

## Estimador estocástico para un sistema tipo caja negra

J. de J. Medel Juárez

*Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional,  
Av. Juan de Dios Bátiz s/n casi esq. Miguel Othón de Mendizábal,  
Unidad Profesional Adolfo López Mateos, México D.F. 07738, México.*

R.U. Parrazales

*Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional,  
Av. Juan de Dios Bátiz s/n casi esq. Miguel Othón de Mendizábal,  
Unidad Profesional Adolfo López Mateos, México, D.F. 07738, México.*

R.P. Orozco

*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional,  
Legaria No. 694, México D.F. 11500, México.*

Recibido el 3 de noviembre de 2010; aceptado el 29 de abril de 2011

Este artículo considera a un sistema tipo caja negra con dinámica interna desconocida. Para describirla se requiere de un estimador basado en la variable instrumental, de la matriz de transición y del identificador que es resultado de un modelo simplificado. El modelo propuesto de manera recursiva está en espacio de estados y tiene explícitamente la ganancia interna, como el único elemento desconocido por describir. El estimador se aproxima y en el mejor de los casos, converge a una vecindad de la referencia, lo que permite ser una herramienta del identificador al usar a la matriz de transiciones de una manera analítica resolviendo el problema de convergencia del filtro. La convergencia puede observarse por el funcional recursivo del error de identificación. Como ejemplo, se desarrolló la simulación del modelo en diferencias finitas de un motor de CD requiriendo conocer qué dinámica interna de operación tiene. El estimador con la variable instrumental logró describir al parámetro para diferentes condiciones de operación y se dio seguimiento a la señal. El funcional de error para diferentes ganancias dentro de la región de estabilidad discreta, es convergente. Y la función de distribución del identificador se aproxima a la corriente directa del modelo.

*Descriptores:* Procesos estocásticos; estimación; filtrado; identificación.

This paper considers a black box system with unknown internal dynamics. The estimator based on instrumental variable requires, the transition matrix used in the identifier which results in a simplified model. The recursive space state model allows an explicit internal gain which is unknown and undescribed. The recursive estimator allows knowing the internal dynamics of the black box system in an analytic manner and in the best cases, converges to a reference neighborhood, becoming a necessary identification tool solving the convergence filter problem. The convergence estimator and the identifier are seen from the recursive functional identification error. An example was developed to simulate the DC motor in a finite differences model that requires knowing the operation of internal dynamics. The instrumental variable estimator describes the different operating condition parameters and monitors the direct current signal in finite differences. The functional error to different gains in the stability discrete region converges, and approximates the distribution of the direct current model.

*Keywords:* Stochastic processes; estimation; filtering; identification.

PACS: 02.30.Yy; 07.50.-x; 02.70.Br

### 1. Introducción

Un filtro es un dispositivo que elimina, extrae, predice, reconstruye y describe parte de la información de un sistema, de acuerdo a un criterio previamente establecido [15].

El proceso de filtrado sin alterar la dinámica del sistema de referencia, requiere de una planeación experimental, seleccionando un modelo y validándolo para describir de una manera aproximada la señal observable  $\tilde{y}_k$ . Considerando su excitación  $\tilde{v}_k$ , el proceso de filtrado está integrado por el estimador  $\tilde{a}_k$  y el identificador  $\tilde{m}_k$ ; que para aproximarse a la señal deseada requiere de la excitación  $\tilde{v}_k$ , que permite obtener una señal identificada observable  $\tilde{y}_k$ ; el error de identificación  $e_k$  se establece por la diferencia entre la señal observable  $\tilde{y}_k$  y su identificada observable  $\tilde{y}_k$ , de acuerdo con la Fig. 1.

En la práctica, los modelos son de naturaleza recursiva, como ejemplo de filtros digitales recursivos se tienen los filtros de Kalman [19] y de Medel-Poznyak [12].

Con base en el problema de presuponer conocidos los parámetros, se desarrollaron aplicaciones en física [16-18] con aportaciones a visión artificial para el seguimiento de trayectorias de movimiento de partículas, que en condiciones dinámicas se requerían secuencias de matrices de transición, lo cual llevó al desarrollo de estimadores de parámetros dinámicos recursivos [13].

Dentro de la teoría de filtrado existen dos procesos básicos según Haykin [15] y Medel [10], que son la *estimación* y la *identificación*. La estimación describe la dinámica de los parámetros del sistema representados por  $\tilde{a}_k$  y la identificación, la dinámica de los estados representados por  $\tilde{m}_k$  todo ello con respecto al sistema de referencia, de acuerdo con la Fig. 1.

