

# Múltiples alturas de equilibrio en capilares cónicos

M. Pliego y C. Fuentes

*Departamento de Investigación y Posgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro Universitario, Cerro de las Campanas, Querétaro, Qro., 76010, México.*

G.J. Gutiérrez y A. Medina

*SEPI-ESIME-A, Instituto Politécnico Nacional, Av. de las Granjas #, 682 Col. Sta. Catarina, Mexico D.F., 02250, México.*

M.R. Aguilar

*Instituto Nacional de Pediatría, Insurgentes Sur 3700, Letra C, Col. Insurgentes Cuicuilco, México, D.F., 04530 México.*

Recibido el 18 de agosto de 2010; aceptado el 30 de septiembre de 2010

Se presenta un análisis basado en el método de los extremales de energía para calcular las alturas de equilibrio de un líquido que penetra espontáneamente tubos capilares cónicos (divergentes o convergentes, con ángulos de generatriz,  $\alpha$ , pequeños). Se discute un criterio general que permite caracterizar las alturas o depresiones de equilibrio en función de  $\alpha$ , del número de Bond,  $Bo$ , y del ángulo de contacto,  $\theta$ .

*Descriptores:* Interacción con superficies; flujo en capilares; fenómenos en microflujos.

An analysis, based on the method of extremals of the energy, to compute the equilibrium heights of a liquid that penetrates spontaneously capillaries of variable cross-section (divergent or convergent cones, with small slope angles,  $\alpha$ , of the generatrix) is presented. The general criterion that allows characterizing the equilibrium heights or depths, is given as a function of  $\alpha$ , the Bond number,  $Bo$ , and the contact angle,  $\theta$ .

*Keywords:* Interaction with surfaces; capillary flows; micro flows phenomena.

PACS: 47.55.dr; 47.55.nb; 47.61.-k.

## 1. Introducción

La penetración capilar de un líquido que moja, bien o mal, a las paredes de un tubo capilar vertical o, en el caso más general, a las diversas paredes de un espacio capilar [1–9], es un fenómeno muy común y de gran interés en áreas de estudio tan diversas como son la micro y noofluídica [2, 7, 10], el mojado de medios porosos [1, 4, 11], la creación de superficies hidrófilas o hidrófobas [12, 13], la recuperación de petróleo [14, 15], el transporte de líquidos en plantas [16], etc. El ascenso capilar está relacionado con la diferencia de presión a través del menisco del líquido, de manera que es posible alcanzar alturas de equilibrio cuando la presión hidrostática iguale a la presión capilar.

Las alturas de equilibrio pueden determinarse también por medio de métodos de extremales de la energía [17, 18], aunque éstos son de utilidad sólo cuando los líquidos pueden considerarse como no viscosos o cuando el efecto de las pérdidas viscosas es despreciable. En particular, en la caracterización de las alturas de equilibrio éste es el caso porque justo en los puntos críticos ocurre también un balance entre la fuerza gravitatoria y la capilar sin consideración del valor de la viscosidad del líquido [2, 4, 9, 17, 18]. En sistemas donde los efectos disipativos son importantes este método requiere de modificaciones sustanciales, las cuales están fuera del alcance de este trabajo.

El problema que se estudia en este trabajo es el de encontrar las alturas de equilibrio en capilares cónicos divergentes

(el radio del capilar crece conforme el líquido penetra en él) y capilares cónicos convergentes (el radio disminuye con la distancia de ingreso del líquido), bajo condiciones de buen y mal mojado, mediante un método variacional de la energía. Dicho método se basa en adimensionalizar la energía del sistema fluido y en encontrar las alturas adimensionales características del problema. Ello permite formular, mediante la comparación entre el número de Bond ( $Bo$ ), la pendiente de la generatriz de los conos ( $\alpha$ ) y el ángulo de mojado entre el líquido y las paredes del contenedor ( $\theta$ ) un criterio para caracterizar a las alturas de equilibrio como estables, inestables o de pseudo-equilibrio. Se presentan ejemplos en donde se muestra la utilidad del método, así como otras propiedades de interés.

Se debe mencionar que el método aquí desarrollado es válido únicamente para tubos eje simétricos lisos, pues cuando la línea perimetral de la sección transversal del tubo tiene esquinas, aparecen otros fenómenos (como los dedos de líquido en las orillas agudas [8, 16, 19] o el desarrollo de intensos esfuerzos cortantes [20]), lo cual impide obtener una expresión analítica exacta de la energía  $U$  de la columna líquida. Así mismo, la rugosidad de las superficies de contacto, también genera gran influencia en la conformación de los perfiles de equilibrio [13, 16]. En este trabajo, estos aspectos no son considerados.

Recientemente Tsori [12] analizó el problema de las alturas de equilibrio en conos con buen y mal mojado usando para ello una ecuación de balance de presiones. Desafortuna-

