de esta manera es llamada matriz de Mueller-Jones o matriz de Mueller pura. En este trabajo se muestran varios ejemplos de sistemas físicos, diatenuantes y no diatenuantes, que cumplen el teorema de Gil-Bernabeu o equivalentemente adquieren el valor superior asociado al índice de despolarización. Esto significa que tal criterio solamente es capaz de brindar información de las propiedades de despolarización de la luz por el medio, pero no brinda información sobre el carácter diatenuante asociado al mismo, y como consecuencia no puede diferenciar un polarizador de un retardador. Se demuestra que el límite superior de la métrica escalar de despolarización ($Q(M)$) puede emplearse como un criterio para identificar unívocamente matrices de Jones no diatenuantes; esto es, sistemas asociados a retardadores o desfasadores puros.

Descriptores: Óptica física; polarización; despolarización; matrices de Mueller; métricas escalares de despolarización.

The trace criterion or theorem of Gil-Bernabeu is a neccesary and sufficient condition for a Jones matrix to be derivable from a Mueller matrix associated to passive optical systems. The matrix obtained in this way is named Mueller-Jones or pure Mueller matrix. In this work, several examples are shown of physical systems, diattenuating and non-diattenuating, which fulfill the theorem of Gil-Bernabeu or equivalently take on the upper limit for the depolarization index. This means that this criterion can provide only information about the non-depolarizing character of light by systems, but it is unable to distinguish the diattenuating character associated to the systems and consequently it cannot distinguish a polarizer from a retarder. It is shown the upper limit of $Q(M)$ can be employed as a criterion to identity uniquely non-diattenuating Jones matrices; that is, systems associated to pure retarders or dephasers.

Keywords: Optical physics; polarization; depolarization; Mueller matrices; depolarization scalar metrics.

PACS: 42.25.Ja

1. Introducción

Las propiedades de polarización de la luz han sido un tema básico en el desarrollo de la óptica y sus aplicaciones. Por su parte, la despolarización de la luz y los métodos para generarla y determinarla han adquirido gran importancia en años recientes. Esto se debe, en parte, a las múltiples aplicaciones en áreas como las comunicaciones ópticas comerciales y de alta seguridad, donde se requiere del bombeo de luz láser de alta energía sin la dependencia en la polarización, usualmente presente en fibras ópticas dopadas con erbio. Se utiliza el término despolarización para medir la pérdida en el grado de polarización que experimenta un haz de luz después de haber interaccionado con algún medio material, en reflexión, transmisión, absorción, esparcimiento o en cualquier combinación entre estos mecanismos que un sistema pudiera responder. El grado de polarización se define como una medida del porcentaje de luz polarizada asociado a un haz de luz ($0 \leq DoP \leq 1$), usualmente se mide directamente del haz de luz en consideración, aun cuando pudiera medirse indirectamente utilizando la propia respuesta lineal de algún medio (matriz de Mueller), para estados de polarización incidentes conocidos. La respuesta lineal de un medio a la polarización asociada a un haz de luz incidente, se representa por una matriz de Mueller, la cual es válida solamente para los ángulos de incidencia y detección y para la longitud de onda empleados durante su determinación (por obvio que sea, es importante recordarlo, a fin de evitar errores en su manejo e interpretación). Las matrices de Mueller pueden describir sistemas que no despolarizan o bien que despolarizan, parcial o totalmente. Toda matriz de Mueller tiene asociado un índice de despolarización, definido como un solo número que representa el porcentaje promedio de despolarización ejercido por el sistema sobre un haz de luz incidente ($0 \leq DI(M) \leq 1$) [1]. En ambos casos, los respectivos intervalos de validez física se interpretan así: $DoP = 0$ significa que el haz de luz está totalmente despolarizado, mientras que DI(M) = 0 significa que el sistema despolariza totalmente cualquier tipo de luz incidente (sea éste polarizado, parcialmente polarizado o totalmente despolarizado). El valor $DoP = 1$ se interpreta como el correspondiente a un haz de luz totalmente polarizado y

$$DI(M) = 1$$

como un sistema físico que no despolariza en absoluto. Los valores comprendidos en el intervalo $0 < DoP < 1$ se asocian a estados parcialmente polarizados y los ubicados entre $0 < DI(M) < 1$ se interpretan como correspondientes a sistemas que despolarizan parcialmente. Un punto interesante a analizar es el siguiente: la definición misma del índice de despolarización presupone exclusivamente la respuesta lineal del medio, manifestada ésta en términos de los 16 parámetros reales de la matriz de Mueller, sin importar el estado de polarización de la luz incidente.

