Revisión de la teoría de perturbaciones en Relatividad General

Adolfo De Unánue
Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México
México, D.F. 04510, México,
C3 Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México,
Torre de Ingeniería, Circuito Exterior S/N Ciudad Universitaria, México D.F. 04510, México,
e-mail: adolfo@nucleares.unam.mx

Recibido el 4 de febrero de 2011; aceptado el 19 de mayo de 2011

Se inicia el artículo con una discusión sobre el porque de la dificultad de aplicar la teoría de perturbaciones a la Relatividad General. Se presenta una revisión de los diversos enfoques sobre la teoría de perturbaciones en Relatividad General, a saber: el formalismo Invariante de Norma (*Gauge Invariant*), la teoría 1+3 Covariante-Invariante de Norma (*1+3 Covariant Gauge Invariant*) y el enfoque estándar de fijar una norma (*Gauge Fixing*). Se desarrolla a detalle el enfoque Invariante de Norma, debido a que a diferencia de los otros dos enfoques, ya que cuenta con varias ventajas, entre las cuales se pueden mencionar que permite hacer desarrollos a ordenes perturbativos mayores al primero de una manera **algorítmica**, que aplica a teorías a las cuales se les exija que cumplan con el principio de covariancia general, y que puede aplicarse más de un parámetro perturbativo. Aunque este método es muy general, a manera de ejemplo se aplica a Cosmología.

Descriptores: Relatividad general; teoría perturbativa; cosmología.

This work presents a review of the different approaches for perturbation theory in General Relativity: the Gauge Invariant formalism, the 1+3 Covariant Gauge Invariant theory and the traditional gauge fixing method. In particular, this review focuses in the Gauge Invariant formalism, due to it has a broader applicability (it applies not only to General Relativity but, to any theory that must fulfill the principle of general covariance) than the other two formalisms and because it has an algorithmic method for calculate the invariant variables to perturbation orders larger than the linear one. The article includes too, a brief discussion about the root of the problem of gauge-invariance in the perturbation theory in General Relativity. To help the reader, this last approach is applied to the cosmological scenario.

Keywords: General relativity; pertubation theory; cosmology.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv; 04.25.Nx

1. Introducción

La teoría de Relatividad General es conceptualmente sencilla y particularmente elegante, pero presenta en la práctica dificultades que tienen su raíz en que las ecuaciones de campo de Einstein (ECE) forman un sistema no-lineal acoplado de 10 ecuaciones diferenciales parciales en cuatro dimensiones, por lo tanto, la mayoría de los problemas que se estudian en la teoría de Relatividad General son difíciles o imposibles de solucionar de manera exacta.

Una de las estrategias populares en la física para resolver problemas complicados es utilizar un análisis perturbativo alrededor de una solución conocida. En la teoría de Relatividad General, sin embargo, el análisis perturbativo posee varias sutilezas que no comparten otras áreas de la física. Estas sutilezas surgen en Relatividad General debido al principio de covariancia general y al carácter dinámico del espacio-tiempo: en Relatividad General además de perturbar los campos de materia es necesario perturbar la métrica del espacio-tiempo; pero, debido a la covariancia intrínseca de la teoría, es posible, perturbar las componentes de la métrica de una manera en la que se deforme el sistema de coordenadas sin afectar la física subyacente al espacio-tiempo, esto tendría como consecuencia la aparición de información ficticia (debida a la deformación del sistema coordenado y no al fenómeno en sí) sobre el fenómeno físico estudiado. En este artículo trataremos de elucidar el papel de este principio y revisaremos tres propuestas hechas en la literatura para establecer una teoría perturbativa de Relatividad General que permita solucionar problemas de una manera confiable.

La teoría perturbativa de Relatividad General se aplica actualmente en diferentes problemas como lo son Relatividad Numérica (aparece por ejemplo en el planteamiento de las condiciones de frontera perturbadas –*Perturbative Boundary Conditions* [1,2], un ejemplo de estas técnicas es el *Cauchy-perturbative matching* [3]) , el estudio de ondas gravitacionales [4], el análisis de la dinámica en espacios-tiempos (cuerpos extendidos, movimiento cerca de agujeros negros [5,6], auto-fuerzas [7-9], problema de los tres cuerpos [10,11], etc.), el estudio del problema de los promedios [12-14] o el análisis de la formación de estructura en cosmología [15-19].

En esta revisión se estudiarán las diferencias que existen en el análisis perturbativo de Relatividad General respecto al de otras disciplinas de la física y el origen de esta discrepancia (Sec. 2) y se expondrá de una manera formal el problema y su tratamiento para el desarrollo de una teoría de perturbaciones en Relatividad General (Sec. 3). Finalmente se presentarán los tres principales enfoques conocidos para hacer el análisis perturbativo (Sec. 5), dándole énfasis a la teoría invariante de norma expuesta principalmente por Kouji Nakamura, [por ejemplo ver Ref. 20] (Sec. 6). A lo largo del ensayo se estará usando como ejemplo la métrica de Roberston-Walker de los Universos de Friedmann-Lemaître con un campo escalar (presentada en la Sec. 4). La elección de un modelo cosmológico para el estudio de teoría de perturbaciones se debe a dos motivos, el primero es una conveniencia de cálculo, ya que las simetrías de este espacio-tiempo simplifican los cálculos que se mostrarán, segundo, la Cosmología de precisión [21,22] es actualmente un tema candente en la física por lo cual este trabajo podrá servir de apoyo o referencia al lector al revisar la bibliografía cosmológica.

En esta revisión se elegirán unidades en las que $c = 1$, la métrica tendrá la signatura $(- + + +)$ y se seguirá la notación abstracta de índices y las definiciones del tensor de Riemann dadas por Wald en Ref. 4. Los índices latinos (i, j, k, etc). Indican componentes espaciales mientras que los griegos (μ, ν, etc.) representan las cuatro componentes espacio-temporales.