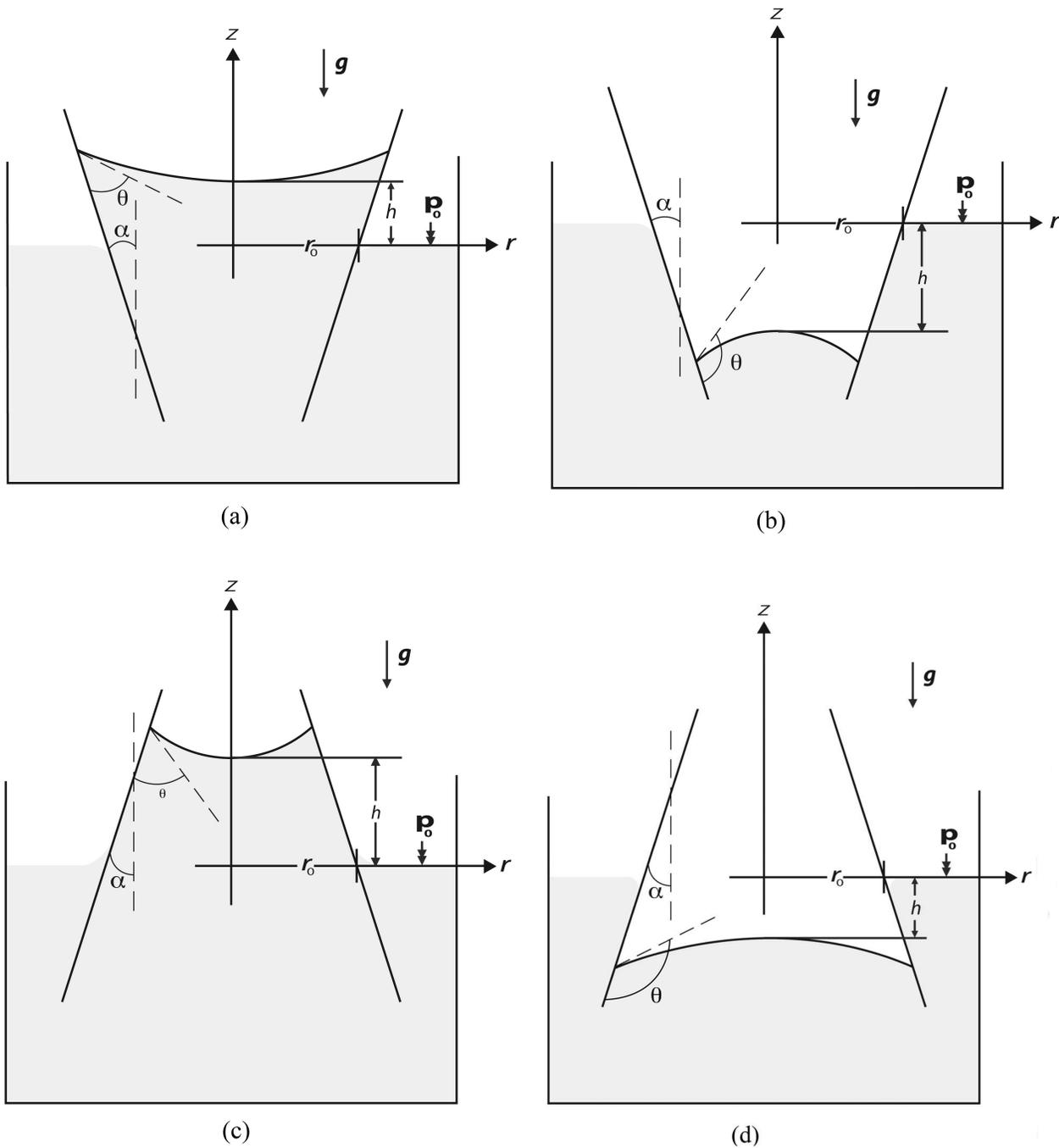


FIGURA 1. Forma esquemática de un capilar cónico de radio inicial  $r_0 = r(0)$  y ángulo interior  $\alpha$  (ángulo entre el eje  $z$  y la generatriz del cono). La altura de equilibrio, que alcanza el líquido al penetrar desde  $z = 0$ , es  $h$ . (a) Cono divergente con buen mojado:  $m > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $h > 0$ ; (b) cono divergente con mal mojado:  $m > 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ,  $h < 0$ ; (c) cono convergente con buen mojado:  $m < 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $h > 0$ ; (d) cono convergente con mal mojado:  $m < 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ,  $h < 0$ .

damente, su método limita el número de soluciones posibles para las alturas de equilibrio y las condiciones bajo las cuales estas alturas pueden ocurrir. Aquí, con el método de extremales de la energía, se muestra que es posible encontrar todas las alturas de equilibrio y las condiciones físicas que las determinan.

La división de este trabajo es como sigue. En la siguiente Sec. 2 se presenta el cálculo de la energía y de las alturas

de equilibrio del líquido, dentro de un capilar cónico vertical sujeto a la acción de la gravedad y condiciones de buen y mal mojado. En la Sec. 3 se hace un análisis de las alturas de equilibrio en función de las propiedades de mojado de los líquidos involucrados y del tipo de conos. Finalmente, en la Sec. 4 se presentan las conclusiones principales de este trabajo.

## 2. Alturas de equilibrio en capilares cónicos

Considérese que un tubo capilar vertical cónico, abierto por su parte superior, se pone en contacto con un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$ . De acuerdo a la experiencia, el líquido penetrará espontáneamente en el tubo capilar y alcanzará una cierta altura de equilibrio ( $h$ ) respecto al nivel del líquido exterior. Se asume que el cono tiene una generatriz que forma un ángulo  $\alpha$  respecto a la coordenada vertical  $z$ . Como se discutirá más adelante, dependiendo de las propiedades de mojado del líquido sobre la pared interior del cono, pueden ocurrir al menos cuatro posibilidades para las alturas de equilibrio, las cuales se muestran en la Fig. 1, donde  $\theta$  es el ángulo de mojado entre el líquido y la superficie sólida.