Se han definido otras métricas auxiliares escalares como los parámetros de polarizancia, $P(M)$, y diatenuancia, $D(M)$, que miden la respuesta polarizante o despolarizante de un sistema físico, determinado por su matriz de Mueller [2]. La métrica escalar de despolarización de la luz $Q(M)$, introducida en artículos anteriores, cuyos límites ($0 \leq Q(M) \leq 3$) permiten identificar una matriz de Mueller asociada a un sistema físico totalmente despolarizante, parcialmente despolarizante, no despolarizante diatenuante y no despolarizante no diatenuante, respectivamente [3,4]. Esta métrica ha probado ser consistente con las métricas señaladas anteriormente y los resultados reportados ofrecen evidencia de que aporta una mayor información acerca de la naturaleza interna de las matrices de Mueller asociadas a sistemas físicos de los que nos interesan sus propiedades ópticas [5,6].

Las propiedades matemáticas asociadas tanto a las matrices de Jones como a las de Mueller han sido ampliamente estudiadas. Las matrices de Jones se emplean para describir solamente sistemas que no despolarizan, si bien pueden ser diatenuantes (absorben energía) o no diatenuantes (no absorben energía). Por consiguiente, todo sistema describible por una matriz de Jones lo es también por una matriz de Mueller. Lo inverso sólo se cumple para las llamadas matrices de Mueller-Jones o matrices de Mueller puras [7,8]. El criterio de la traza o teorema de Gil-Bernabeu es una condición necesaria y suficiente para que una matriz de Mueller sea una matriz de Mueller-Jones y es aplicable a sistemas pasivos [9]. Esto significa que toda matriz que cumple este teorema, describe un sistema no despolarizante.

En este trabajo se muestran varios ejemplos de sistemas físicos, diatenuantes y no diatenuantes, que cumplen el teorema de Gil-Bernabeu y adquieren el valor superior asociado al índice de despolarización. Esto significa que ambos criterios solamente son capaces de brindar información de las propiedades de despolarización de la luz por el medio, pero no brindan información sobre el carácter diatenuante asociado a ellos y como consecuencia no pueden diferenciar un polarizador de un retardador. Se demuestra que el límite superior de $Q(M)$ puede emplearse como un criterio para identificar unívocamente matrices de Jones no diatenuantes; esto es, sistemas asociados a retardadores o desfasadores puros.

2. Relaciones básicas

La respuesta lineal de un sistema físico a la intensidad asociada a un haz de luz incidente, puede expresarse mediante la relación matricial

$$S^o = MS^i \Rightarrow \begin{pmatrix} s_0^o \\ s_1^o \\ s_2^o \\ s_3^o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_0^i \\ s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

donde M se conoce como matriz de Mueller del sistema, se representa como una matriz cuadrada 4×4 de elementos reales y S es la representación del estado de polarización de la luz mediante un vector de Stokes. El vector de Stokes se define en función de las componentes ortogonales del vector de campo eléctrico (E_p, E_s), a través de las intensidades, como

$$S^a = \begin{pmatrix} s_0^a \\ s_1^a \\ s_2^a \\ s_3^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_p^a E_p^a * \rangle + \langle E_s^a E_s^a * \rangle \\ \langle E_p^a E_p^a * \rangle - \langle E_s^a E_s^a * \rangle \\ \langle E_p^a E_s^a * \rangle + \langle E_s^a E_p^a * \rangle \\ i(\langle E_p^a E_s^a * \rangle - \langle E_s^a E_p^a * \rangle) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

donde $\alpha = i, o$ indica si el haz incide (i) o emerge (o) del sistema bajo estudio (por reflexión, transmisión, absorción, esparcimiento, dispersión, difusión, difracción, interferencia o cualquier combinación generada entre estos mecanismos de interacción luz-materia). Los paréntesis angulares indican promedios temporales o de conjunto (ensemble), indica la operación de conjugación compleja, $i^2 = -1$ es el número complejo.