2. Relatividad General y el principio de covariancia general

La teoría de Relatividad General es conceptualmente sencilla y se puede resumir en pocas palabras citando [23] el famoso adagio "El espacio le dice a la materia como moverse y la materia le dice al espacio como curvarse [58]", o de una manera más formal: "El espacio-tiempo es una variedad $\mathcal{M}$, en la cual está definida una métrica Lorentziana g_{ab}. La curvatura de g_{ab} está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein (ECE)" [4, pag. 73]. La métrica g_{ab} no sólo representa las propiedades crono-geométricas del espacio-tiempo, además define los potenciales del campo gravitacional.

Las ecuaciones de Relatividad General, referidas en el párrafo anterior como las ECE son

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{R} = \kappa T_{ab} \tag{1}$$

donde los símbolos representan lo que sigue: G_{ab} es el tensor de Einstein, R_{ab} es el tensor de Ricci que está relacionado con el tensor de Riemann, $R_{abd}{}^{c}$ mediante una contracción de índices, $R_{ac} \equiv R_{abc}{}^{b}$ y $\mathcal{R}$ es el escalar de curvatura o escalar de Ricci, que se obtiene de la traza de R_{ab}, *i.e.* $\mathcal{R} \equiv R_{a}{}^{a}$. En el lado derecho de la ecuación tenemos a la constante de Einstein κ que está relacionada con la constante gravitacional de Newton mediante $\kappa = 8\pi G$ y para finalizar, T_{ab}, el tensor de energía-momento que representa la distribución de materia en el espacio-tiempo y cuya expresión exacta depende de la teoría con la que se esté describiendo la materia. La información geométrica de la teoría esta codificada en el lado izquierdo de la Ec. (1) debido a sus relaciones con el tensor de curvatura $R_{abd}{}^{c}$.

Conceptualmente, Relatividad General, está basada en dos principios importantes: (a) el *principio de equivalencia*: el movimiento de los cuerpos [59] en un campo gravitacional es independiente de su composición o su masa [60]; y (b) el *principio de relatividad o covariancia general*: Las leyes de la naturaleza son expresadas de manera natural mediante ecuaciones que sean iguales en todos los sistemas de coordenadas, esto es, que sean *covariantes* con respecto a sustituciones cualesquiera, *i.e.* ecuaciones tensoriales. Aparte de estos principios, se podrían mencionar dos más de soporte o guía: el *principio de acople gravitacional mínimo* –una versión de la navaja de Occam, *i.e.* una exigencia de simplicidad, en la cual se supone que no hay acoples directos entre los campos y la curvatura [61]– y el *principio de correspondencia* –las ecuaciones de Relatividad General deben de coincidir en el límite apropiado con Relatividad Especial y con la Teoría Gravitacional Newtoniana–[4,24].

El establecimiento de cual es el significado físico, la importancia, el número [62] o simplemente que es lo que dicen exactamente estos principios [63] ha sido objeto de debate a lo largo de décadas, debate cuyo inicio se puede remontar al mismo Einstein y su lucha para establecer la teoría tal como la conocemos actualmente [ver 25, para una clara y extensa discusión].

El principio de relatividad o covariancia general es el que más problemas causará cuando abordemos la cuestión de la teoría perturbativa, por lo que, le dedicaremos un estudio un poco más extenso para poder alcanzar a ver todas las sutilezas que encierra.

Este principio, intuitivamente establece que todos los observadores son equivalentes, o expresado de otra manera: no existe un sistema coordenado privilegiado en la naturaleza. Esto se puede entender de la siguiente manera: los sistemas de coordenadas son simple etiquetas puestas a los puntos del espacio-tiempo y de ninguna manera esta colocación de etiquetas afecta al fenómeno natural. El principio de covariancia causó y causa acaloradas discusiones en la literatura científica y en un principio motivó que A. Einstein y D. Hilbert lo desecharan como fundamento de la teoría debido al siguiente argumento conocido como el *argumento del agujero* [64] (para la versión original de este argumento consúltese [25,26], para la versión moderna véase [27-29]): Sea $\mathbf{g}$ –por el momento eliminaremos los subíndices para no complicar la notación– una solución de las ECE, entonces, el *pull-back*, $\phi^{*}(\mathbf{g})$, inducido por el difeomorfismo ϕ en $\mathcal{M}$ también satisface las ECE. La pregunta a responder es ¿Todas las métricas $\phi^{*}(\mathbf{g})$ describen el mismo campo gravitacional? Si suponemos el principio de covariancia general como válido, la respuesta es si. Supóngase ahora que el espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ contiene una región abierta H (el "agujero") vacía, es decir, únicamente el campo $\mathbf{g}$ está presente y es solución a las ECE en vacío. Debido a la covariancia general, aún cuando encontremos una solución $\mathbf{g}$ fuera de H y especifiquemos las derivadas a un orden finito en la frontera de H, para conectar la métrica fuera con la de adentro de H de una manera suave, la métrica dentro de H no se puede determinar de manera única, no importa que tan pequeño sea el "agujero", así, pareciera que las ECE no poseen un problema de valores de frontera (o iniciales [65] en la versión del argumento del agujero de Hilbert [25]) bien planteado si se sostiene como verdadero el principio de covariancia general.

El argumento del agujero, básicamente nos enfrenta a la decisión de declarar al espacio-tiempo como entidad "real" y con esto sacrificar la covariancia general, o, eliminar la calidad de ente al espacio-tiempo y mantener la covariancia general.

