

Entrelazamiento cuántico espurio con matrices seudopuras extendidas 4 por 4

J.D. Bulnes^a y L.A. Peche^{b,†}

^aUniversidade Estadual do Norte Fluminense,

Av. Alberto Lamego 2000, Campos dos Goytacazes - CEP: 28013-602, RJ, Brasil.

^bUniversidade do Estado do Rio de Janeiro,

Rua São Francisco Xavier, 524, Maracanã, Rio de Janeiro - CEP: 20550-900, RJ, Brasil.

Recibido el 26 de julio de 2010; aceptado el 26 de abril de 2011

En este artículo consideramos una extensión matemática para el concepto de matriz seudopura RMN, en el caso particular de matrices 4×4 , a partir de matrices no físicas. Se presentan ejemplos de matrices densidad entrelazadas son presentados. Aquel entrelazamiento, identificado por el criterio de Peres-Horodecki, es espurio debido a que no es posible asignar estas matrices a cualesquiera estados cuánticos de un sistema de espines nucleares RMN.

Descriptores: Entrelazamiento cuántico; criterio de Peres-Horodecki; estado seudopuro.

In this paper, we consider one mathematical extension for the concept NMR pseudo-pure matrix in the particular case of 4×4 matrices, from non-physical matrices. Examples of entangled density matrices are presented. Those entanglement, identified by the Peres-Horodecki criterion, is spurious because it is not possible to assign these matrices to any physical state of a system of NMR nuclear spins.

Keywords: Quantum entanglement; Peres-Horodecki criterion; pseudo-pure state.

PACS: 03.65.Ud; 03.67.Mn; 03.65.-w

1. Introducción

A pesar de la abundante y diversa producción en el campo de la computación cuántica [1,2], en la cual se vienen considerando distintos sistemas físicos y el uso de varias técnicas, inclusive híbridas, lo que sabemos del entrelazamiento cuántico (*quantum entanglement*) [3,4] en lo que se refiere a su significado físico, así como a su generación, preservación y medida, lo que en buena parte depende de la interpretación de los resultados experimentales, permanece claramente incompleto. La identificación teórica de dicho entrelazamiento es un asunto que, en el caso más general de mezclas estadísticas, aún no ha sido aclarado, mientras que su representación matemática está formalmente incorporada en la estructura de diversos algoritmos y protocolos. Del lado de las implementaciones experimentales de computación cuántica contamos varios casos destacables, algunos de ellos habiendo hecho uso de sistemas físicos (moléculas) con espín nuclear sensible al fenómeno de la resonancia magnética nuclear (RMN), como en las Refs. 5, 6 y 7, correspondientes al caso de espín nuclear $I = 1/2$, los que rápidamente llamaron la atención y generaron un intenso debate sobre la capacidad de los sistemas RMN para implementar o simular el entrelazamiento [8-11]; otras implementaciones han sido realizadas usando núcleos cuadrupolares de $I = 3/2$, como en [12-14]. En todos esos experimentos fueron manipulados (indirectamente) un número macroscópico de partículas cuánticas, pero sólo un número pequeño de *bits* cuánticos, los mismos que fueron realizados gracias a la preparación del sistema RMN en un estado inicial especial, a la evolución unitaria reflejada en los estados cuánticos y a los tiempos de coherencia relativamente largos. Dicho estado especial, denominado seudopuro (*pseudopure state*) [15,16] y que fue propuesto dentro del modelo de la

computación cuántica RMN de soluciones líquidas a temperatura ambiente para lidiar con la limitación impuesta por la imposibilidad de describir a la totalidad de los espines RMN por un estado puro, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\rho_\epsilon = \frac{1-\epsilon}{2^N} I + \epsilon \rho_1, \quad (1)$$

donde ρ_ϵ es una matriz densidad que representa el estado RMN de una molécula, ρ_1 es una matriz densidad correspondiente al elemento observable en un experimento RMN y $\epsilon \approx \mu H / 2^N k_B T$, siendo T la temperatura, k_B la constante de Boltzmann y N el número de *bits* cuánticos, es un parámetro que mide el grado de polarización del sistema de espines (en el campo magnético H).