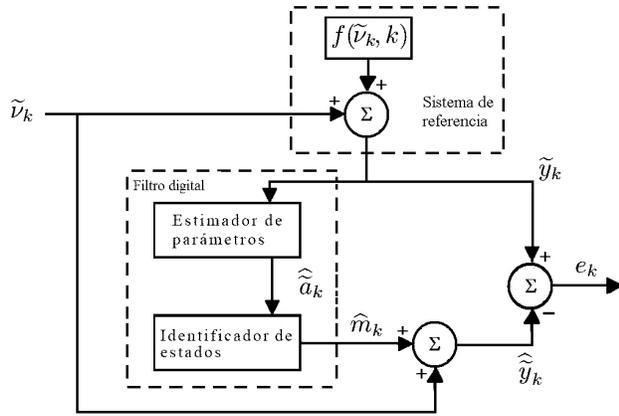


FIGURA 1. Esquema general de un filtro digital funcionando como estimador de parámetros e identificador de estados.

Cualificar la eficiencia de un filtro, significa describir sus propiedades de convergencia a través del funcional del error  $J(k)$  dado por el segundo momento de probabilidad del error de estimación o de identificación  $e_k$  [10,15].

El sistema de estudio es un modelo tipo caja negra en el que sólo se observa  $y_k \in \mathbb{R}$ , y  $\nu_k \in \mathbb{R}$ , ambas con  $k \in \mathbb{Z}^+$ . La relación en el sistema entre la salida  $y_k$  y la excitación externa  $\nu_k = \{\nu_i : i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{Z}^+\}$  está descrita por  $f(\nu_k, k) \in \mathbb{R}$ . Así, el modelo se representa en la forma (1):

$$\tilde{y}_k = f(\nu_k, k) + \nu_k, \tag{1}$$

donde  $f(\nu_k, k)$  es la función objetivo del filtro [8,9] y  $\nu_k$  es el proceso de innovación dado por la variable aleatoria del error de medición.

El identificador es descrito por  $\hat{y}_k$  con error  $e_k$  formado por la diferencia entre el filtro y la salida de referencia.

La estimación es descrita a través de un proceso de innovación involucrado en la formulación y validación del modelo (1) con respecto a la señal de referencia, permitiendo construir la matriz de transiciones necesaria para el identificador [1,2,12]. En el caso de que ésta no sea estacionaria ni homogénea no es posible utilizar el método de estimación de mínimos cuadrados.

En este artículo se aplica el método de estimación recursiva mediante el segundo momento de probabilidad como en [2,3] y se desarrolla un filtro con la variable instrumental como proceso de innovación para expresarlo de manera recursiva y observar su evolución en el tiempo.

## 2. Estimador con proceso de innovación

El modelo en espacio de estados con ruidos acotados por una distribución gaussiana según la Ref. 4 es descrito en (1). La función  $f(\nu_k, k)$  está definida como el producto interior entre el estado observable con un retardo  $\tilde{y}_{k-1}$ , y el parámetro desconocido  $\hat{a}_k$ .

**Teorema 2.1** *Sea el modelo del sistema tipo caja negra con entrada  $x_k$  y salida acotada  $\tilde{y}_k$ , con dominios en*

$N(\mu, \sigma^2 < \infty)$ . Existe un modelo del proceso tipo caja negra simplificado dado por (2).

$$\tilde{y}_k = \tilde{a}\tilde{y}_{k-1} + \tilde{\nu}_k, \tag{2}$$

donde  $\tilde{a}$  y  $\tilde{\nu}_k$  son el parámetro y el ruido del proceso, respectivamente.

**Demostración 2.1** *Ver anexo, demostración 5.1.*

Según la demostración del teorema 2.1, y basados en los conceptos sobre sistemas de secuencias de estados [9] al considerar la varianza  $Q_k = E\{\tilde{y}_{k-1}^2 - d(\tilde{\nu}_{k-1}\tilde{y}_{k-1})\}$ , la covarianza  $P_k = E\{\tilde{y}_k\tilde{y}_{k-1}\}$ , la media  $\mu$ , así como sus formas recursivas, se determina el parámetro estocástico  $\hat{a}_k$ , basados en los conceptos sobre sistemas de secuencia de estados [9].

**Teorema 2.2** *Existe un estimador estocástico recursivo 3 para  $\hat{a}_k$  con respecto a un sistema tipo caja negra 2.*

$$\hat{a}_k = \frac{(\tilde{y}_k\tilde{y}_{k-1}) + (k-1)P_{k-1}}{\tilde{y}_{k-1}^2 - d(\tilde{\nu}_{k-1}\tilde{y}_{k-1}) + (k-1)Q_{k-1}} \tag{3}$$

**Demostración 2.2** *Ver anexo, demostración 5.2.*

Se define el filtro estocástico recursivo covariante completo por el teorema 2.3 y por el teorema 2.4.