Tiempo después, Einstein resolvió esta aparente paradoja quitándole "realidad autónoma" al espacio-tiempo si no existe materia en él:

> En la base de la teoría de relatividad general ... espacio y "lo que llena el espacio" no tienen una existencia separada ... No hay tal cosa como el espacio vacío i.e. un espacio sin campo [gravitacional] ... [El] espacio-tiempo no reclama una existencia por sí mismo, si no únicamente como cualidad estructural del campo [30].

esto se puede entender, si se recuerda que toda la experiencia que obtenemos del espacio-tiempo está dada por "coincidencias" entre nuestros aparatos de medición y otros campos, *i.e.* la "realidad" del espacio-tiempo está en los *eventos* no en los puntos de la variedad. Otra forma de verlo, es que la variedad sin la especificación de una métrica, con la cual se obtengan las cantidades observables, no es un espacio-tiempo, ya que los puntos de la variedad $\mathcal{M}$ no tienen propiedades gravitacionales o crono-geométricas *per se*. Lo que conforma al espacio-tiempo es el par $(\mathcal{M}, g_{ab})$. Asumiendo esta postura, los *pull-backs* de la métrica no difieren físicamente de la métrica original. Dos métricas g_1 y g_2 soluciones de las ECE representan la misma solución si son *isométricas* entre sí, *i.e.* todas ellas forman una clase de equivalencia. Este argumento puede extenderse con facilidad al caso de que haya más campos dentro de H. Esto resuelve el argumento del agujero, recuperando la covariancia general y permite plantear el problema de condiciones iniciales en Relatividad General de una manera satisfactoria.

A pesar de haberse resuelto el argumento del agujero, los problemas no acabaron para el principio de covariancia, tan pronto como Einstein publicó en 1916 la solución al argumento del agujero y retomaba como principio fundacional a la covariancia general, Kretschmann en 1917 [25], utilizó el argumento de solución de Einstein y lo volvió en su contra, estableciendo que el principio de covariancia tenía significado físico vacío, argumentando que cualquier teoría puede ser puesta de manera covariante si es formulada correctamente [66]. Esta objeción, a la fecha, es tema de discusión académica, como atestiguan artículos como [31].

Además de lo dicho, el principio de covariancia y su interpretación está ligado con el significado de "promediar" en la teoría de Relatividad General [31] ver también Refs. 13 and 14, y como se muestra en la siguiente sección es el causante de las complicaciones en la teoría de perturbaciones en Relatividad General. Se invita al lector interesado en estas sutilizas a consultar las referencias hasta aquí expuestas.

3. Teoría de perturbaciónes en Relatividad General

La teoría de perturbaciones de manera general –sin restringirla a Relatividad General– es un método matemático usado para encontrar la solución a ecuaciones complejas en las cuales no se conoce la respuesta o que no puede ser resuelto de manera exacta, el cual propone –de una manera intuitiva– que si se conoce la solución exacta de un problema, la solución de un nuevo problema ligeramente diferente es una "pequeña modificación" de la solución conocida.

Los métodos perturbativos sólo podrán ser aplicados si es posible agregar una término "pequeño" a la solución exacta del problema conocido, *i.e.* la nueva solución estará expresada en términos de una serie de potencias en el parámetro "pequeño", λ. El parámetro λ cuantifica la desviación del nuevo problema respecto a el problema que se sabe solucionar de manera exacta. Por ejemplo si queremos obtener la cantidad F a partir de la solución exacta F_0 de un problema similar, F estará expresada a segundo orden en λ como sigue:

$$F = F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Estos métodos son usados con gran éxito en Mecánica Clásica, Mecánica Cuántica, Electrodinámica, etc. Entonces, ¿De dónde proviene la dificultad de usarla en Relatividad General?

Los problemas con los que nos encontraremos en la teoría perturbativa son varios. El primer problema proviene del objeto dinámico de la teoría. En Relatividad General, el espacio-tiempo no es un escenario estático, absoluto, sobre el cual se pueda estar sin afectarlo, modificarlo; al contrario, es un ente dinámico que actúa sobre y es actuado por los participantes. Por lo tanto, es necesario perturbar, además de los campos de materia (los participantes) representados por T_{ab}, al espacio-tiempo, representado por g_{ab} (el escenario) *i.e.* $g_{ab} = g^0_{ab} + \delta g_{ab}$; el segundo problema se observa al escribir una cantidad física (*i.e.* representada por un tensor) $\mathcal{Q}$ de manera perturbada (a primer orden):

$$\mathcal{Q} = Q_0 + \lambda\, \delta \mathcal{Q}. \tag{2}$$

Esta ecuación no es, en ningún sentido, precisa o correcta, $\mathcal{Q}$ es un campo tensorial, el cual, para reflejar el número que se va a medir u observar en un experimento [Sec. 4.1 de 4], debe de estar evaluada en un punto del espacio-tiempo (*i.e.* en un *evento* del espacio-tiempo), luego de esta corrección la ecuación es

$$\mathcal{Q}(p) = Q_0(p) + \lambda\, \delta \mathcal{Q}(p). \tag{3}$$

Aunque mejor, esta ecuación sigue siendo problemática, pues el punto p del lado izquierdo de la ecuación no es el mismo punto p del lado derecho, ya que, estos puntos se encuentran en diferentes variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_0$. Cuando se está realizando teoría de perturbaciones en Relatividad General, se está trabajando con dos variedades, una física, $\mathcal{M}$ (la solución que intentaremos describir con perturbaciones), y otra de fondo, $\mathcal{M}_0$, que es una variedad ficticia, preparada por nosotros para desarrollar el análisis perturbativo (la solución exacta que conocemos). Al espacio-tiempo físico lo denotaremos de manera general por $(\mathcal{M}, \overline{g}_{ab})$, y al espacio-tiempo de fondo por $(\mathcal{M}_0, g_{ab})$. Además, denotaremos a los campos tensoriales que estén sobre $\mathcal{M}$ mediante $\mathcal{Q}$ y los definidos sobre $\mathcal{M}_0$ por $\mathcal{Q}_0$. Así, la Ec. (3) debería de escribirse como:

$$\underbrace{\mathcal{Q}(\text{“}p\text{”})}_{\in(\mathcal{M},\overline{g}_{ab})} = \underbrace{\mathcal{Q}_0(p) + \lambda\,\delta\mathcal{Q}(p)}_{\in(\mathcal{M}_0,g_{ab})}. \tag{4}$$

La última ecuación nos muestra la aparición del problema relacionado con el principio de covariancia: la Ec. (4) nos está dando la relación entre variables definidas en dos variedades diferentes, y para lograrlo **implícitamente** hemos identificado los puntos en estas dos variedades. Es decir, asumimos que $\exists\,\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M} : p \in \mathcal{M}_0 \mapsto \text{"}p\text{"} \in \mathcal{M}$. Esta identificación no es única en la teoría de Relatividad General debido a que está construida sobre el principio de covariancia general (cf. II).