Por otro lado, en la computación cuántica hay la necesidad de identificar el carácter separable o entrelazado de los estados cuánticos; es por ello que fueron establecidos algunos criterios, como el de Peres-Horodecki [17,18], que establece, en el caso particular de matrices densidad 4×4 , una condición necesaria y suficiente de separabilidad. Además, al considerar la naturaleza de los asuntos que aquí son abordados, conviene tener presente las siguientes informaciones:

- (i) una matriz no sólo por ser del tipo matriz densidad tendrá asegurada una representación de (correspondencia con) un estado físico accesible a un sistema cuántico;
- (ii) no todo estado que se pueda escribir con la forma entrelazada corresponderá, necesariamente, a un entrelazamiento verdadero, es decir, físico [19,20]; y
- (iii) el concepto de entrelazamiento matemático, que ha sido introducido para diferenciarlo del verdadero entrelazamiento y que fue discutido primero por Valqui [20], será usado para designar matrices que, teniendo el aspecto de entrelazadas, no puedan ser colocadas

en correspondencia con cualquier estado cuántico accesible al sistema considerado. Finalmente, conviene indicar que en las Refs. 21 y 22 se presentan situaciones concretas de entrelazamiento matemático en el caso de estados puros.

A continuación presentamos la estructura de este artículo: en la Sec. 2 definimos matemáticamente la extensión para los estados pseudopuros 4×4 , la que incluye una subsección sobre la estrategia usada para generar las matrices extendidas entrelazadas. En la Sec. 3 presentamos los ejemplos numéricos concretos de matrices con entrelazamiento. En la Sec. 4 presentamos una caracterización parcial del conjunto de estas matrices entrelazadas y, finalmente, presentamos nuestras conclusiones.

2. Matriz pseudopura extendida

Volvamos a la Ec. (1) con la intención de identificar la condición (apenas matemática) más general que garantice que ρ_ϵ sea una matriz densidad. Se puede percibir que tal condición existe, tratándose, en verdad, de 2 condiciones, siendo que una de ellas establece que ρ_1 no necesita ser una matriz densidad.

Denominamos matriz pseudopura extendida (ρ_ϵ^E) a una matriz densidad que tiene la forma (1), pero que, a diferencia de ésta, se obtiene a partir de matrices ρ_1 extendidas (ρ_1^E) que no son matrices densidad: ellas son hermiteanas, tienen traza 1 y al menos un autovalor negativo. Entonces escribimos,

$$\rho_\epsilon^E = (1 - \epsilon) \frac{I_4}{4} + \epsilon \rho_1^E, \tag{2}$$

donde I_4 es la matriz identidad 4×4 . Como ρ_1^E no es una matriz densidad, la matriz ρ_ϵ^E , de acuerdo con (2), también podría tener algún autovalor negativo; por ello, para dar consistencia a nuestra extensión, debemos imponer una segunda exigencia o condición, asegurando así que ρ_ϵ^E sea una matriz densidad. De la Ec. (2) es evidente que ρ_ϵ^E y ρ_1^E conmutan, entonces, si representamos por λ_ϵ y λ_1 a los respectivos autovalores, definidos para el conjunto de autovectores en común, la siguiente relación es válida:

$$\lambda_\epsilon = (1 - \epsilon)/4 + \epsilon \lambda_1. \tag{3}$$

Imponiendo que $\lambda_\epsilon \geq 0$, obtenemos la siguiente relación:

$$\lambda_1 \geq -(1 - \epsilon)/4\epsilon. \tag{4}$$

Esta condición sobre los autovalores de ρ_1^E garantiza que las ρ_ϵ^E sean matrices densidad. La extensión matemática así definida nos conducirá a los primeros ejemplos numéricos de

entrelazamiento espurio para mezclas estadísticas 4×4 y al hacerlo estaremos confrontados con el problema acerca de las condiciones bajo las cuales un criterio matemático (el de Peres-Horodecki) llega a tener validez física para el sistema cuántico considerado.