Para tubos capilares eje simétricos, la energía  $U$  de una columna líquida inmersa en él, puede ser escrita en términos de la altura alcanzada por la columna  $h$  y del radio del capilar  $r(z)$  a esa altura  $z$ , de la manera siguiente:

$$U = \pi \rho g \int_0^h r^2(z) z dz - \pi \sigma c \int_0^h r(z) dz, \quad (1)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\sigma$  la tensión superficial del líquido, de aquí que el primer término representa la energía potencial gravitacional y el segundo la energía superficial [2, 17, 18]. Esta expresión es válida considerando que el menisco es una sección de esfera y en el límite cuando  $r(z)$  es mucho menor que  $h$ . Para un cono el parámetro  $c = 2 \cos(\theta + \alpha)$ , mientras que en el caso de un cilindro  $c = 2 \cos \theta$  [2].

El radio del capilar puede variar de manera que genere conos o cilindros con estructuras más complejas. Para capilares cónicos la ecuación de la generatriz es

$$r(z) = r_0 + mz, \quad (2)$$

donde  $r_0 = r(z=0)$  es el radio a la altura a la que se encuentra el nivel del líquido exterior al cono y  $m = \tan \alpha$ , es decir, la pendiente de la generatriz. Sí el capilar es un cono divergente  $m > 0$ , y sí es un cono convergente  $m < 0$ .

La altura de la columna de líquido en un tubo (Fig. 1) puede ser encontrada de la condición de equilibrio para la energía de la columna líquida [17, 18]:

$$\frac{\partial U}{\partial h} = 0. \quad (3)$$

La sustitución de la Ec. (2) en (1) permite calcular la energía y al sustituirla en la Ec. (3) se determinan las raíces reales  $h_i$  [17].

Para capilares cilíndricos o cónicos divergente, se ha encontrado que existe una única altura de elevación capilar, mientras que para tubos capilares de forma cónica convergente se encuentran dos o más, esto para el caso de "buen" mojado [12, 17]. Para los casos de "mal" mojado hay una única depresión de equilibrio en capilares cilíndricos o cónicos convergentes y dos o más en los capilares cónicos divergentes [12].

Substituyendo la Ec. (2) en la Ec. (1) e integrando se encuentra que la energía de la columna líquida en un tubo capilar cónico es

$$U = \pi \rho g \left\{ r_0^2 \frac{h^2}{2} + 2r_0 m \frac{h^3}{3} + m^2 \frac{h^4}{4} \right\} - 2\pi \sigma \cos(\theta + \alpha) \left\{ r_0 h + m \frac{h^2}{2} \right\}. \quad (4)$$

Esta ecuación se puede escribir en forma adimensional escalando las alturas con el radio  $r_0$ , es decir, realizando el siguiente cambio de variables  $\xi = h/r_0$ ,  $Bo = \rho g r_0^2 / \sigma$  y  $U^* = U / \pi \rho g r_0^4$ , donde  $Bo$  es el número de Bond, el cual es el cociente de la presión hidrostática a la presión capilar.

Las expresiones adimensionales resultantes para la energía y su derivada con respecto a  $\xi$  son

$$U^* = \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{2m}{3} \xi^3 + \frac{m^2}{4} \xi^4 \right\} - \frac{2 \cos(\theta + \alpha)}{Bo} \left\{ \xi + \frac{m}{2} \xi^2 \right\}, \quad (5)$$

y

$$\frac{\partial U^*}{\partial \xi} = [1 + m\xi] \left[ (\xi + m\xi^2) - \frac{2 \cos(\theta + \alpha)}{Bo} \right]. \quad (6)$$

Las alturas de equilibrio, se obtienen ahora de la condición  $\partial U^* / \partial \xi = 0$ , lo que implica que las raíces de la Ec. (6) son en este caso

$$\xi_1 = -\frac{1}{m}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2m} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8m \cos(\theta + \alpha)}{Bo}} \right), \quad (7)$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{2m} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8m \cos(\theta + \alpha)}{Bo}} \right).$$

Las raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  serán reales siempre y cuando

$$1 + \frac{8m \cos(\theta + \alpha)}{Bo} \geq 0. \quad (8)$$

En caso de darse la igualdad vemos, de la Ec. (7), que  $\xi_2 = \xi_3 = -1/2m$ .

En lo que sigue se analizan sólo los casos en que el capilar es divergente o convergente ( $\alpha \neq 0$ ), pues para el caso en el que  $\alpha \rightarrow 0$ , se tiene un capilar cilíndrico, cuya generatriz tiene la forma  $r(z) = r_0$ , por lo que la Ec. (5) será en este caso

$$U^* = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{2 \cos(\theta)}{Bo} \xi \quad (9)$$

y la altura de equilibrio  $\xi = \cos \theta / Bo$ .

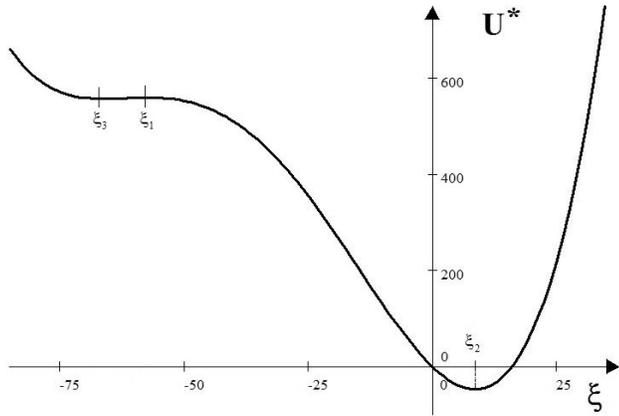


FIGURA 2. Gráfica de energía adimensional  $U^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que moja las paredes de un capilar cónico divergente ( $\alpha > 0$ ).  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son las alturas de equilibrio.