Siendo conscientes de estos problemas procederemos a definir conceptos que permitirán formalizar su planteamiento y encontrar una solución. En teoría de perturbaciones a la elección del mapa de identificación de puntos, *i.e.* $\chi : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathcal{M}$ se le nombra como *grado de libertad de norma* y esta libertad siempre existe en teorías a las cuales se les imponga el principio de covariancia general. Este grado de libertad no es físico, si no espurio, *i.e.* no trae información relevante al fenómeno estudiado. Por lo tanto, un enfoque correcto en la teoría perturbativa en Relatividad General debe *eliminar* estos grados de libertad ficticios.

Es importante recalcar, que por la misma naturaleza del análisis perturbativo (“desviaciones pequeñas de la solución exacta conocida”, cf. arriba) los espacios-tiempo de fondo y físico deben de ser lo “suficientemente iguales” *i.e.* “cuasi-isométricos” [32] y debido a los problemas con la obtención de promedios de métricas en Relatividad General, no existe una manera única de hacer esta declaración más precisa [32].

Consideremos una variedad $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ con $\dim\mathcal{N} = \dim\mathcal{M} + \dim\mathbb{R}$, que en el caso en particular de Relatividad General $\dim\mathcal{N} = 5$. El parámetro infinitesimal para la perturbación será denotado por λ. Entonces, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}|_{\lambda=0}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{N}|_{\mathbb{R}=\lambda}$, con $\mathcal{M}_0, \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Además, denotemos los puntos en $\mathcal{N}$ por r, entonces, cada $r \in \mathcal{N}$ será identificado con (p, λ), donde $p \in \mathcal{M}_\lambda$ y cada punto de $\mathcal{M}_0$ se identificará mediante $(p, 0)$. Esto implica, que hemos construido un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de identificación de puntos entre las hipersuperficies $\mathcal{M}_\lambda$ en $\mathcal{N}$, $\phi_\lambda : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \mid \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_\lambda$, con $p \in \mathcal{M}_0 \mapsto q = \phi(p) \in \mathcal{M}$. Si asignamos un sistema de coordenadas x^μ en $\mathcal{M}_0$, $\phi_\lambda(x)$ establecerá las coordenadas x^μ en $\mathcal{M}_\lambda$ y en $\mathcal{N}$, mediante $\phi : (p, 0) \mapsto (p, \lambda)$. El generador de este difeomorfismo ϕ, es $(\partial/\partial\lambda)^a$ el cual es tangente a las órbitas de ϕ.

De esta manera hemos foliado $\mathcal{N}$ mediante las subvariedades $\mathcal{M}_\lambda$ para cada λ, que son difeomórficas al espacio físico $\mathcal{M}$ y al espacio de fondo $\mathcal{M}_0$. Es importante resaltar que $\mathcal{N}$ tiene una estructura diferenciable ya que es el producto tensorial directo de $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}$ y por construcción las subvariedades $\mathcal{M}_\lambda$ tienen una estructura diferenciable. Es decir, por construcción, hemos requerido que los puntos en diferentes subvariedades de $\mathcal{N}$ estén unidas por una curva contínua $\gamma \in \mathcal{N}$. Podemos elegir entonces cartas con las coordenadas $x^\mu(\mu = 0, 1, \ldots, m-1)$, en cada *lámina* $\mathcal{M}_\lambda$ y que tienen a $x^m \equiv \lambda$. Las ECE se pueden escribir formalmente como

$$\mathcal{E}[\mathcal{Q}_\lambda] = 0 \tag{5}$$

en $\mathcal{M}_\lambda$ para $\mathcal{Q}_\lambda$ definido en $\mathcal{M}_\lambda$. Es decir, cada $\mathcal{M}_\lambda$ tiene su métrica $\mathbf{g}_\lambda$ y un conjunto de campos materiales $\mathbf{T}_\lambda$ que satisfacen la ecuación anterior. Si el campo tensorial está dado en cada $\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{Q}_\lambda$ es extendido a un campo tensorial en $\mathcal{N}$ mediante $\mathcal{Q}(p, \lambda) \equiv \mathcal{Q}_\lambda(p)$ con $p \in \mathcal{M}_\lambda$. Con esta extensión, la Ec. (5) se puede considerar una ecuación en $\mathcal{N}$. Los campos tensoriales en $\mathcal{N}$, como el anterior, son por construcción *tangentes* a cada $\mathcal{M}_\lambda$, *i.e.* su componente normal a cada $\mathcal{M}_\lambda$ es cero.

La base del espacio tangente de $\mathcal{N}$, queda establecida usando el generador del difeomorfismo ϕ_λ, $(\partial/\partial\lambda)^a$ y su dual $d\lambda$ que satisfacen

$$(d\lambda)_a \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a = 1.$$

Por su construcción, la uno-forma $(d\lambda)_a$ y su dual $(\partial/\partial\lambda)^a$ son normales a cualquier tensor que es extendido del espacio tangente a cada $\mathcal{M}_\lambda$. El conjunto de $(d\lambda)_a$ y $(\partial/\partial\lambda)^a$ y la base del espacio tangente a cada $\mathcal{M}_\lambda$ son considerados como la base del espacio tangente de $\mathcal{N}$.