2.1. Método numérico

El esquema que hemos implementado para buscar matrices ρ_ϵ^E que sean entrelazadas consiste en generar (repetidamente y dentro de ciertos intervalos) un conjunto de 15 números aleatorios que consideramos como los coeficientes independientes de la expansión de una matriz ρ_1^E individual en la base de productos de matrices de Pauli. Cuando todos los autovalores de la matriz ρ_1^E así construída satisfagan la Ec. (4) entonces, a través de la Ec. (2) y para un valor del parámetro ϵ previamente elegido, construimos la matriz ρ_ϵ^E y la matriz transpuesta parcialmente, $P_{\rho_\epsilon^E}$, así como sus autovalores. Si verificamos que (al menos) un autovalor de $P_{\rho_\epsilon^E}$ es negativo, entonces, de acuerdo con el criterio de Peres-Horodecki, la correspondiente matriz ρ_ϵ^E será entrelazada. A continuación desarrollamos explícitamente este método para los siguientes valores del parámetro ϵ : 10^{-2} y 3.3×10^{-5} .

3. Ejemplos de matrices 4×4 con entrelazamiento espurio

En la base de productos de matrices de Pauli, construida a partir de $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, con $\sigma_1 = I_2$, $\sigma_2 \equiv \sigma_x$, $\sigma_3 \equiv \sigma_y$, $\sigma_4 \equiv \sigma_z$, una matriz densidad ρ , de tamaño 4×4 , se puede expresar de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 C_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j, \tag{5}$$

donde $C_{1,1} = 1$ y $-1 \leq C_{i,j} \leq 1$. Pero si necesitamos representar matrices que son únicamente hermiteanas y tienen traza igual a 1, entonces el intervalo de posibles valores para los 15 coeficientes independientes $C_{i,j}$ es mucho más amplio. En particular, para el conjunto de coeficientes $C_{i,j}$ ordenados en la matriz C ,

$$C = \begin{pmatrix} +1.0000 & -0.6429 & -29.4845 & -7.2208 \\ +4.1172 & -8.5393 & +5.5682 & -23.6294 \\ -22.7868 & -18.9588 & +4.6408 & -6.2254 \\ -28.7033 & -15.2617 & -19.8301 & -16.7560 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

resulta, usando la Ec. (5), la siguiente matriz:

$$\rho_1^E = \begin{pmatrix} -12.9200 & -3.9762 + 12.3287i & -4.8780 + 7.2530i & -3.2950 + 3.3476i \\ -3.9762 - 12.3287i & -0.9316 & -0.9746 + 6.1318i & +6.9367 + 4.1403i \\ -4.8780 - 7.2530i & -0.9746 - 6.1318i & +9.8096 & +3.6547 + 2.4136i \\ -3.2950 - 3.3476i & +6.9367 - 4.1403i & +3.6547 - 2.4136i & +5.0420 \end{pmatrix} \tag{7}$$

verificando que es hermiteana, tiene $\text{Tr}(\rho_1^E) = 1$ y dos autovalores negativos,

$$\lambda_1 = -23.1909, \quad \lambda_2 = -4.4928, \quad \lambda_3 = +7.3209, \quad \lambda_4 = +21.3628,$$

siendo, por lo tanto, una matriz no física. Al considerar la matriz ρ_1^E anterior y el valor $\epsilon = 10^{-2}$ en la Ec. (2) obtenemos la siguiente matriz: ρ_ϵ^E ,

$$\rho_\epsilon^E = \begin{pmatrix} +0.1183 & -0.0398 + 0.1233i & -0.0488 + 0.0725i & -0.0330 + 0.0335i \\ -0.0398 - 0.1233i & +0.2382 & -0.0097 + 0.0613i & +0.0694 + 0.0414i \\ -0.0488 - 0.0725i & -0.0097 - 0.0613i & +0.3456 & +0.0365 + 0.0241i \\ -0.0330 - 0.0335i & +0.0694 - 0.0414i & +0.0365 - 0.0241i & +0.2979 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