Una característica muy importante de todo sistema óptico es su capacidad para despolarizar la polarización asociada a la luz con que interacciona. Existen varias propuestas para medir dicha propiedad. En este trabajo nos enfocaremos a las denominadas métricas de despolarización escalares, las cuales tienen por objetivo proporcionar un número capaz de proporcionar la máxima información posible acerca del sistema óptico bajo consideración. De esta manera, mientras más información se asocie a dicho número, mayor será el potencial que ofrece la métrica escalar correspondiente.

El índice de despolarización $DI(M)$ y sus límites físicamente permitidos, se definen por [1]

$$0 \leq DI(M) = \frac{\left\{ \sum_{j,k=0}^{3} m_{jk}^2 - m_{00}^2 \right\}^{1/2}}{\sqrt{3} m_{00}} \leq 1. \qquad (3)$$

A $DI(M)$ se le relaciona directamente con los elementos de la matriz de Mueller, no así con el estado de polarización de la luz incidente en particular. Este índice es una especie de respuesta despolarizante promedio ante cualquier haz de luz incidente, independientemente de su estado de polarización particular.

Los parámetros auxiliares de diatenuación, $D(M)$, y de polarizancia, $P(M)$, han sido definidos como [2]

$$0 \leq D(M) = \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}/m_{00} \leq 1, \tag{4a}$$

$$0 \leq P(M) = \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2}/m_{00} \leq 1, \tag{4b}$$

La métrica escalar $Q(M)$ para la despolarización de luz y su relación funcional con el índice de despolarización, los parámetros de diatenuación y polarizancia, así como sus límites físicos han sido definidos por [3,4]

$$\begin{aligned} 0 \leq Q(M) &= \frac{\sum\limits_{j=1,k=0}^{3} m_{jk}^2}{\sum\limits_{k=0}^{3} m_{0k}^2} = \frac{3[DI(M)]^2 - [D(M)]^2}{1 + [D(M)]^2} \\ &= \frac{\left\{ \sum\limits_{j,k=1}^{3} m_{jk}^2 \right\} / m_{00}^2 + [P(M)]^2}{1 + [D(M)]^2} \leq 3, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $Q(M) = 0$ ocurre para un sistema óptico totalmente despolarizante; $0<Q(M)<1$ para un sistema óptico parcialmente despolarizante; si $1 \leq Q(M)<3$ y $0<DI(M)<1$, el sistema despolariza la luz parcialmente también, pero si $1\leq Q(M)<3$ y $DI(M) = 1$, el sistema es no despolarizante y totalmente diatenuante; finalmente, si adquiere el valor superior, $Q(M) = 3$ describe un sistema óptico no despolarizante y no diatenuante, respectivamente [3,4]. Observe que solamente cuando el valor de $Q(M)$ se localiza dentro del tercer intervalo de valores permitidos es necesario calcular, además, el valor de $DI(M)$ y esto sólo en una ocasión; para el resto de los intervalos, $Q(M)$ es autoconsistente.

El teorema de Gil-Bernabeu establece que una condición necesaria y suficiente para que una matriz de Mueller sea derivable de una matriz de Jones, es que cumpla la relación [1,2,9]

$$Tr(M^T M) = 4m_{00}^2, \tag{6}$$

donde el superíndice T indica la operación de transposición matricial.

Una matriz de Mueller puede derivarse a partir de una matriz de Jones mediante el siguiente procedimiento matricial [7]:

$$\begin{aligned} M &= A(J \otimes J^*)A^{-1}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2}(A^T)^*, \\ J &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{7a}$$

donde el vector de Jones J está representado por una matriz 2×2 de elementos complejos, $\otimes$ representa una multiplicación de Kronecker o producto directo y A^{-1} representa la matriz inversa de A. Las matrices de transformación A se relacionan con el sistema de referencia empleado para describir los estados de polarización. Cuando la polarización se describe observando hacia la fuente, se tiene [12,13]

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix}, \\ A^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7b}$$

Por otro lado, si la descripción de la polarización se realiza utilizando el criterio de observar hacia la dirección de propagación, entonces A toma la forma [7, 13]

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix}, \\ A^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7c}$$

Observe que las expresiones (7b) y (7c) son, operacionalmente, la compleja conjugada una de la otra. A las matrices que cumplen la expresión (6) se les denomina matrices de Mueller-Jones o matrices de Mueller puras.