Entonces podemos empezar a considerar a las perturbaciones del campo $\mathcal{Q}$ como las comparaciones de $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{M}_\lambda$ con $\mathcal{Q}_0$ en $\mathcal{M}_0$, por lo que es necesario identificar los puntos de $\mathcal{M}$ con aquellos en $\mathcal{M}_0$. Con este fin, se elegirá un nuevo difeomorfismo φ_λ. Por simplicidad ese mapeo se puede elegir como un mapeo exponencial [67]. Este mapeo de identificación de puntos, está representada por el mapeo $\varphi_\lambda : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, tal que, $\varphi_\lambda : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_\lambda$, y en general $\phi(p) \neq \varphi(p)$, para $p \in \mathcal{M}_0$. El *grado de libertad de norma* φ_λ, es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos (*e.g.* un mapeo exponencial) que satisface las propiedades

$$\varphi_{\lambda_1+\lambda_2} = \varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2} = \varphi_{\lambda_2} \circ \varphi_{\lambda_1}, \quad \varphi_0 = \text{identidad}. \tag{6}$$

Este grupo uniparamétrico de difeomorfismos es generado por el campo vectorial ${}^\varphi X^a_\lambda$. A este campo vectorial se le conoce como *generador* y es definido por la acción del *pullback* para un campo tensorial $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{N}$:

$$\pounds_X \mathcal{Q} \equiv \lim_{\lambda\to0} \frac{\varphi^*_\lambda\mathcal{Q} - \mathcal{Q}}{\lambda}, \tag{7}$$

y puede ser descompuesto usando la base de $\mathcal{N}$ como sigue

$${}^\varphi X^a_\lambda =: \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a + \theta^a, \quad \theta^a(d\lambda)_a = 0, \quad \pounds_{\frac{\partial}{\partial\lambda}}\theta^a = 0. \tag{8}$$

La segunda condición de esta relación se elige por simplicidad, debido a que la elección de θ^a es arbitraria salvo la condición de que sea tangente a $\mathcal{M}_\lambda$. El campo vectorial θ^a está definido en $\mathcal{M}_\lambda$ y exceptuando las condiciones anteriores es arbitrario, *i.e.* la arbitrariedad de la elección de norma está contenida en la componente tangente del campo vectorial X, es decir en el campo vectorial θ^a.

El *pull-back* $\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}$ mapea el campo tensorial $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{M}_\lambda$ a un tensor $\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}$ en $\mathcal{M}_0$. Entonces el *pull-back* está representado por la expansión de Taylor (ver apéndice B) [68] a segundo orden mediante

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}(p)|_{\mathcal{M}_0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \pounds_X^k \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} \\ &= \mathcal{Q}(p)|_{\mathcal{M}_0} + \lambda \pounds_X Q|_{\mathcal{M}_0} \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^2 \pounds_X^2 \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned} \tag{9}$$

Obsérvese que $\pounds_X \equiv \pounds_{^\varphi X_\lambda}$, pero estamos simplificando la notación. Dado que $p \in \mathcal{M}_0$, podemos considerar esta ecuación como

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}(p) &= \mathcal{Q}_0(p) + \lambda \pounds_X \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0}(p) \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^2 \pounds_X^2 \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0}(p) + O(\lambda^3)\end{aligned} \tag{10}$$

i.e. una ecuación en el espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$, con $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0}$ que es el valor de fondo de la variable física $\mathcal{Q}$. Armados con esta definición, la perturbacion $\Delta^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$ del campo tensorial $\mathcal{Q}$ bajo la elección de norma φ_λ es definida mediante:

$$\Delta^\varphi \mathcal{Q}_\lambda \equiv \varphi_\lambda^* \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} - \mathcal{Q}_0. \tag{11}$$

A diferencia de la Ec. 4, esta definición tiene todas sus variables definidas en $\mathcal{M}_0$. Sustituyendo (10) en esta última ecuación, definimos las perturbaciones a primer y segundo orden del campo tensorial $\mathcal{Q}$ bajo la elección de norma φ_λ mediante

$$\delta\,_\varphi \mathcal{Q} \equiv \pounds_X \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0}, \qquad \delta^2\,_\varphi \mathcal{Q} \equiv \pounds_X^2 \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0}. \tag{12}$$

Con las definiciones (12) y (11) podemos tratar de establecer de una manera más exacta a lo que nos referimos por "desviaciones pequeñas" de las métrica de fondo. La perturbación debe de representar (intuitivamente) una pequeña adición al campo gravitacional de la métrica de fondo, entonces esperamos que haya algunos difeomorfismos (ya que para el caso general no hay razón obvia por la cual deba de ser cierto) tales que estas "desviaciones pequeñas" $\delta g_{ab} = (\varphi^* g_{ab}) - g_{ab}$, cumplan con $|\delta g_{ab}| \ll 1$. Obviamente existen muchos difeomorfismos que no cumplen con esto, por lo que, toda la discusión desarrollada en este artículo está limitada a los difeomorfismos que satisfacen esta condición [33].

Giremos ahora nuestra atención ahora al problema de transformaciones de norma. Sean dos campos vectoriales X, Y en $\mathcal{N}$. Sus curvas integrales definen dos flujos φ y ψ, respectivamente en $\mathcal{N}$. Entonces X y Y son transversales a cualquier $\mathcal{M}_\lambda$ y los puntos sobre la misma curva integral son **considerados el mismo punto** respecto a su norma. Entonces φ y ψ son mapeos de identificación puntuales. Si descomponemos los campos vectoriales X y Y como lo hicimos anteriormente tenemos,

$$^\varphi X_\lambda^a = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a + \theta^a \qquad ^\psi Y_\lambda^a = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a + \iota^a \tag{13}$$

Cuando $\theta^a \neq \iota^a$ se dice que tenemos *dos elecciones distintas de norma*. Cada una de estas elecciones de norma define un *pull-back* de un campo tensorial $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{N}$ a otros dos campos tensoriales, $\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}$ y $\psi_\lambda^* \mathcal{Q}$ para cualquier valor de λ. Tomando en particular el espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$ vemos que tenemos tres campos tensoriales asociados con $\mathcal{Q}$: $\mathcal{Q}_0$, el valor de fondo de $\mathcal{Q}$, y los dos *pull-back* de $\mathcal{Q}$ desde $\mathcal{M}_\lambda$ por las dos elecciones de norma diferentes. Estos dos últimos campos tensoriales pueden ser expandidos en series de Taylor,

$$^\varphi \mathcal{Q}_\lambda \equiv \varphi_\lambda^* \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\delta^{(k)}\,_\varphi \mathcal{Q}\right) = \mathcal{Q}_0 + \Delta^\varphi \mathcal{Q}_\lambda, \tag{14a}$$