**Teorema 2.3** *Sea el modelo del sistema tipo caja negra con entrada y salida estocástica  $x_k$  e  $\tilde{y}_k$ , respectivamente y que tienen las propiedades de invarianza observadas en sus segundos momentos. Existe un filtro estocástico recursivo covariante definido por (5).*

$$\hat{\tilde{y}}_k = \hat{a}_k\hat{\tilde{y}}_{k-1} + \tilde{\nu}_k \tag{4}$$

**Demostración 2.3** *Ver anexo, demostración 5.3.*

Y la evaluación de la convergencia del filtro mediante su error queda dado por (5).

**Teorema 2.4** *Sea el error de identificación  $e_k = \tilde{y}_k - \hat{\tilde{y}}_k$ . El funcional del error  $J_k$  está dado de manera recursiva por (5).*

$$J_k = \frac{1}{k} (e_k^2 + (k-1)J_{k-1}) \tag{5}$$

**Demostración 2.4** *Ver anexo, demostración 5.4.*

## 3. Aplicación y resultados

### 3.1. Aplicación

El modelo matemático de un motor de corriente directa (CD) tipo serie se representa por la ecuación del circuito eléctrico (6) y la ecuación mecánica (7):

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \lambda_0\omega, \tag{6}$$

$$J\omega = \tau_m - \tau_L. \tag{7}$$

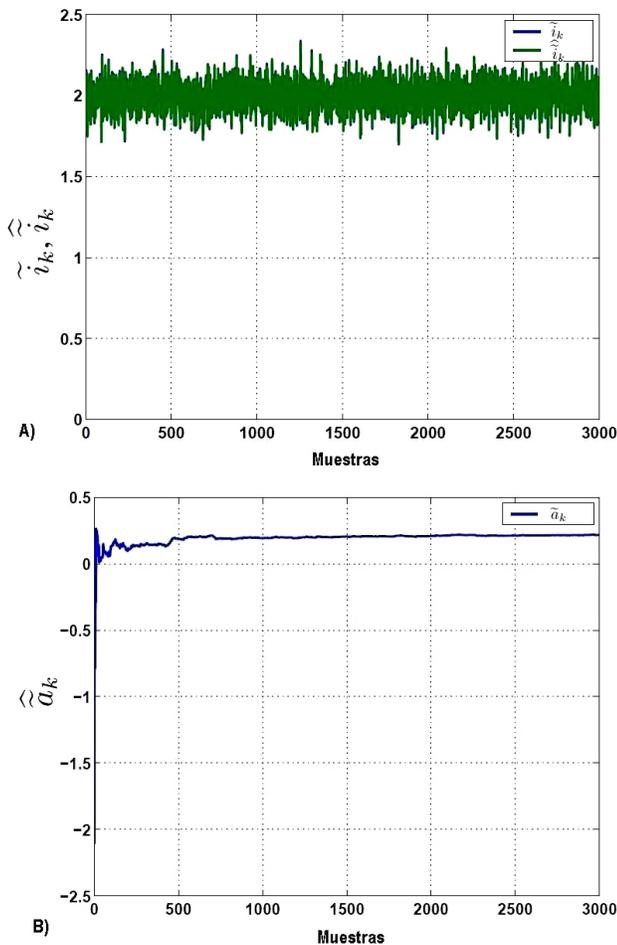


FIGURA 2. Simulación del comportamiento de  $\tilde{i}_k$  en un motor de CD. **A)** Comparación de señales  $\tilde{i}_k, \hat{i}_k$ . **B)** Estimación del parámetro interno  $\hat{a}_k$ .

El modelo en diferencias finitas queda expresado en (8).

$$\tilde{i}_k = \tilde{a}_k \tilde{i}_{k-1} + \tilde{w}_k. \tag{8}$$

Corresponde a la forma descrita en (2) requiriendo de (3) para conocer sus parámetros y de (4) para observar la evolución de su estado, así como de (5) para observar en el filtrado su nivel de convergencia.

En la Fig. 2A) se muestra una comparación entre la señal de referencia  $\tilde{i}_k$  y la señal identificada  $\hat{i}_k$ . Como se puede apreciar ambas se encuentran acotadas en  $2A$  y son estocásticas. En la Fig. 2B), se muestra la evolución del parámetro interno  $\hat{a}_k$ .

En la Fig. 3A), se presenta el funcional del error  $J_k$  asociado a la estimación del parámetro interno  $\hat{a}_k$ , convergiendo a cero. En la Fig. 3B), se muestra el histograma del comportamiento de  $\tilde{i}_k$  en un motor de CD, esto para verificar que la señal de referencia es estocástica y normal.