A su vez, conocidos los elementos de una matriz de Mueller-Jones, es posible reconstruir su matriz de Jones, mediante el siguiente procedimiento [14]

$$\begin{aligned} |J_{11}|^2 &= \frac{1}{2}(m_{00} + m_{01} + m_{10} + m_{11}), \\ |J_{12}|^2 &= \frac{1}{2}(m_{00} - m_{01} + m_{10} - m_{11}), \\ |J_{21}|^2 &= \frac{1}{2}(m_{00} + m_{01} - m_{10} - m_{11}), \\ |J_{22}|^2 &= \frac{1}{2}(m_{00} - m_{01} - m_{10} + m_{11}), \\ \cos(\Omega_{11} - \Omega_{12}) &= \frac{(m_{02} + m_{12})}{2\,|J_{11}|\,|J_{12}|}, \\ \cos(\Omega_{21} - \Omega_{22}) &= \frac{(m_{02} - m_{12})}{2\,|J_{21}|\,|J_{22}|}, \\ \cos(\Omega_{11} - \Omega_{21}) &= \frac{(m_{20} + m_{21})}{2\,|J_{11}|\,|J_{21}|}, \\ \cos(\Omega_{12} - \Omega_{22}) &= \frac{(m_{20} - m_{21})}{2\,|J_{12}|\,|J_{22}|}, \\ &|J_{11}|\,|J_{22}| \cos(\Omega_{11} - \Omega_{22}) \\ &+ |J_{12}|\,|J_{21}| \cos(\Omega_{12} - \Omega_{21}) = m_{22}, \end{aligned} \tag{8a}$$

donde los términos $|J_{ik}|$ y Ω_{ik} indican valores absolutos de amplitudes y fases, respectivamente. Observe que los elementos de la matriz de Jones sólo pueden reconstruirse hasta diferencias de fase (en el proceso de conversión actual, se pierde la información de los valores de la fase absoluta, con ello se pierde un grado de libertad). Es importante recordar que el procedimiento anterior es válido siempre que se cumplan las nueve relaciones bilineales existentes entre los 16 elementos m_{ik} de la matriz de Mueller-Jones [14,15]

$$
\begin{aligned}
m_{00}m_{01} - m_{10}m_{11} - m_{20}m_{21} - m_{30}m_{31} &= 0,\\
m_{00}m_{02} - m_{10}m_{12} - m_{20}m_{22} - m_{30}m_{32} &= 0,\\
m_{00}m_{03} - m_{10}m_{13} - m_{20}m_{23} - m_{30}m_{33} &= 0,\\
m_{01}m_{02} - m_{11}m_{12} - m_{21}m_{22} - m_{31}m_{32} &= 0,\\
m_{01}m_{03} - m_{11}m_{13} - m_{21}m_{23} - m_{31}m_{33} &= 0,\\
m_{02}m_{03} - m_{12}m_{13} - m_{22}m_{23} - m_{32}m_{33} &= 0,\\
m_{01}^2 - m_{11}^2 - m_{21}^2 - m_{31}^2 + m_{00}^2 - m_{10}^2 - m_{20}^2 - m_{30}^2 &= 0,\\
m_{02}^2 - m_{12}^2 - m_{22}^2 - m_{32}^2 + m_{00}^2 - m_{10}^2 - m_{20}^2 - m_{30}^2 &= 0,\\
m_{03}^2 - m_{13}^2 - m_{23}^2 - m_{33}^2 + m_{00}^2 - m_{10}^2 - m_{20}^2 - m_{30}^2 &= 0. \qquad (8b)
\end{aligned}
$$

En la Ref. 15 se discuten algunos resultados alternativos a los publicados hasta ahora respecto a la deducción de la Ec. (8b) y sobre la idoneidad de los ejemplos hasta ahora empleados.