### 3. Análisis de las alturas de equilibrio

La Fig. 1 muestra esquemáticamente lo que sucede en capilares divergentes (Fig. 1a y 1b) o convergentes (Fig. 1c y 1d), según el líquido moje o no a las paredes del capilar. En ambos casos su eje de simetría está sobre el eje  $z$ . Para los casos 1(a) y 1(b),  $m > 0$ , mientras que para 1(c) y 1(d),  $m < 0$ . Como se mencionó más arriba el radio “inicial”, o radio  $r_0$ , es el radio a la altura a la que se encuentra el líquido en el exterior del capilar.

En los cálculos que siguen se usarán estimaciones basadas en la aproximación de la lubricación ( $|dr/dz| < 1$ ), lo que implica estudiar capilares estrechos, esto es,  $|h| \gg r(z)$  y que las variaciones de altura de la superficie del menisco son despreciables comparadas con la altura  $h$  misma. Se restringe el análisis a ángulos de apertura  $\alpha$  pequeños, lo cual implica que  $m = \tan \alpha \approx \alpha$ . Un valor de  $\alpha$  negativo corresponde a conos convergentes, mientras que para  $\alpha$  positivos se tendrán conos divergentes. Bajo estas consideraciones las soluciones de la Ec. (6) son entonces

$$\xi_1 = -\frac{1}{\alpha}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8\alpha \cos(\theta + \alpha)}{Bo}} \right),$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{2\alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8\alpha \cos(\theta + \alpha)}{Bo}} \right). \quad (10)$$

Mientras que la condición expresada en la Ec. (8) es

$$Bo \geq -8\alpha \cos(\theta + \alpha). \quad (11)$$

#### 3.1. Comportamiento de las alturas de equilibrio en función del número de Bond

##### 3.1.1. Líquidos que mojan las paredes del capilar ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ).

Analicemos primeramente el caso de un líquido que moja las paredes del capilar, *i.e.*,  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Para  $\alpha > 0$ , esto

es, para conos divergentes (Fig. 1a) la relación (11) se cumplirá para cualquier valor de  $Bo$  mayor que cero. De las dos raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  especificadas por la Ec. (10), sólo  $\xi_2$  tiene significado físico (si  $\theta + \alpha < \pi/2$ ), y representa la altura de equilibrio estable alcanzada por el líquido en el capilar ( $\xi_1$  y  $\xi_3$  no tiene significado físico, pues son alturas negativas, ver Fig. 2, en donde se grafica la energía adimensional, Ec. (5), y sus respectivos puntos críticos  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$ ).

Sin embargo, cuando  $\alpha < 0$ , esto es, para capilares convergentes (ver Fig. 1c) las raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  expresadas en la Ec. (10) tienen sentido físico sólo si el número de Bond es mayor que aquel que se encuentra determinado por la desigualdad (11) y  $\cos(\theta + \alpha) > 0$ . Si éste es el caso,  $\xi_3$  representa un estado de equilibrio inestable (ya que  $\partial^2 U^* / \partial \xi^2 > 0$ ), y  $\xi_2$  uno estable ( $\partial^2 U^* / \partial \xi^2 < 0$ ). Estas dos raíces se colapsan en una sola, y con ello en un equilibrio inestable, cuando  $Bo = -8\alpha \cos(\theta + \alpha)$ . Por ello ahora la altura de equilibrio estable es la proporcionada por  $\xi_1$  (Fig. 3).

Como ejemplo de estos hechos, considérese la Fig. 2 en donde se grafica la energía  $U^*$  para  $\theta = 0^\circ$  (por ej. la interacción vidrio-agua, donde  $\sigma = 0.07362$  N/m,  $\rho = 999$  Kg/m<sup>3</sup> y  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, para  $T_{amb} = 15.6^\circ\text{C}$  [21]). Supóngase que  $\alpha = 1^\circ$ , es decir, un cono divergente y  $Bo = 0.2$ . En tal caso  $r_0 = 1.2257$  mm y  $\xi_1 = -57.29$ ,  $\xi_2 = 8.6826$  y  $\xi_3 = -65.973$ . O sea  $\xi_1$  y  $\xi_3$  no tienen sentido físico, pues en este caso la altura debe ser positiva.

Por otra parte, si ahora  $\theta = 0^\circ$  y el capilar es convergente, ( $\alpha = -1^\circ$ ), y se mantienen los valores de  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $g$  ya mencionados, el número de Bond crítico es  $Bo_c = 0.13962$ . En tal caso,  $r_0 = 0.69887$  mm y  $\xi_1 = 57.29$ , y  $\xi_2 = \xi_3 = 28.645$ . Bajo las mismas condiciones en  $\theta$  y  $\alpha$ , pero con  $Bo = 0.2$ , se encuentra que  $\xi_1 = 57.29$ ,  $\xi_2 = 12.906$ , y  $\xi_3 = 44.384$ . Como se puede observar en la Fig. 3, para el número de Bond crítico, la altura de equilibrio estable está dada por  $\xi_1$ , mientras que cuando este mismo número es mayor que el crítico,

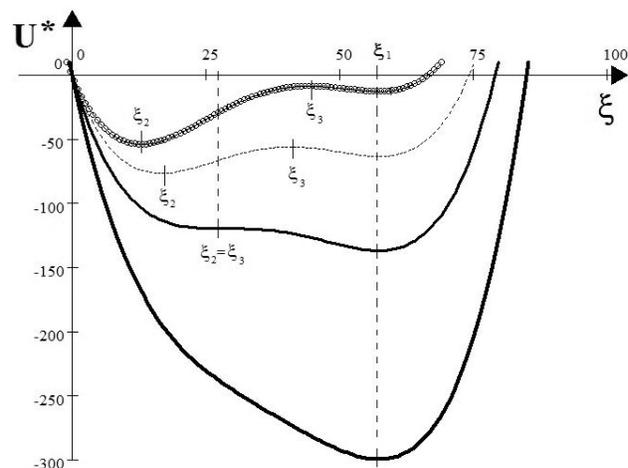


FIGURA 3. Gráficas de energía adimensional  $U^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que moja las paredes de un capilar cónico convergente ( $\alpha < 0$ ): línea gruesa continua  $Bo = 0.10$ , línea delgada continua  $Bo = 0.13962$ , (que es el número de Bond crítico), línea punteada  $Bo = 0.17$  y línea de círculos  $Bo = 0.20$ .