### 3.2. Resultados

Se analizan dos aspectos importantes, i) las salidas de las Ecs. (10) y (15), ii) el parámetro obtenido por la Ec. (27)

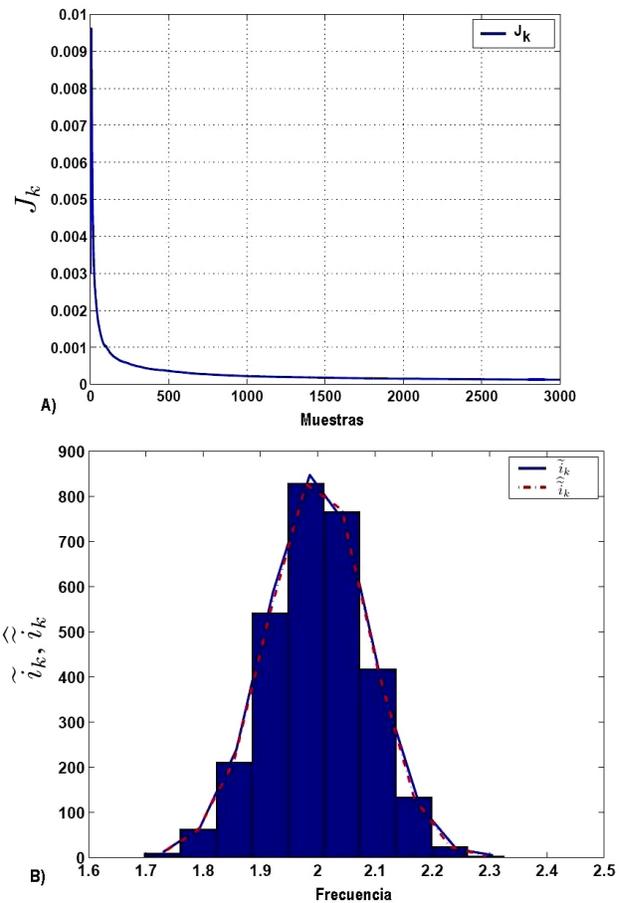


FIGURA 3. Simulación del comportamiento de un motor de CD. **A)** Funcional del error  $J_k$ , **B)** Histograma del comportamiento de  $\tilde{i}_k$  en un motor de CD.

y el recursivo por la Ec. (31), convergiendo hacia el parámetro  $\tilde{a}_k$  del sistema original (10), para valores de  $|\tilde{a}_k| \leq 1$ .

Se desarrolló el proceso de estimación para (32) usando como herramienta de desarrollo MatLab<sup>(R)</sup> con diferentes valores dentro del intervalo de  $(-1, 1)$ .

La Fig. 4A), muestra los resultados de la estimación para diferentes valores de  $\tilde{a}_k$ .

La Fig. 4B), muestra los resultados del funcional del error para las diferentes condiciones de  $\tilde{a}_k$ .

Observando que en cualquiera de los casos converge a una región acotada y es menor a 0.01 unidades.

Para el caso de que el sistema descrito en (15) tenga un parámetro de 0.7 unidades, el estimador de acuerdo con (32) dió como resultado lo mostrado en la Fig. 4C).

El resultado de la identificación al sustituir (32) en (15) queda esquematizado en la Fig. 4D).

En la Fig. 5A), se describe la respuesta del modelo del sistema (15).