3. Resultados

En un trabajo publicado recientemente en esta misma revista [5], en la Tabla I se presentaron los resultados de las métricas escalares para diatenuadores y retardadores ideales (polarizadores lineales y desfasadores de un cuarto y de media onda). Allí puede observarse claramente que, para cada uno de esos sistemas, el índice de despolarización toma su valor máximo (la unidad), lo que implica que cada uno de ellos es un sistema que no despolariza. Un sistema no despolarizante es describible por una matriz de Jones. Se observa también que allí se reporta el cumplimiento del teorema de Gil-Bernabeu para todos y cada uno de esos sistemas, cuya respuesta óptica se considera ideal. Sin embargo, en esa misma tabla se reporta que todos los elementos diatenuadores (polarizadores lineales) tienen diatenuancia máxima (con valor unitario) y los desfasadores (placas de media onda y de cuarto de onda, respectivamente) tienen diatenuancia mínima (valor nulo). Allí se hizo notar explícitamente este comportamiento; es decir, que ni el índice de despolarización ni el teorema de Gil-Bernabeu son capaces de diferenciar un elemento ideal diatenuador de uno desfasador. También se señaló, sin mucho énfasis, que solamente la métrica $Q(M)$ es capaz de identificar y diferenciarlos, pues para el primer caso (polarizadores lineales) toma el valor unitario y para el segundo (desfasadores de cuarto y de media onda), el valor de su cota superior, tres.

TABLA I. Matrices de Mueller para las que el índice de despolarización y el teorema de Gil-Bernabeu no distinguen entre sistemas diatenuadores y no diatenuadores, pero para las que la métrica $Q(M)$ puede emplearse como criterio para identificarlos unívocamente como desfasadores puros.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
$D(M)$	0.067	0.28	0.134	0.000	0.000	0.000
$DI(M)$	1.000	1.00	1.000	1.000	1.000	0.999
$Q(M)$	2.981	2.70	2.929	3.000	3.000	2.999
$Tr(M^TM)/4m_{00}^2$	1.000	1.00	1.000	1.000	1.000	0.999

Ahora, en la Tabla I de esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el índice de despolarización, Ec. (3), el parámetro de diatenuación, Ec. (4a) la métrica $Q(M)$, Ec. (5), y el teorema de Gil-Bernabeu, Ec. (6), a varias matrices de Mueller publicadas recientemente por otros autores y asociadas a sistemas físicos reales (Apéndice A). Aun cuando el índice de despolarización y el teorema de Gil-Bernabeu generan el mismo resultado para matrices de Mueller-Jones (la unidad), se considera prudente escribirlos explícitamente, dado que con frecuencia se emplean, erróneamente, como criterios independientes.

Obsérvese que, para todos los casos, el índice de despolarización $DI(M)$indica que los sistemas son no despolarizantes y que, por el teorema de Gil-Bernabeu, Ec. (6), las matrices de Mueller son del tipo de matrices de Mueller-Jones; por lo tanto y de acuerdo con (7), son matrices describibles por matrices de Jones. Obsérvese también que las matrices M_1, M_2, M_3 tienen un carácter diatenuante, pues el coeficiente de diatenuación $D(M)$, Ec. (4a), asociado a cada una de ellas es distinto de cero, lo cual es consistente con la interpretación que les da la métrica $Q(M)$.

Por otro lado, observese también que las matrices M_4, M_5, M_6 adquieren el valor de la cota superior de la métrica $Q(M) = 3$ y que, con ello, ocurre también que para todas estas matrices se tienen asociados parámetros de diatenuación nulos, lo que se interpreta como sistemas no despolarizantes y no diatenuantes. Es decir, cuando $Q(M) = 3$, se tienen identificados sistemas que tienen asociadas matrices de Jones no diatenuantes, de manera unívoca. Por lo tanto, proponemos, por primera vez, que el criterio de la cota superior de la métrica $Q(M)$ puede emplearse como criterio para identificar unívocamente sistemas desfasadores puros.