verificando que es hermiteana, tiene $\text{Tr}(\rho_\epsilon^E) = 1$ y autovalores no negativos:

$$\lambda_1 = +0.0156, \quad \lambda_2 = +0.2026,$$

$$\lambda_3 = +0.3207, \quad \lambda_4 = +0.4611;$$

por lo tanto, ρ_ϵ^E es una matriz densidad. Ahora aplicaremos de manera formal el criterio de Peres-Horodecki a la matriz ρ_ϵ^E ; para ello, primeramente, debemos definir una base de matrices densidad: $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$. Entonces consideramos las siguientes matrices:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Al reescribir la matriz ρ_ϵ^E , en (8), en la base de matrices densidad, dada en (9), tenemos

$$\rho_\epsilon^E = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 \mathcal{D}_{i,j} \rho_i \otimes \rho_j,$$

donde los valores de los coeficientes $\mathcal{D}_{i,j}$ han sido ordenados en la siguiente matriz:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} +2.3456 & +0.0576 & +0.6592 & +2.6488 \\ +0.4288 & +0.1336 & -0.4280 & -1.0416 \\ +1.1232 & -0.2536 & -0.2216 & -0.7248 \\ +1.6032 & -0.9848 & -0.8000 & -0.5456 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

obtenida por una transformación de cambio de base a partir de los coeficientes de ρ_ϵ^E en la base de productos de matrices de Pauli $\mathcal{B}_{i,j} = \text{tr}(\rho_\epsilon^E \sigma_i \otimes \sigma_j)$. La matriz transpuesta parcial de ρ_ϵ^E , representada aquí por $P(\rho_\epsilon^E)$ y definida (indistintamente) por la transposición de cualquiera de sus partes, como a continuación,

$$P(\rho_\epsilon^E) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 \mathcal{D}_{i,j} \rho_i \otimes (\rho_j)^T$$

nos conduce a la siguiente matriz:

$$P(\rho_\epsilon^E) = \begin{pmatrix} +0.1183 & -0.0398 - 0.1233i & -0.0488 + 0.0725i & -0.0097 + 0.0613i \\ -0.0398 + 0.1233i & +0.2382 & -0.0330 + 0.0335i & +0.0694 + 0.0414i \\ -0.0488 - 0.0725i & -0.0330 - 0.0335i & +0.3456 & +0.0365 - 0.0241i \\ -0.0097 - 0.0613i & +0.0694 - 0.0414i & +0.0365 + 0.0241i & +0.2979 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

la cual tiene los siguientes autovalores:

$$\lambda_1 = -0.0080, \quad \lambda_2 = +0.2379, \quad \lambda_3 = +0.3425, \quad \lambda_4 = +0.4275,$$

con $\lambda_1 < 0$. Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de Peres-Horodecki, la matriz ρ_ϵ^E es entrelazada.

Un segundo ejemplo de esta situación pero usando un valor del parámetro igual a $\epsilon = 3.3 \times 10^{-5}$, que es del mismo orden de magnitud como en las implementaciones experimentales de CC-RMN de soluciones líquidas a temperatura ambiente, y la siguiente matriz de coeficientes de ρ_1^E en la base de productos tensoriales de matrices de Pauli:

$$\mathcal{C} = 10^3 \times \begin{pmatrix} +0.0010 & +9.1000 & +8.9909 & +8.8544 \\ +9.7067 & +8.9003 & +9.9779 & +9.5595 \\ +9.9593 & +9.6036 & +9.7759 & +9.3788 \\ +9.8103 & +9.6321 & +9.2731 & +9.9868 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Entonces, usando la Ec. (2), obtenemos la siguiente matriz:

$$\rho_\epsilon^E = \begin{pmatrix} +0.4864 & +0.1545 - 0.1507i & +0.1589 - 0.1595i & -0.0072 - 0.1615i \\ +0.1545 + 0.1507i & +0.1755 & +0.1541 + 0.0031i & +0.0012 - 0.0048i \\ +0.1589 + 0.1595i & +0.1541 - 0.0031i & 0.1597 & -0.0044 + 0.0023i \\ -0.0072 + 0.1615i & +0.0012 + 0.0048i & -0.0044 - 0.0023i & +0.1784 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

la cual es hermiteana, tiene $\text{Tr}(\rho_\epsilon^E) = 1$ y autovalores

$$\lambda_1 = +0.0008, \lambda_2 = +0.0256, \lambda_3 = +0.2179, \lambda_4 = +0.7557,$$

y la siguiente matriz transpuesta parcialmente:

$$P(\rho_\epsilon^E) = \begin{pmatrix} +0.4864 & +0.1545 + 0.1507i & +0.1589 - 0.1595i & +0.1541 + 0.0031i \\ +0.1545 - 0.1507i & +0.1755 & -0.0072 - 0.1615i & +0.0012 - 0.0048i \\ +0.1589 + 0.1595i & -0.0072 + 0.1615i & +0.1597 & -0.0044 - 0.0023i \\ +0.1541 - 0.0031i & +0.0012 + 0.0048i & -0.0044 + 0.0023i & +0.1784 \end{pmatrix} \quad (14)$$

con autovalores

$$\lambda_1 = -0.0024, \lambda_2 = +0.0288, \lambda_3 = +0.2181, \lambda_4 = +0.7555,$$

siendo un autovalor negativo, como en el primer ejemplo. Por lo tanto, ambas matrices ρ_ϵ^E , dadas en (8) y (13), corresponden a situaciones de entrelazamiento de acuerdo con el criterio de Peres-Horodecki.

4. Caracterizando el conjunto de matrices ρ_ϵ^E entrelazadas

Los ejemplos anteriores de matrices ρ_ϵ^E entrelazadas, generadas a partir de matrices ρ_1^E , no constituyen casos aislados. En esta sección vamos a caracterizar parcialmente el conjunto de las matrices de ese tipo. La Fig. 1 muestra un mapa donde se presenta la fracción de matrices ρ_ϵ^E entrelazadas en función de los intervalos de definición de las matrices ρ_1^E , las mismas que, a través de la Ec. (2), producen las matrices entrelazadas. La Fig. 2 muestra un histograma del número de matrices entrelazadas que tienen una distancia de Hilbert-Schmidt dada al denominado “estado gato”, el estado con el máximo grado de entrelazamiento, donde las matrices consideradas fueron definidas a partir de matrices ρ_1^E dentro de un intervalo $\langle C_{\min}, C_{\max} \rangle$ fijo (ver sub-Sec. 2.1); esta figura nos da una idea del grado de entrelazamiento asociado con las matrices extendidas entrelazadas.

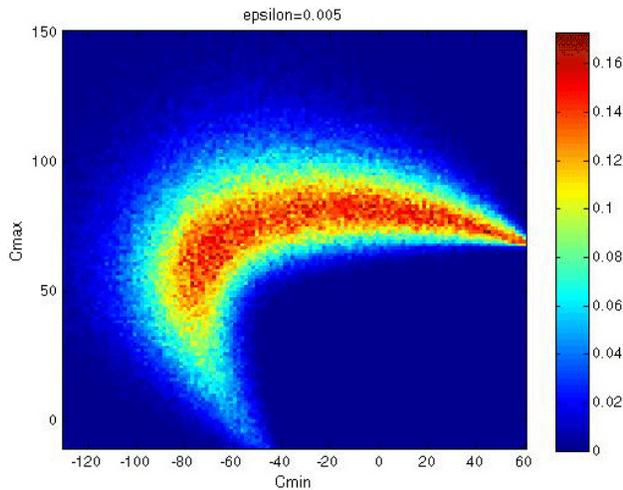


FIGURA 1. Fracción de matrices ρ_ϵ^E entrelazadas (en escala de colores) encontradas en 1000 matrices ρ_1^E generadas aleatoriamente (como es descrito en la sub-sección 2.1) dentro de cada intervalo $\langle C_{\min}, C_{\max} \rangle$; fueron considerados 130 valores tanto para C_{\min} como para C_{\max} , siendo el valor del parámetro usado igual a $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$.