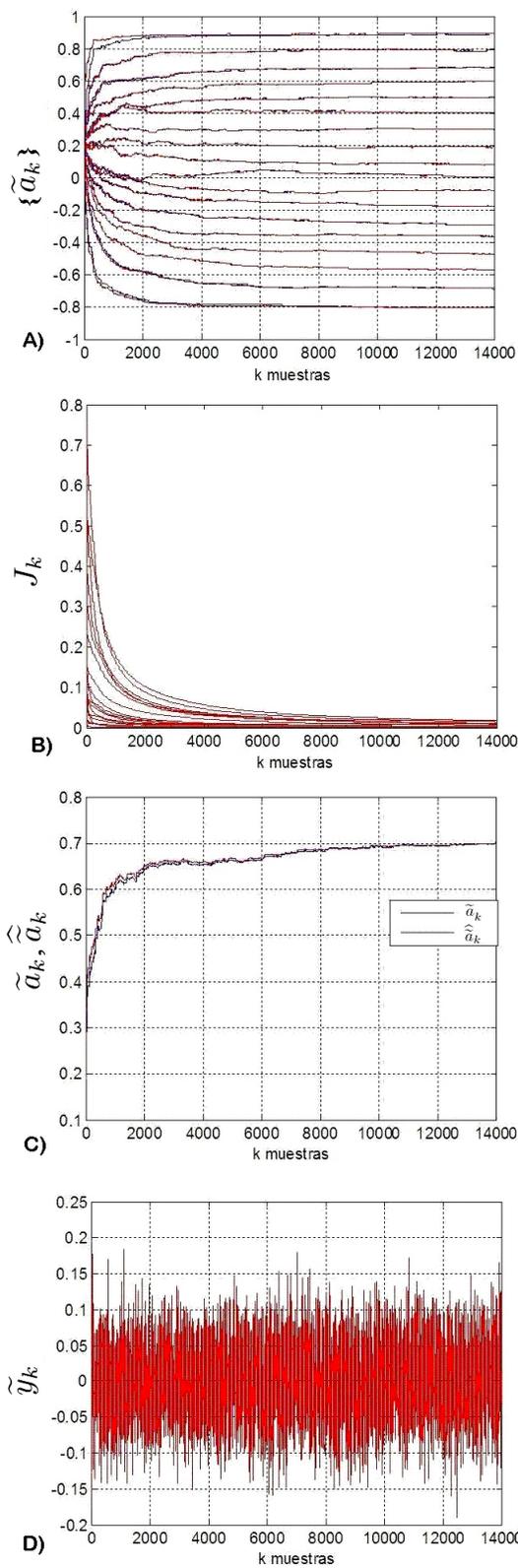


FIGURA 4. **A)** Estimación de parámetros para diferentes condiciones de  $\tilde{a}$ , de acuerdo con (15) y (32). **B)** Funcional del error para diferentes condiciones de  $\tilde{a}_k$ . **C)** Convergencia para  $\tilde{a}_k = 0.7$ , de los parámetros estimados de acuerdo con el modelo recursivo (32) ( $\hat{a}_k$ ). **D)** Identificación estocástica de la salida simplificada  $\tilde{y}_k$  y la salida covariante del modelo (15) para  $\tilde{a}_k = 0.7$ .

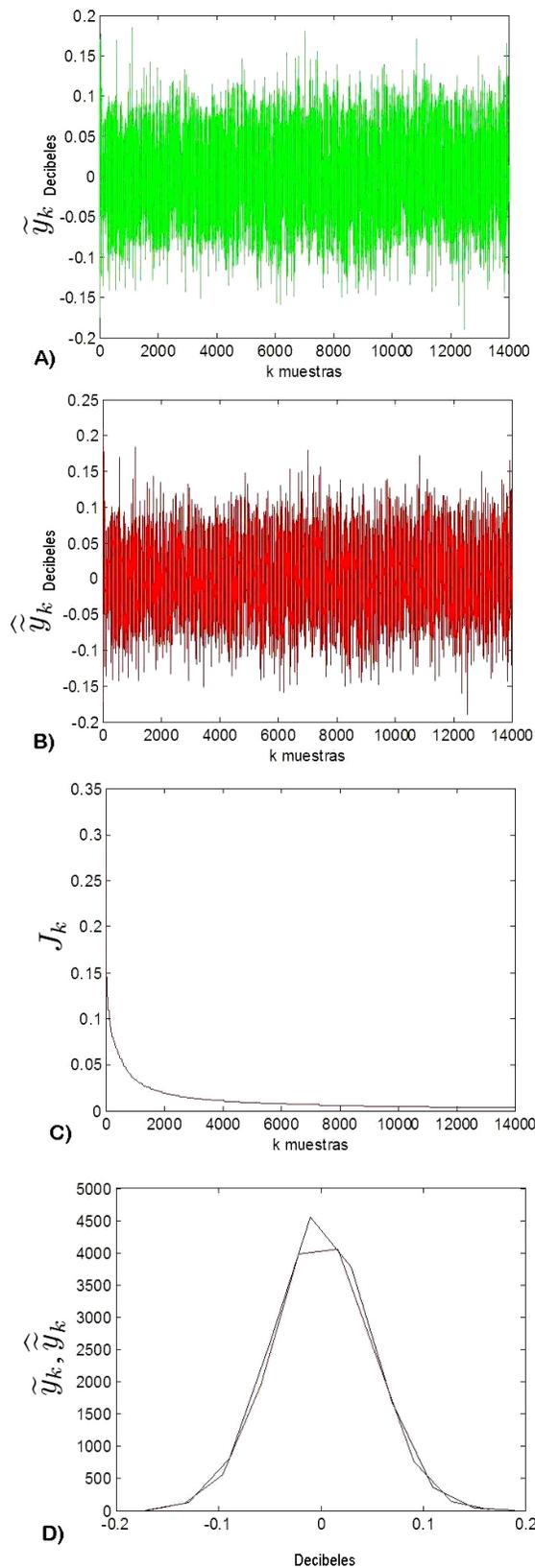


FIGURA 5. **A)** Amplitud en decibelios de  $\tilde{y}_k$ . **B)** Amplitud en decibelios de  $\hat{y}_k$ . **C)** Funcional del error de estimación (5). **D)** Convergencia en función de distribución del identificador (4) hacia señal de referencia (2).