4. Conclusiones

En este trabajo se han presentado varios ejemplos de sistemas físicos reales, diatenuantes y no diatenuantes, que cumplen el teorema de Gil-Bernabeu o equivalentemente adquieren el valor superior asociado al índice de despolarización. Esto significa que este criterio solamente es capaz de brindar información de las propiedades de despolarización de la luz por el medio, pero no brinda información sobre el carácter diatenuante asociado a los mismos, y como consecuencia no puede diferenciar un polarizador de un retardador. Se ha demostrado que el límite superior de $Q(M)$ puede emplearse como un criterio para identificar unívocamente matrices de Jones no diatenuantes; esto es, sistemas asociados a retardadores o desfasadores puros.

Agradecimientos

Los autores agradecen al CONACYT (proyecto 100361) por el apoyo recibido para la realización de este trabajo, mismo que se desarrolló bajo el contexto del Grupo Interinstitucional de Polarización y Scattering (GIPYS). Así mismo, agradecen a los árbitros por las excelentes observaciones y sugerencias hechas al presente trabajo.

Apéndice A

Matrices de Mueller empleadas para el cálculo de los parámetros mostrados en la Tabla I. La matriz M_2 fue tomada de la página 171 de la Ref. 11 y las restantes matrices fueron adquiridas de la Ref. 16. En los cálculos realizados para la Tabla I se respetó el orden de aproximación utilizado por los respectivos autores en las matrices reportadas.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.06 & -0.031 & 0.0 \\ -0.06 & 0.856 & 0.284 & -0.43 \\ -0.031 & 0.266 & 0.475 & 0.837 \\ -0.001 & 0.442 & -0.831 & 0.331 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.115 & -0.066 & 0.023 \\ -0.115 & 0.998 & 0.004 & -0.001 \\ -0.066 & 0.004 & 0.993 & -0.001 \\ 0.023 & -0.001 & -0.001 & 0.991 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.988 & -0.152 & -0.022 \\ 0 & 0.151 & 0.986 & -0.067 \\ 0 & 0.032 & 0.063 & 0.998 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.857 & 0.283 & -0.431 \\ 0 & 0.265 & 0.475 & 0.839 \\ 0 & 0.443 & -0.833 & 0.332 \end{bmatrix},$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.892 & 0.130 & -0.432 \\ 0 & 0.320 & 0.492 & 0.809 \\ 0 & 0.318 & -0.861 & 0.398 \end{bmatrix}.$$

1. J.J. Gil y E. Bernabeu, *Opt. Acta/J. Mod. Opt.* **33** (1986) 185.
2. S.Y. Lu y R.A. Chipman, *Opt. Commun.* **146** (1998) 11.
3. R. Espinosa-Luna y E. Bernabeu, *Opt. Commun.* **277** (2007) 256.
4. R. Espinosa-Luna, E. Bernabeu y G. Atondo-Rubio, *Appl. Opt.* **47** (2008) 1575.
5. R. Espinosa-Luna, S. Hinojosa-Ruíz y G. Atondo-Rubio, *Rev. Mex. Fís.* **55** (2009) 201.
6. R. Espinosa-Luna, G. Atondo-Rubio y E. Bernabeu, *Optik* **121** (2010) 1058.
7. E.L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics* (John Wiley, N.Y., 1963) p. 135.
8. J.J. Gil, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **40** (2007) 1.
9. J.J. Gil y E. Bernabeu, *Opt. Acta/J. Mod. Opt.* **32** (1985) 259.
10. M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*, 7^{th} (expanded) ed. (Cambridge, 2005).
11. D. Goldstein, *Polarized Light* (Marcel Dekker, N.Y., 2003).
12. R.M.A. Azzam y N.M.Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (Nort-Holland, Amsterdam, 1989).
13. R. Espinosa-Luna, D. Rodríguez-Carrera, E. Bernabeu y S. Hinojosa-Ruíz, *Optik* **119** (2008) 757.
14. C. Brosseau, *Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach* (John Wiley, N.Y., 1998).
15. R. Espinosa-Luna, *Appl. Opt.* **46** (2007) 6047.
16. S. Manhas *et al.*, *Opt. Express* **14** (2006) 190.