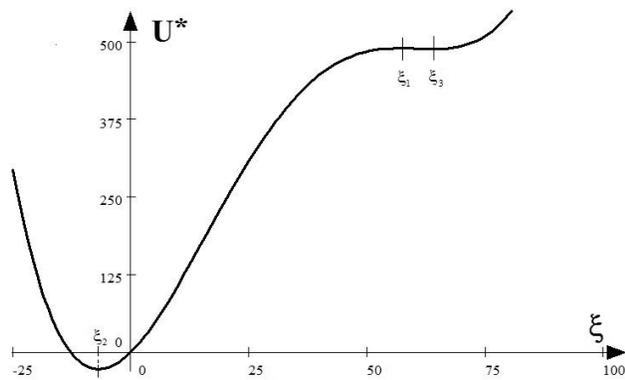


FIGURA 4. Gráfica de energía adimensional  $U^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que no moja las paredes de un capilar cónico convergente ( $\alpha < 0$ ).

la altura de equilibrio estable se da en  $\xi_2$ , esto es, en el extremo contrario.

Para  $0 < Bo < Bo_c$  en capilares convergentes, la única altura de equilibrio real es  $\xi_1 = -1/\alpha$ . Para los datos graficados en la Fig. 3, este valor es  $\xi_1 = 57.29$ , como se muestra ahí.

3.1.2. Líquidos que no mojan las paredes del capilar ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ )

Por otro lado, para el caso cuando el líquido no moja las paredes del capilar, *i.e.*  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ , los resultados encontrados en el caso anterior se invertirán. Si ahora  $\alpha < 0$ , conos convergentes, (Fig. 1d), la Ec. (11) se cumplirá para cualquier valor de  $Bo$  mayor que cero. Y nuevamente, de las raíces determinadas por la Ec. (10), sólo  $\xi_2$  tiene significado físico, (si  $\theta + \alpha > \pi/2$ ), y representa la altura de equilibrio estable alcanzada por el líquido en el capilar (ahora  $\xi_1$  y  $\xi_3$  son alturas positivas, lo que implica que no tienen significado físico, Fig. 4).

Para conos divergentes,  $\alpha > 0$  (Fig. 1b), las raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  de la Ec. (10) tienen sentido físico, sólo si ahora el número  $Bo$  es mayor que aquel que se encuentra determinado por la Ec. (11) y  $\cos(\theta + \alpha) < 0$ . En este caso  $\xi_2$  representa un estado de equilibrio estable ( $\partial^2 U^*/\partial \xi^2 < 0$ ), mientras que  $\xi_3$  uno de equilibrio inestable ( $\partial^2 U^*/\partial \xi^2 > 0$ ).  $\xi_2$  y  $\xi_3$  se colapsan en un solo valor y en una altura de equilibrio inestable, cuando  $Bo = -8\alpha \cos(\theta + \alpha)$ . Lo que hace que la altura de equilibrio estable sea  $\xi_1$  (Fig. 5).

Para ejemplificar los hechos mencionados, en la Fig. 4 se grafica la energía  $U^*$  para  $\theta = 140^\circ$  (*e.g.*, la interacción vidrio-mercurio, donde  $\sigma = 0.465$  N/m,  $\rho = 13.55 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> y  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, para  $T_{amb} = 15.6$  °C [21]). Supóngase ahora que  $\alpha = -1^\circ$ , o sea un cono convergente y de nuevo  $Bo = 0.2$ . De aquí que  $r_0 = 0.83644$  mm y  $\xi_1 = 57.29$ ,  $\xi_2 = -6.7517$  y  $\xi_3 = 64.042$ .

Manteniendo los valores de  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $g$ , pero tomando ahora  $\theta = 140^\circ$  y  $\alpha = 1^\circ$  (cono divergente), resulta que  $Bo_c = 0.10852$ . Y entonces  $r_0 = 0.61614$  mm,  $\xi_1 = -57.29$  y  $\xi_2 = \xi_3 = -28.645$ . Si se cambia el Bond por un valor de

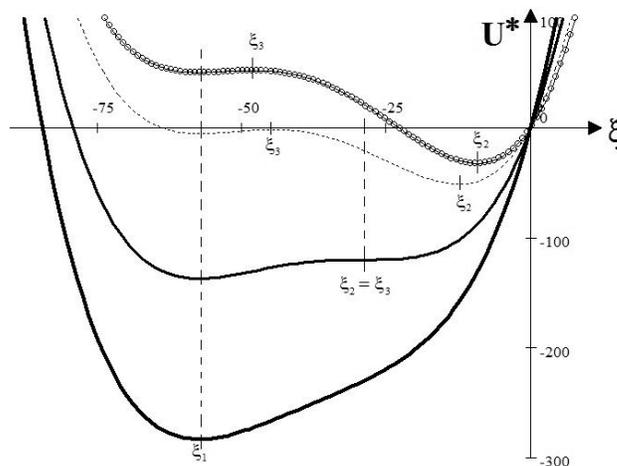


FIGURA 5. Gráficas de energía adimensional  $U^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que no moja las paredes de un capilar cónico divergente ( $\alpha > 0$ ): línea gruesa continua  $Bo = 0.08$ , línea delgada continua  $Bo = 0.10852$ , (número de Bond crítico), línea punteada  $Bo = 0.16$  y línea de círculos  $Bo = 0.20$ .