$$^\psi \mathcal{Q}_\lambda \equiv \psi_\lambda^* \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\delta^{(k)}\,_\psi \mathcal{Q}\right) = \mathcal{Q}_0 + \Delta^\psi \mathcal{Q}_\lambda. \tag{14b}$$

donde se ha usado las definición recién dada (11). Como φ_λ y ψ_λ son elecciones de norma que mapean el espacio-tiempo $\mathcal{M}_0$ en $\mathcal{M}_\lambda$, $^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$ y $^\psi \mathcal{Q}_\lambda$ son representaciones en $\mathcal{M}_0$ del campo tensorial $\mathcal{Q}$ en dos diferentes normas. Las cantidades $\delta_\varphi^k \mathcal{Q}$ y $\delta_\psi^k \mathcal{Q}$ son las perturbaciones de orden k en las normas φ y ψ respectivamente. Es muy importante notar que el parámetro λ usado para etiquetar las subvariedades de $\mathcal{N}$ (recuérdese que proviene del difeomorfismo original ϕ) también sirve para realizar la expansión, estableciendo así lo que significa "perturbación a orden k", por lo que la división de $\Delta^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$ en perturbaciones de primer, segundo, etc. orden no tiene un significado absoluto, ya que una reparametrización de $\mathcal{N}$ (*i.e.* eligiendo un nuevo mapeo primigenio) mezclará todos los ordenes. Lo único que está definido de manera invariante, es la cantidad $\Delta^\varphi \mathcal{Q}$. Es importante notar que si el campo tensorial $\mathcal{Q}$ es invariante de norma, su representación en $\mathcal{M}_0$ no cambiará ante transformaciones de norma, por definición.

Definimos que un campo tensorial $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{N}$ es *totalmente invariante de norma* (TIN) si $^\varphi \mathcal{Q}_\lambda = {}^\psi \mathcal{Q}_\lambda$ para cualquier par de elecciones de norma φ y ψ, implicando así que $\delta^{(k)}\,^\varphi \mathcal{Q} = \delta^{(k)}\,^\psi \mathcal{Q}$ para todo k. Podemos relajar este requerimiento y definir *invariante de norma* (IN) ***a orden*** n si y sólo si para dos normas cualesquiera φ y ψ

$$\delta^{(k)}\,_\varphi \mathcal{Q} = \delta^{(k)}\,_\psi \mathcal{Q} \qquad \forall\, k, \quad \text{con} \quad k < n. \tag{15}$$

Con esta definición es posible demostrar por inducción [34] que el campo tensorial $\mathcal{Q}$ es invariante de norma a orden $n \geq 1$ si y sólo si $\pounds_\xi \delta^{(k)} \mathcal{Q} = 0$, para cualquier campo vectorial ξ^a definido en $\mathcal{M}_0$ y $\forall k < n$. Esto generaliza el lema de Stewart-Walker [expuesto por vez primera en [32]:

Lema de Stewart-Walker. La perturbación a orden n del campo tensorial $\mathcal{Q}$ es invariante de norma a orden n si y solo si $\mathcal{Q}_0$ y todas las perturbaciones de orden menor a n, son, en cualquier norma:

- Cero
- Escalar constantes
- Combinaciones lineales de productos de deltas de Kronecker.

La prueba de este lema es directa usando las definiciones anteriores y se puede encontrar en Ref. 32.

El cambio de elección de norma desde φ_λ a ψ_λ está representado por el difeomorfismo

$$\Phi_\lambda \equiv (\varphi_\lambda)^{-1} \circ \psi_\lambda \tag{16}$$

El difeomorfismo Φ_λ es un mapeo $\Phi_\lambda : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0$ para cada valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Este difeomorfismo cambia el punto de identificación, por lo tanto Φ_λ se puede considerar como *la transformación de norma* $\Phi_\lambda : \varphi_\lambda \to \psi_\lambda$. Debemos recalcar que $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0$ *no es* un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en $\mathcal{M}_0$ debido a que en general, los generadores del difeomorfismo, ${}^{\varphi}X^a$ y ${}^{\psi}Y^a$, no conmutan. Como consecuencia de esto, no se podrá expandir a Φ_λ en una serie de Taylor usando la Ec. (9) debido a que esta sólo es válida para grupos uniparamétricos, sin embargo, en el apéndice C se muestra que, a orden n en λ la familia uniparamétrica de difeomorfismos Φ siempre puede ser aproximada por la familia de diferomorfismos de caballo de rango n (teorema C.2), los cuales a su vez pueden ser expresados en una serie de Taylor generalizada (lema C.1).

La transformación de norma Φ_λ induce un *pull-back* desde la representación ${}^{\varphi}\mathcal{Q}_\lambda$ del tensor perturbado en la elección de norma φ_λ a la representación ${}^{\psi}\mathcal{Q}_\lambda$ en la elección de norma ψ_λ. De esta manera estos tensores están conectados por el mapeo lineal Φ^*_λ mediante

$$\begin{aligned} {}^{\psi}\mathcal{Q}_\lambda &= \psi^*_\lambda \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} = \left(\psi^*_\lambda \left(\varphi_\lambda \varphi_\lambda^{-1}\right)^* \mathcal{Q}\right)\Big|_{\mathcal{M}_0} \\ &= \left(\varphi_\lambda^{-1}\psi_\lambda\right)^* \left(\varphi^*_\lambda \mathcal{Q}\right)\Big|_{\mathcal{M}_0} = \Phi^*_\lambda \, {}^{\varphi}\mathcal{Q}_\lambda \end{aligned} \tag{17}$$