La Fig. 5B), presenta el resultado de la simulación del sistema descrito por (32) sustituida en (15). La Fig. 5C), presenta el funcional del error de la convergencia del identificador con respecto al sistema (15). La Fig. 5D), presenta las distribuciones de la respuesta del sistema de referencia (2) y la del identificador.

#### 4. Conclusión

El parámetro estimado  $\hat{a}_k$  de forma recursiva (3) se acopló al modelo simplificado (4), construyendo el identificador. El nivel de convergencia de la respuesta del identificador con respecto a la respuesta del sistema tipo caja negra (1) se logró a través del funcional de error recursivo (5).

La simulación del estimador (3), del identificador (4), del funcional del error (5), y de las distribuciones de (1) y de (4), se desarrollaron en 1400 muestras para diferentes condiciones de operación. La Fig. 4a) presenta el parámetro estocástico concentrado del sistema (1) en sus dos versiones: la covariante y la recursiva, convergiendo esta última a una condición estacionaria. En la Fig. 4B) se presentó el seguimiento del identificador (4) y la salida del sistema (1).

La expresión del filtro recursivo estocástico (3) con el identificador (4) permitió dar el seguimiento de la respuesta del sistema tipo caja negra, con una precisión de convergencia de acuerdo con (5) de  $1 \times 10^{-4}$  unidades.

#### Anexo

En esta sección se detallan las demostraciones de los teoremas de la Sec. 2.

**Demostración 5.1** (Teorema 2.1). El sistema está representado por las Ecs. (10) y (10).

$$x_{k+1} = ax_k + bw_k \quad (9)$$

$$y_k = cx_k + d\nu_k \quad (10)$$

donde (10) es la ecuación de transición de estado,  $x_k$  es el vector de estados,  $\{w_k\} \subseteq N(\mu_w, \sigma_w^2 < \infty)$  es la señal de ruido adherida a la ecuación de estado,  $y_k$  es la salida observada,  $\{\nu_k\} \subseteq N(\mu_\nu, \sigma_\nu^2 < \infty)$  es la señal de ruido agregada a la salida,  $a$  y  $c$  son parámetros del sistema,  $b$  y  $d$  son parámetros del ruido de medición de los estados interno y externo, respectivamente [6-8].

Considerando que (10) es retardada en el tiempo:

$$x_k = ax_{k-1} + bw_{k-1} \quad (11)$$

Al sustituir (11) en (10) se obtiene (12):

$$\begin{aligned} y_k &= c(ax_{k-1} + bw_{k-1}) + d\nu_k \\ &= cax_{k-1} + cbw_{k-1} + d\nu_k. \end{aligned} \quad (12)$$

De (10) se obtiene el valor del estado interno con un retardo (13).

$$\begin{aligned} y_k &= cx_k + d\nu_k, \\ y_k - d\nu_k &= cx_k, \\ x_k &= c^{-1}y_k - c^{-1}d\nu_k, \\ x_{k-1} &= c^{-1}y_{k-1} - c^{-1}d\nu_{k-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (12) se obtienen (14) y (15).

$$\begin{aligned} y_k &= ca(c^{-1}y_{k-1} - c^{-1}d\nu_{k-1}) + cbw_{k-1} + d\nu_k \\ &= cac^{-1}y_{k-1} - cac^{-1}d\nu_{k-1} + cbw_{k-1} + d\nu_k \quad (14) \\ &= \tilde{a}_ky_{k-1} + \tilde{\nu}_k, \\ \therefore \tilde{y}_k &= \tilde{a}_k\tilde{y}_{k-1} + \tilde{\nu}_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Se observa en (15) que la salida del sistema de manera explícita cuenta con dos tipos de términos: la señal retardada de la salida  $y_{k-1}$  y los ruidos  $-cac^{-1}d\nu_{k-1} + cbw_{k-1} + d\nu_k$ . QED

**Demostración 5.2** (Teorema 2.2). La normalización de las señales, tanto de entrada como de salida del sistema tipo caja negra hace un uso adecuado del espacio filtrado. El conjunto muestreado de estados internos

$$X(\omega) := \{x(\omega, k) : \omega \in \Omega, k \in T\},$$

de estados externos

$$Y(\omega) := \{y(\omega, k) : \omega \in \Omega, k \in T\},$$

con  $F(X(\omega), Y(\omega)) \subseteq \{Y(\omega)\} \subseteq N(\mu_y, \sigma_y^2 < \infty)$ . El segundo momento de probabilidad de (15) respecto de  $\tilde{y}_{k-1}$  está determinado por (16):

$$\begin{aligned} E\{\tilde{y}_k\tilde{y}_{k-1}\} &= E\{\tilde{a}_k\tilde{y}_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} + E\{\tilde{\nu}_k\tilde{y}_{k-1}\} \\ &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} + E\{\tilde{\nu}_k\tilde{y}_{k-1}\} \\ &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}^2\} + E\{\tilde{\nu}_k\tilde{y}_{k-1}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Sustituyendo  $\tilde{\nu}_k$  de (14) en (16) se obtiene (18).