$Bo = 0.2$ , preservando  $\theta$  y  $\alpha$ , se encuentra que  $\xi_1 = -57.29$ ,  $\xi_2 = -9.2735$ , y  $\xi_3 = -48.023$ . Como puede verse en la Fig. 5, para el número de Bond crítico, la altura de equilibrio está dada por  $\xi_1$ , mientras que cuando  $Bo > Bo_c$ , la altura de equilibrio se traslada a  $\xi_2$ , esto es, al extremo contrario.

Para  $0 < Bo < Bo_c$ , en capilares divergentes, la única altura de equilibrio real sigue siendo  $\xi_1 = -1/\alpha$ . Para los datos graficados en la Fig. 5,  $\xi_1 = -57.29$ .

3.2. Espacio fase de  $\theta$  vs.  $\alpha$

En los dos apartados anteriores se analizó el comportamiento de las alturas de equilibrio, mediante la desigualdad dada por la Ec. (11), haciendo variar  $Bo$ , y fijando valores en los parámetros  $\alpha$  y  $\theta$ . Se puede, sin embargo, analizar el comportamiento de dichas alturas, mediante la Ec. (11), dando ahora valores al número de Bond  $Bo$  y al ángulo de mojado  $\theta$ , y con ello calcular un ángulo crítico de inclinación de la generatriz del cono  $\alpha_c$ , o dando valores específicos a  $Bo$  y  $\alpha$ , y calculando el ángulo crítico de mojado  $\theta_c$ , para estos valores. Al igual que en la sección anterior, se denominan como críticos a los valores de los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$ , que hacen que la Ec. (11) se haga una igualdad.

Para el primero de estos dos casos, se deduce de la Ec. (11) que

$$\frac{Bo}{8} = -\alpha_c \cos(\theta + \alpha_c). \tag{12}$$

Esta ecuación, para el caso de líquidos que mojan las paredes de capilar, *i.e.*,  $0 \leq \theta < \pi/2$ , y  $\cos(\theta + \alpha_c) > 0$ , sólo se cumplirá si  $\alpha_c < 0$  (capilares convergentes). Para valores específicos de  $Bo$  y  $\theta$ , el valor de  $\alpha_c$ , hace que de acuerdo con la Ec. (10),  $\xi_2 = \xi_3$ , por lo que la altura de equilibrio estable es  $\xi_1$ . Si  $\alpha < \alpha_c$ ,  $-8\alpha \cos(\theta + \alpha) > -8\alpha_c \cos(\theta + \alpha_c) = Bo$ , haciendo que los valores de  $\xi_2$  y  $\xi_3$  no sean reales y que la altura de equilibrio estable siga siendo  $\xi_1$ . Si ahora  $\alpha_c \leq \alpha < 0$ ,  $Bo = -8\alpha_c \cos(\theta + \alpha_c) \geq -8\alpha \cos(\theta + \alpha)$ ,

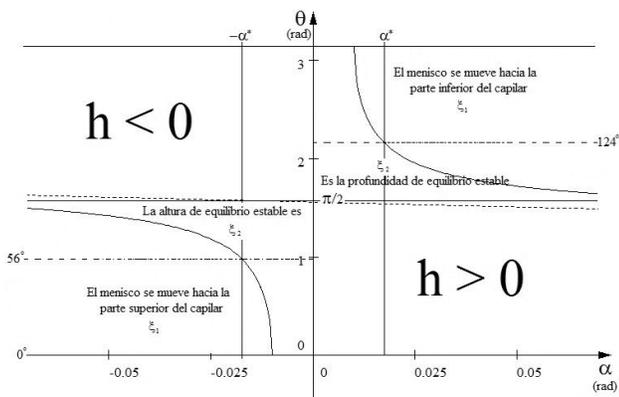


FIGURA 6. Diagrama de fase en el plano  $\alpha - \theta$  (ángulo de inclinación de la generatriz del cono vs. ángulo de mojado), con  $Bo = 0.08$  y  $|\alpha^*| = 1^\circ$ .

por lo que al cumplirse la condición enunciada en la Ec. (11), la altura de equilibrio estable es  $\xi_2$ , la cual es menor que  $\xi_1$ .

Para el caso de líquidos que no mojan las paredes del capilar ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ), y  $\cos(\theta + \alpha_c) < 0$ , la Ec. (12) se cumplirá únicamente si  $\alpha_c > 0$  (capilares divergentes). Dados  $Bo$  y  $\theta$ , este valor crítico  $\alpha_c$  hace que  $\xi_2 = \xi_3$  y que la depresión de equilibrio estable sea  $\xi_1$ . Por otro lado, si  $\alpha > \alpha_c$ , entonces  $-8\alpha \cos(\theta + \alpha) > -8\alpha_c \cos(\theta + \alpha_c) = Bo$ , haciendo que los valores de  $\xi_2$  y  $\xi_3$  no sean reales y que la altura de equilibrio estable siga siendo  $\xi_1$ . Pero, si  $\alpha_c \geq \alpha > 0$ , entonces  $Bo = -8\alpha_c \cos(\theta + \alpha_c) \geq -8\alpha \cos(\theta + \alpha)$ . Esta condición, enunciada en la Ec. (11), establece que la depresión de equilibrio estable es  $\xi_2$ , que es menor en magnitud que  $\xi_1$ .