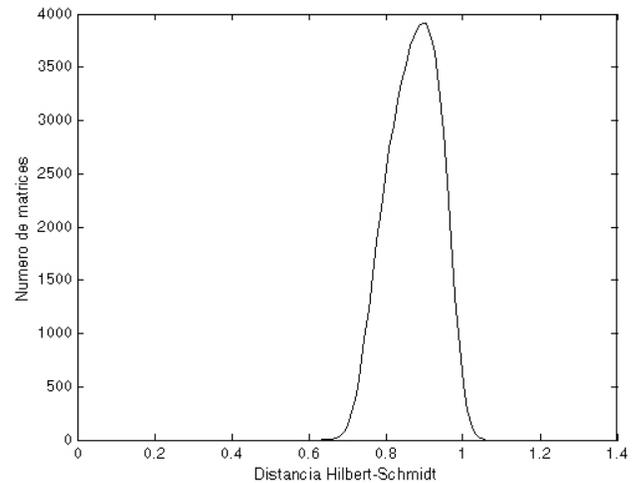


FIGURA 2. Histograma del número medio de matrices pseudopuras extendidas y entrelazadas que tienen una distancia de Hilbert-Schmidt dada al “estado gato”, considerando $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$. Se generaron (aleatoriamente) 500,000 matrices en cada ciclo de cálculos y se realizó un promedio sobre 10 ciclos.

5. Conclusiones

En los ejemplos de matrices ρ_ϵ^E dados en (8) y (13) las correspondientes matrices ρ_1^E , u otras de esa misma naturaleza, no pueden ser implementadas experimentalmente a través de la aplicación de pulsos de radiofrecuencia (representados por matrices unitarias), al contrario de lo que corresponde para matrices densidad ρ_1 de estados pseudopuros. En consecuencia, y a pesar de que las matrices ρ_ϵ^E anteriormente mencionadas son entrelazadas de acuerdo con el criterio de Peres-Horodecki, no es posible establecer ninguna correspondencia física entre cualquiera de las matrices ρ_ϵ^E y un estado físico accesible a un sistema de espines nucleares RMN; de esta manera, el entrelazamiento de las matrices ρ_ϵ^E mostradas en (8) y (13) no es físico, sino espurio o matemático. Paralelamente, los ejemplos construidos han sido útiles para mostrar que la sola aplicación del criterio matemático de Peres-Horodecki, a pesar de usado con matrices 4×4 , no es suficiente para identificar el entrelazamiento físico; aquél debe

ser complementado con la evaluación teórica sobre la posibilidad de establecer una correspondencia entre matrices densidad y estados cuánticos accesibles al sistema considerado. Por otro lado, aparte de los procedimientos de implementación de un estado cuántico existen los de medida de estado cuántico. En la CC-RMN es clara la razón por la cual las matrices ρ_ϵ no pueden ser medidas experimentalmente; en cambio, las matrices ρ_1 sí son medibles, lo que se consigue a través del procedimiento experimental conocido como “tomografía de estado cuántico”. En ese procedimiento se asume que la matriz a ser tomografiada es una matriz densidad; es decir, no se verifica en laboratorio que las matrices implementables son matrices densidad, sino que se parte de ello para construir experimentalmente tal matriz. De manera que, para conseguir medir alguna matriz que no sea del tipo matriz densidad, sino solamente hermiteana y con traza igual a uno, como se ha considerado para las matrices extendidas ρ_1^E , deberían tomarse esas consideraciones como exigencias en el procedimiento de tomografía de estado cuántico. Aún más, a partir de la matriz tomografiada (que resulta de considerar no el procedimiento formal de tomografía, sino aquel que incorpora la modificación mencionada anteriormente) podría obtenerse, a partir de otras medidas, el valor de la denomina-