$$\begin{aligned} E\{\tilde{y}_k\tilde{y}_{k-1}\} &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} \\ &+ E\{(-cac^{-1}d\nu_{k-1} + cbw_{k-1} + d\nu_k)\tilde{y}_{k-1}\} \\ &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} + E\{(-cac^{-1}d\nu_{k-1})\tilde{y}_{k-1}\} \\ &+ E\{(cbw_{k-1})\tilde{y}_{k-1}\} + E\{(d\nu_k)\tilde{y}_{k-1}\} \\ &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}^2\} + (-cac^{-1}d)E\{\nu_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} \\ &+ (cb)E\{w_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} + (d)E\{\nu_k\tilde{y}_{k-1}\} \\ &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}^2\} + \tilde{a}_kdE\{\nu_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} \\ &+ cbE\{w_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\} + dE\{\nu_k\tilde{y}_{k-1}\} \\ &= \tilde{a}_kE\{\tilde{y}_{k-1}^2\} + \tilde{a}_kdE\{\nu_{k-1}\tilde{y}_{k-1}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\therefore E\{\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}\} = \tilde{a}_k (E\{\tilde{y}_{k-1}^2\} + dE\{\tilde{\nu}_{k-1} \tilde{y}_{k-1}\}). \quad (18)$$

Ya que no hay correlación entre el ruido y el estado pasado del sistema,  $E\{w_{k-1} \tilde{y}_{k-1}\} = E\{\nu_k \tilde{y}_{k-1}\} = 0$ , como puede considerarse a (14). El sistema (16) tiene la forma (18) y se tiene el parámetro desconocido:

$$\hat{a}_k = \frac{E\{\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}\}}{E\{\tilde{y}_{k-1}^2 - d(\tilde{\nu}_{k-1} \tilde{y}_{k-1})\}} = \frac{P_k}{Q_k}, \quad (19)$$

con retardo en el tiempo:

$$\hat{a}_{k-1} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}. \quad (20)$$

Considerando la ergodicidad de (19), con respecto a  $P_k$  se obtiene (21) y su forma recursiva (22):

$$P_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{y}_i \tilde{y}_{i-1}, \quad (21)$$

$$P_k = \frac{1}{k} \left[ (\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{y}_i \tilde{y}_{i-1} \right]. \quad (22)$$

Tomando (21) con un retardo de tiempo y aplicado en (22) se obtiene (23):

$$P_k = \frac{1}{k} [(\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}) + (k-1)P_{k-1}]. \quad (23)$$

Ahora, considerando la ergodicidad de (19) con respecto a  $Q_k$  su forma recursiva se presenta en (24):

$$Q_k = \frac{1}{k} \left[ \sum_{i=1}^k \tilde{y}_{i-1}^2 - d \sum_{i=1}^k \tilde{\nu}_{i-1} \tilde{y}_{i-1} \right]. \quad (24)$$

Retardada en el tiempo (24) y manteniendo las condiciones de invarianza, se tiene (25):

$$Q_{k-1} = \frac{1}{k-1} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{y}_{i-1}^2 - d \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\nu}_{i-1} \tilde{y}_{i-1} \right]. \quad (25)$$

Al considerar a (25) en (24), la forma recursiva de  $Q_k$  se presenta en (26):

$$Q_k = \frac{1}{k} [\tilde{y}_{k-1}^2 - d\tilde{\nu}_{k-1} \tilde{y}_{k-1} + (k-1)Q_{k-1}]. \quad (26)$$

Entonces el parámetro para el filtro está dado por la estimación (27), y al sustituir (23) y (26) en (19).