Debido al hecho de que se está trabajando con ángulos de inclinación de la generatriz del cono pequeños, se puede ver de la Ec. (12) que  $\alpha_c \simeq -Bo/8 \cos \theta$ .

Si ahora se dan valores a  $Bo$  y a  $\alpha$ , el ángulo crítico de mojado es

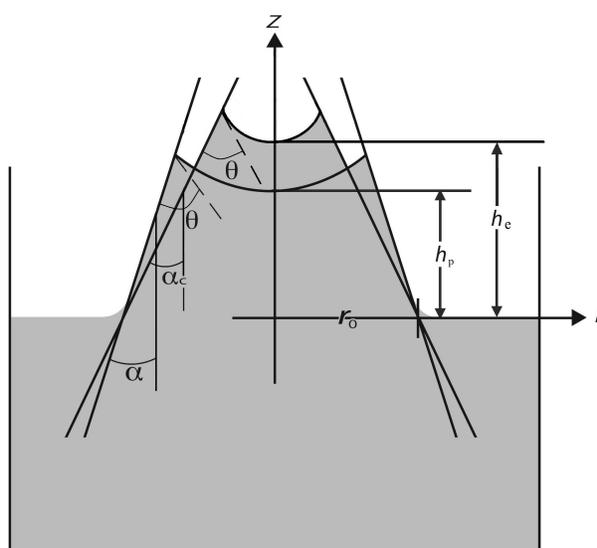
$$\theta_c = \arccos\left(-\frac{Bo}{8\alpha}\right) - \alpha. \tag{13}$$

Ahora bien, para que se cumpla la igualdad

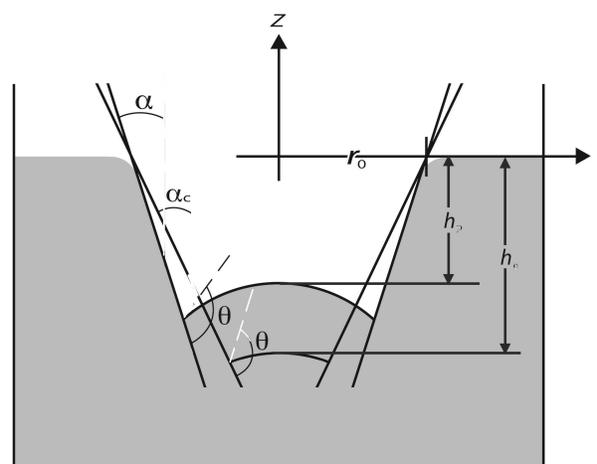
$$Bo = -8\alpha \cos(\theta_c + \alpha),$$

sí  $\alpha > 0$  (conos divergentes), entonces  $\cos(\theta_c + \alpha) < 0$ , lo que implica que  $\pi/2 < \theta_c \leq \pi$ , es decir, hay un mal mojado del líquido sobre las paredes del capilar. Como antes, este valor de  $\theta$  hace que  $\xi_2 = \xi_3$ , y que la depresión de equilibrio estable sea  $\xi_1$ . Por otra parte, si  $\theta < \theta_c$ , la Ec. (11) se cumplirá y en dicho caso la depresión de equilibrio estable será  $\xi_2$ , que como ya se ha mencionado es tal que  $|\xi_2| < |\xi_1|$  (sí  $\theta > \theta_c$ ,  $\xi_1$  seguiría siendo la depresión de equilibrio estable).

Para el caso  $\alpha < 0$  (conos convergentes), la igualdad  $Bo = -8\alpha \cos(\theta_c + \alpha)$  se cumplirá sólo si  $\cos(\theta_c + \alpha) > 0$ , lo cual implica que  $\pi/2 > \theta_c \geq 0$ , es decir, que el líquido moja las paredes del capilar. Nuevamente, al cumplirse dicha igualdad,  $\xi_2 = \xi_3$ , la altura de equilibrio estable es  $\xi_1$ . Para que la altura de equilibrio estable sea  $\xi_2$ , es necesario que  $\theta > \theta_c$ ,



(a)



(b)

FIGURA 7. Representación esquemática de las alturas o depresiones de equilibrio estable, deducidas mediante el método de balance de presiones  $h_p$  [12] ( $\xi_2$  en este trabajo), y su contraste con la nueva altura o depresión de equilibrio estable deducida aquí mediante el método de extremales de la energía  $h_e$ , ( $\xi_1$  en este trabajo). (a) Conos convergentes ( $\alpha < 0$ ), con buen mojado ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ),  $h > 0$ . (b) Conos divergentes ( $\alpha > 0$ ), con mal mojado ( $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ),  $h < 0$ .

pues sí  $\theta < \theta_c$ ,  $\xi_1$  sigue siendo la altura de equilibrio estable, con  $\xi_1 > \xi_2$ .

La Fig. 6 presenta la gráfica del diagrama de fase en el plano  $\alpha - \theta$  (ángulo de apertura vs. ángulo de contacto), a partir de la Ec. (13).

Para la rama derecha de dicha gráfica, los ángulos  $\alpha$  de la generatriz son positivos. Sí  $\theta + \alpha > \pi/2$  (líquidos con mal mojado),  $\xi$  es negativa, mientras que si  $\theta + \alpha < \pi/2$ ,  $\xi$  es positiva y será cero cuando  $\theta + \alpha = \pi/2$  (línea punteada diagonal).

Lo contrario a este comportamiento ocurre en la rama izquierda de esta gráfica, pues ahí  $\alpha < 0$ , y si  $\theta + \alpha > \pi/2$ ,

$\xi$  será positiva, mientras que si  $\theta + \alpha < \pi/2$ ,  $\xi$  es negativa e igual que antes  $\xi$  será cero cuando  $\theta + \alpha = \pi/2$ .