da “fidelidad de entrelazamiento”; en ese caso, no podríamos estar seguros de que a través de los valores de tal función se estaría midiendo alguna cantidad asociada con el entrelazamiento físico en el sistema considerado. Finalmente, el contexto en el que hemos definido la extensión matemática, los ejemplos mostrados y la discusión ofrecida nos han servido para aclarar el significado de la siguiente pregunta: si ρ es una matriz densidad 4×4 , cuya matriz transpuesta parcialmente tiene (al menos) un autovalor negativo, entonces ¿la matriz ρ corresponderá (necesariamente) a una situación de entrelazamiento? Tal pregunta tiene respuesta negativa en el caso del entrelazamiento físico.

Agradecimientos

JDB agradece al prof. Holger Valqui (UNI, Lima) por las aclaraciones sobre distintos aspectos del entrelazamiento cuántico, así como a los profesores Ivan S. Oliveira (CBPF, Rio de Janeiro) y Henrique Saitovitch (CBPF, Rio de Janeiro) por los comentarios; también agradece al Programa Nacional de Pós-Doutorado - PNPd, de la Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, Brasil, por el apoyo financiero.

-
- †. Luis Alberto Peche falleció la mañana del día 6 de diciembre del 2010 en la ciudad de Rio de Janeiro a los 44 años de edad. Fue un físico que trabajó en asuntos de caos cuántico, sistemas fuertemente correlacionados y en el modelamiento físico con datos de radar y sísmicos. Pasó por la UNI, en Lima, así como por el CBPF, PUC, ON y UERJ, en Rio de Janeiro.
1. M.A. Nielsen y I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
 2. I.S. Oliveira *et al.*, *NMR Quantum Information Processing* (Elsevier, 2007).
 3. A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and methods* (Kluwer, 1993).
 4. A. Aspect, *Gazeta de Física* **22** (1999) 16; H.G. Valqui, *Revciuni* **7** (2003) 115. <http://fc.uni.edu.pe/publicaciones/rev07-03/pdf/hgvalqui.pdf>
 5. M.A. Nielsen, E. Knill y R. Laflamme, *Nature* **396** (1998) 52.
 6. L.M.K. Vandersypen *et al.*, *Nature* **414** (2001) 883.
 7. M. Mehring, J. Mende y W. Scherer, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 153001.
 8. S. Braunstein, C. Caves, Jozsa, Linden, S. Popescu y Schack, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1054.
 9. N. Menicucci y C. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 167901.
 10. G. Long *et al.*, *Commun. Theor. Phys.* **38** (2000) 306.
 11. A. Kessel y V. Ermakov, *quantu-ph*, *ArXiv Los Alamos* (2000) 0011002.
 12. J.D. Bulnes *et al.*, *Braz. J. Phys.* **35** (2005) 617.
 13. F.A. Bonk *et al.*, *J. Mag. Res.* **175** (2005) 226.
 14. F.A. Bonk *et al.*, *Phys. Rev. A* **69** (2004) 042322.
 15. N.A. Gershenfeld y I.L. Chuang, *Science* **275** (1997) 350.
 16. D.G. Cory, A.F. Fahmy y T.F. Havel, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **94** (1997) 1634.
 17. A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1413.
 18. M. Horodechi, P. Horodechi, R. Horodechi, *Phys. Lett. A* **223** (1996) 1.
 19. A. Wójcik, *Science* **301** (2003) 1183.
 20. H.G. Valqui, *Revciuni* **11** (2007) 67. Disponible en: <http://www.bibliotecacentral.uni.edu.pe/pdfs/REVCIUNI/1,2007/art-010.pdf>
 21. H.G. Valqui, *Proceedings of the Fifth Latin American Symposium High Energy Physics, Lima, Peru, 12-17 July 2004* (World Scientific Publishing, 2006). p. 272.
 22. A.M. Basharov y E.A. Manykin, *Optics and Spectroscopy* **96** (2004) 81.