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \frac{1/k [(\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}) + (k-1)P_{k-1}]}{1/k [\tilde{y}_{k-1}^2 - d\tilde{\nu}_{k-1} \tilde{y}_{k-1} + (k-1)Q_{k-1}]} \\ &= \frac{\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1} + (k-1)P_{k-1}}{\tilde{y}_{k-1}^2 - d\tilde{\nu}_{k-1} \tilde{y}_{k-1} + (k-1)Q_{k-1}} \end{aligned} \quad (27)$$

**Demostración 5.3** (Teorema 2.3). De (19):

$$\hat{a}_k = \frac{P_k}{Q_k} \quad (28)$$

Retardada en el tiempo se obtiene (29):

$$\begin{aligned} \hat{a}_{k-1} &= \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}, \\ P_{k-1} &= \hat{a}_{k-1} Q_{k-1} \end{aligned} \quad (29)$$

Sustituyendo (29) en (23) la covarianza recursiva se presenta en (30):

$$P_k = \frac{1}{k} [(\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}) + (k-1)\hat{a}_{k-1} Q_{k-1}] \quad (30)$$

Sustituyendo (30) en (28) el estimador tiene la forma (31):

$$\hat{a}_k = \frac{\frac{1}{k} [(\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}) + (k-1)\hat{a}_{k-1} Q_{k-1}]}{Q_k} \quad (31)$$

Finalmente, el parámetro recursivo queda dado por (32):

$$\hat{a}_k = \left[ \frac{(k-1)Q_{k-1}}{kQ_k} \right] \hat{a}_{k-1} + \frac{\tilde{y}_k \tilde{y}_{k-1}}{kQ_k} \quad (32)$$

Al sustituir (32) en (15) se obtiene el filtro identificador (4).

$$\hat{y}_k = \hat{a}_k \hat{y}_{k-1} + \tilde{\nu}_k$$

**Demostración 5.4** (Teorema 2.4). El funcional del error (33).

$$\begin{aligned} J_k &= E\{(\tilde{y}_k - \hat{y}_k)^2\} = E\{e_k^2\} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\tilde{y}_j - \hat{y}_j)^2 \\ &= \frac{1}{k} \left[ (\tilde{y}_k - \hat{y}_k)^2 + \sum_{j=1}^{k-1} (\tilde{y}_j - \hat{y}_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[ (\tilde{y}_k - \hat{y}_k)^2 + \frac{k-1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\tilde{y}_j - \hat{y}_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[ (\tilde{y}_k - \hat{y}_k)^2 + (k-1) \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\tilde{y}_j - \hat{y}_j)^2 \right] \end{aligned} \quad (33)$$

El funcional del error retardado (34):

$$\begin{aligned} J_{k-1} &= \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\tilde{y}_j - \hat{y}_j)^2 \\ J_k &= \frac{1}{k} [(\tilde{y}_k - \hat{y}_k)^2 + (k-1)J_{k-1}] \end{aligned} \quad (34)$$

La forma recursiva es (35):

$$\therefore J_k = \frac{1}{k} [e_k^2 + (k-1)J_{k-1}] \quad (35)$$

1. J. Abonyi, *Fuzzy model identification for control* 1st ed (Birkhauser Boston 2003) p. 19.
2. P. Englezos y N. Kalogerakis, *Applied Parameter Estimation for Chemical Engineers* 1st ed (Marcel Dekker 2001) p. 218.
3. A. Aguado Behar y M. Martínez Iranzo, *Identificación y Control Adaptivo* 1st ed (Pearson 2003). p. 50.
4. A. Sinha, *Linear Systems: Optimal and Robust Control* 1st ed (CRC Press. 2007). p. 150.
5. W.S. Levine, *The Control Handbook* 1st ed (CRC Press. 1996). p. 575.
6. R.E. Curry, *Estimation and Control with Quantized Measurements* 1st ed (MIT Press. 1970). p. 14-15.
7. *Hidden Markov Models Estimation and Control* 1st ed (Springer USA 1995). p. 19.
8. M. Godin, *Identification and Estimation for Models Described by Differential Algebraic Equations* 1st ed (Linkoping 2006) p. 12-13.
9. T. Soderstrom y P. Stoica, *System Identification* 1st ed (Prentice Hall 1989). p. 402.
10. J. J. Medel, *Computación y Sistemas* (2004).
11. J.J. Medel y C.V. García, *Rev. Mex. Fís.* (2010).
12. J.J. Medel y M.T. Zagaceta, *Rev. Mex. Fís.* (2010).
13. E.M. Gutiérrez-Arias *et al.*, *Rev. Mex. Fís.* (2011).
14. I. Estrada y J.J. Medel, *Filtrado adaptivo para sistemas AR de 1er. orden* (Tesis Maestría, CIC-IPN 2010).
15. S. Haykin, *Kalman filtering and neural networks* 1st ed (John Wiley and Sons Inc., 2001). p. 3-10.
16. E. Wells *et al.*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) DOI: 10.1088/0953-4075/43/1/015101.
17. I. Rodrigues *et al.*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) DOI: 10.1088/0953-4075/43/12/125505.
18. W. Wang, J. Shen y X.X. Yi, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** (2009) DOI: 10.1088/0953-4075/42/21/215504.
19. R.E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* (Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering, 82, Series D, 1960). p. 35.