Es importante mencionar los casos en los cuales el ángulo de mojado  $\theta$  es muy cercano al valor de  $\pi/2$ , pues cuando  $\theta < \pi/2$  (buen mojado) y  $\alpha > 0^\circ$  (capilares divergentes), de manera que  $\theta + \alpha > \pi/2$ , en lugar de tener alturas de equilibrio estable con respecto al nivel exterior, habrá depresiones de alturas en el líquido que se encuentra en el interior del capilar. Si por otro lado  $\theta > \pi/2$  y  $\alpha < 0^\circ$ , de forma tal que  $\theta + \alpha \leq \pi/2$ , ahora las depresiones en altura, con respecto al nivel exterior, se transformarán en alturas de equilibrio para el líquido dentro del capilar.

Finalmente, la Fig. 7 muestra las alturas o depresiones de equilibrio estable  $\xi_1$ , que alcanza el líquido. Dichas alturas o depresiones, a las cuales Tsori [12] denomina “saltos” (*jump*), son mayores en magnitud que aquellas encontradas mediante el método de balance de presiones y que en este trabajo están dadas por  $\xi_2$ . Aún cuando esto pareciese un error cometido por Tsori, no es tal, debido a que el método de balance de presiones, no permite predecir cual será la altura de equilibrio estable, cuando los números de Bond son menores al crítico o cuando los ángulos de inclinación de la generatriz o de mojado, son mayores a sus valores críticos, resultado que como se muestra aquí, aparece de forma natural al utilizar el método de extremales de la energía.

#### 4. Conclusiones

En el presente trabajo se ha desarrollado un análisis de las alturas de equilibrio que un líquido, al penetrar de manera espontánea dentro de un tubo capilar de sección recta variable

(conos rectos divergentes o convergentes), alcanza. Utilizando como parámetros de análisis el número de Bond, el ángulo de mojado y el ángulo de inclinación de la generatriz del cono, se han podido caracterizar las diferentes alturas adimensionales de equilibrio ( $\xi$ ) alcanzadas dentro del capilar por el fluido. El número de alturas o depresiones de equilibrio que adquiera el líquido, se obtienen al comparar los valores que se asigne a estos parámetros, contra los valores críticos de los mismos. Estos últimos se encuentran al resolver la relación  $Bo = -8\alpha \cos(\theta + \alpha)$  y son de gran utilidad, pues nos permiten entender hacia dónde se desplazarán las alturas de equilibrio estable y de qué manera.

Finalmente, además de la utilidad intrínseca del problema discutido, este tipo de análisis puede ser de importancia en el estudio de tubos capilares con secciones transversales aún más complejas, como podrían ser los poros en medios empacados, o inclusive también, para sistemas bajo gradientes longitudinales de temperatura en donde la teoría aquí utilizada se modifica ligeramente. Algunos estudios teóricos y experimentales en esta dirección están ahora en desarrollo.

#### Agradecimientos

M.P. agradece al CONACyT por su apoyo a esta investigación mediante la beca doctoral 182647. A. M. agradece el apoyo del IPN a través del proyecto SIP IPN Clave: 20100890 y al proyecto CONACyT-IPN, “Laboratorio de experimentación en Termofluidos” Clave: 124304.

1. M. Francisco, A. Medina, F.A. Sánchez y F.J. Higuera, *Rev. Mex. Fís.* **54** (2008) 247.
2. P.G. de Gennes, F. Brochard-Wyart y D. Quéré, *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves* (Springer, Berlin, 2004).
3. D. Langbein, *Capillary Surfaces* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).
4. A. Marmur, *J. Colloid Interface Sci.* **129** (1989) 278.
5. H.M. Princen, *J. Colloid Interface Sci.* **30** (1969) 69.
6. H.M. Princen, *J. Colloid Interface Sci.* **30** (1969) 359.
7. E. Kim y G.M. Whitesides, *J. Phys. Chem. B.* **101** (1997) 855.
8. J. Bico y D. Quéré, *J. Colloid Interface Sci.* **247** (2002) 162.
9. T. Liu, K. F. Choi y Y. Li, *J. Physics D: Appl. Phys.* **40** (2007) 5006.
10. J. Berthier *et al.*, *J. Colloid Interface Sci.* **in press** (2009), doi:10.1016/j.jcis.2009.06.007.
11. G. Kaptay, *Colloids and Surfaces A* **230** (2004) 67.
12. Y. Tsori, *Langmuir* **22** (2006) 8860.
13. Y. Tsori, *Langmuir* **23** (2007) 8028.
14. G.J. Kramer, *Chem. Eng. Sci.* **53** (1998) 2985.
15. C. Quilliet y B. Berge, *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **6** (2001) 34.
16. M. de Meijer, K. Thurich y H. Militz, *Wood Science and Technology* **32** (1998) 347.
17. M.M. Kusakov y D.N. Nekrasov, *Dokladi Akademi Nauk URSS* **119** (1958) 107.
18. D.N. Nekrasov y M.M. Kusakov, *Dokladi Akademi Nauk URSS* **133** (1960) 100.
19. K.S. Birdil, D.T. Vul, A. Winter y A. Norregard, *Colloid Polym Sci.* **266** (1988) 470.
20. F.J. Higuera, A. Medina y A. Liñan, *Phys. Fluids* **20** (2008) 102.
21. A.D. Myshkis, V.G. Babskii, N.D. Kopachevskii, L.A. Slobozhanin y A.D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987).