Usando el lema C.1, se expresa la serie de Taylor de $\Phi^*_\lambda \, {}^{\varphi}\mathcal{Q}_\lambda$, obteniendo

$$\begin{aligned} \Phi^*_\lambda \, {}^{\varphi}\mathcal{Q}_\lambda &= {}^{\varphi}\mathcal{Q} + \lambda \pounds_{\xi_1} {}^{\varphi}\mathcal{Q} \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}\left\{\pounds_{\xi_2} + \pounds^2_{\xi_1}\right\}^{\varphi}\mathcal{Q} \\ &+ \frac{\lambda^3}{3!}\left\{\pounds^3_{\xi_1} + 3\pounds_{\xi_1}\pounds_{\xi_2} + \pounds_{\xi_3}\right\} + \mathcal{O}(\lambda^4). \end{aligned} \tag{18}$$

donde ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son los primeros tres generadores de Φ_λ. Las expresiones de estos generadores en términos de la descomposición (13) de los campos vectoriales X, Y se muestra en la Ec. 20. Si sustituimos (14a) y (14b) en (18) e igualando término a término llegamos a que las relaciones entre el primer, segundo y tercer orden de la perturbación del tensor $\mathcal{Q}$ en dos normas diferentes es:

$$\delta^{(1)}_\psi \mathcal{Q} - \delta^{(1)}_\varphi \mathcal{Q} = \pounds_{\xi_1} \mathcal{Q}_0, \tag{19a}$$

$$\delta^{(2)}_\psi \mathcal{Q} - \delta^{(2)}_\varphi \mathcal{Q} = 2\pounds_{\xi_1}\delta^{(1)}_\varphi \mathcal{Q} + \left\{\pounds_{\xi_2} + \pounds^2_{\xi_1}\right\} \mathcal{Q}_0, \tag{19b}$$

Estas relaciones son consistentes con la definición de invariante de norma de orden n dada anteriormente.

Para finalizar esta sección mostraremos la manera de obtener los generadores del difeomorfismo Φ_λ en término de las elecciones de norma X y Y: sustituyendo (14a) y (14b), en (18), igualando términos en orden λ, usando propiedades de la Derivada de Lie (ver 7) de un tensor y por último considerando que $Y^m - X^m = 0$ (ambos tienen la misma m-ésima coordenada: λ) obtenemos las igualdades siguientes (ver Ref. 34 para las demostraciones detalladas de estas últimas dos afirmaciones):

$$\xi^a_1 = Y^a - X^a \tag{20a}$$

$$\xi^a_2 = [X, Y]^a \tag{20b}$$

$$\xi^a_3 = [2X - Y, [X, Y]]^a \tag{20c}$$

4. Espacio-tiempo de ejemplo: el Universo FLRW

4.1. Espacio-tiempo de fondo

Para ejemplificar las diferentes aproximaciones al análisis perturbativo en Relatividad General usaremos el espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW). Los Universos FLRW describen la dinámica y la geometría de los universos con hipersuperficies espaciales máximamente simétricas. En particular nos enfocaremos al caso espacialmente plano (*i.e.* $\Omega = 1$) de FLRW. Usaremos este espacio-tiempo por dos motivos, el primero es que debido a sus características geométricas (simetrías y platitud espacial) es fácil de manipular matemáticamente; y segundo, en la actualidad, debido a los grandes avances observacionales en la cosmología es posible extraer y comparar los cálculos hechos con la teoría de perturbaciones aplicada a estos universos idealizados con los datos proporcionados por el universo real, por ejemplo con los datos extraídos del estudio del fondo de radiación cósmica [21].

Este espacio-tiempo idealizado es homogéneo e isotrópico espacialmente. Esto sólo se cumple -de una manera aproximada y sin una clara justificación teórica- en el universo real a una escala de aproximadamente 100 Mpc. En este artículo supondremos que la geometría de las hiper superficies espaciales es plana, por lo que su elemento de línea sin perturbar es

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j], \tag{21}$$

donde $a(\eta)$ es el factor de escala expresado en el tiempo conforme η. La comilla, $\{\}'$, indica una derivación respecto al tiempo conforme, *i.e.* $\{\}' \equiv \partial/\partial\eta$. El tiempo conforme se relaciona con el tiempo cosmológico t (el tiempo medido por los observadores fijos en las coordenadas comóviles espaciales x^i), mediante

$$d\eta = \int \frac{dt}{a}.$$

Los símbolos de Christoffel están definidos por [4]:

$$\Gamma^a_{bc} \equiv \frac{1}{2} g^{ad}(g_{d\,b,c} + g_{c\,d,b} - g_{bc,d}). \tag{22}$$

El inverso de la métrica g^{ab} es usado para levantar índices espacio-temporales, mientras que la 3-métrica δ^{ij} ($\delta^{ij}\delta_{jk}{=}\delta^i_k$) es usada para elevar los índices de los *3-vectores* y *3-tensores*. Como el espacio es plano, la 3-derivada covariante es $\nabla_i \equiv \partial_i$.

Para la métrica (21) los símbolos de Christoffel tienen una forma particularmente, aquellos diferentes de cero son

$$\Gamma^\eta_{\eta\,\eta} = \mathcal{H}, \quad \Gamma^j_{\eta\,i} = \delta^j_i\mathcal{H}, \quad \Gamma^\eta_{i\,j} = \delta_{ij}\mathcal{H}, \tag{23}$$

donde se ha introducido el parámetro de Hubble comóvil,

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'(\eta)}{a(\eta)},$$

que está relacionado con el parámtero de Hubble [69] H, mediante $\mathcal{H} = aH$. El tensor de Ricci se puede expresar en términos de los símbolos de Christoffel:

$$R_{ab} = \Gamma^c_{ab,\,c} - \Gamma^c_{a\,c,b} + \Gamma^c_{d\,c}\Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{d\,b}\Gamma^d_{a\,c}, \tag{24}$$

las componentes de este tensor en este espacio son

$$R_{\eta\eta} = 3\left(\mathcal{H} - \frac{a^{''}}{a}\right), \quad R_{ij} = \left(\mathcal{H} + \frac{a^{''}}{a}\right). \tag{25}$$

El escalar de Ricci, $\mathcal{R}$, por su parte, está definido por la contracción total del tensor de Ricci con la métrica $g_{\mu\nu}$, *i.e.*

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{26}$$

sustituyendo (25) en esta última fórmula tenemos

$$\mathcal{R} = \frac{6}{a^2}\left(\mathcal{H}^{'} - \mathcal{H}^2\right). \tag{27}$$

El tensor de Einstein G_{ab}, está definido por la ecuación

$$G_b{}^a = R_b{}^a - \frac{1}{2} g_b{}^a\mathcal{R}, \tag{28}$$

usando (25) y (27) obtenemos que sus componentes son

$$G_\eta{}^\eta = -\frac{3}{a^2}\mathcal{H}^2, \tag{29a}$$

$$G_i{}^j = -\frac{1}{a^2}\delta^j_i\left(2\mathcal{H}^{'} + \mathcal{H}^2\right). \tag{29b}$$

En este artículo sólo estamos interesados en el caso inflacionario, por lo que la materia en el universo estará representada por un campo escalar, $\varphi = \varphi(\eta)$, descrito por el tensor de energía-momento

$$T_a{}^b = \nabla_a\varphi\nabla^b\varphi - \frac{1}{2}\delta_a{}^b(\nabla_c\varphi\nabla^c\varphi + 2V(\varphi)), \tag{30}$$

con componentes en las coordenadas definidas por (21)

$$T_\eta{}^\eta = -\left(\frac{1}{2a^2}(\varphi^{'})^2 + V(\varphi)\right), \tag{31a}$$

$$T_i{}^j = \left(\frac{1}{2a^2}(\varphi^{'})^2 - V(\varphi)\right)\delta_i{}^j. \tag{31b}$$

Comparando con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto podemos identificar a $T_\eta{}^\eta$ con la energía, ϵ, y a $T_i{}^j$ con la presión, p. Entonces las ecuaciones de Einstein para el espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$ lleno con un campo escalar, φ, es

$$\mathcal{H}^2{=}\frac{8\pi G}{3}a^2\epsilon{=}\frac{8\pi G}{3}a^2\left(\frac{1}{2a^2}(\varphi^{'})^2{+}V(\varphi)\right), \tag{32a}$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{H}^{'} + \mathcal{H}^2 &= -8\pi G a^2 p \\ &{=}{-}8\pi G a^2\left(\frac{1}{2a^2}(\varphi^{'})^2{-}V(\varphi)\right), \end{aligned} \tag{32b}$$

en el trato perturbativo será útil la siguiente forma que se obtiene sumando ambas ecuaciones

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}^{'} = 4\pi G a^2(\epsilon + p) = 4\pi G(\varphi^{'})^2. \tag{33}$$

4.2. Perturbaciones a primer orden en el espacio-tiempo FLRW

Antes de introducir los esquemas desarrollados para lidiar con los problemas de norma en la teoría de perturbaciones en Relatividad General, perturbaremos de manera general a primer orden la métrica. Las perturbaciones a segundo orden se verán más adelante en el texto. Los componentes de la perturbación lineal de la métrica (21)

$$\delta g_{ab} \equiv h_{ab} = a^2(\eta)\begin{pmatrix} h_{\eta\,\eta} & h_{\eta\,i} \\ h_{i\,\eta} & h_{i\,j}\end{pmatrix}. \tag{34}$$

El elemento de línea perturbado es entonces,

$$\begin{aligned} ds^2 = a^2(\eta)\,&\left[-(1 + h_{\eta\eta})\,d\eta^2\right. \\ &\left.+2h_{\eta\,i}d\eta\,dx^i + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Esta ecuación es completamente general: $g_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes y hemos introducido 10 campos independientes que caracterizan la perturbación (1 de la perturbación escalar + 3 de la perturbación vectorial + 6 de la perturbación tensorial), pero téngase en cuenta que sólo 6 de estos campos representan grados de libertad físicos.

Debido a que la variedad $\left(\Sigma(\eta), a^2\delta_{i\,j}\right)$ es maximamente simétrica, es posible encontrar una descomposición diferente a $h_{\eta\,\eta}, h_{\eta\,i}, h_{ij}$ de la perturbación a primer orden que explote estas simetrías [35]. Existen dos tipos de transformaciones de coordenadas en teoría de perturbaciones en Relatividad General: (a) *Transformaciones de norma*, que son las que han sido el tema central de este artículo en las cuales, las coordenadas de $\mathcal{M}_0$ se mantienen fijas, y, al elegir una correspondencia de puntos diferente entre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}$ las coordenadas de este último cambian; y (b) *Transformaciones en* $\mathcal{M}_0$ que se diferencian de las anteriores, en el hecho de que la norma se mantiene fija y hacemos cambios de coordenadas en $\mathcal{M}_0$ que inducirá un cambio de coordenadas en $\mathcal{M}$. Estas últimas son las que nos ayudarán a descomponer las perturbaciones de la métrica. Como queremos preservar las simetrías de $\mathcal{M}_0$, las transformaciones que podremos hacer en esta variedad están restringidas a ser de dos tipos: (a) Reparametrizaciones del Tiempo, (2) Transforamciones en coordenadas espaciales. *i.e.* $x^{i'} = X^{i'}_k\, x^k$. donde las únicas que preservan la simetría de $\mathcal{M}_0$ son las rotaciones:

$$X^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^{i'}_{k} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

La matriz $\mathbf{R}^{i'}_{k}$ es una matriz $\boldsymbol{O}(3)$ que representa las rotaciones. Analizando como se transforman las perturbaciones de la métrica antes estas transformaciones observamos que $h_{\eta\,\eta}$ se transforma como *escalar*, $h_{\eta\, i}$ como *3-vector* y $h_{i\,j}$ como *3-tensor*, donde los términos *escalar*, *3-vector* y *3-tensor* se refieren a las propiedades de transformación ante rotaciones en el espacio de fondo [70]. En particular *escalar* en este contexto NO significa que la perturbación es invariante antes las transformaciones de norma, de hecho, *las perturbaciones escalares no son invariantes de norma*. Estas denominaciones de *escalar* y *3-vectorial* datan del artículo seminal de Lifshitz [36].

Usando el teorema de Helmholtz podemos descomponer a la perturbación vectorial en una parte potencial o libre de rotación y en una parte libre de divergencia. Otras denominaciones son *longitudinal* para la libre de rotacional y *solenoidal* para indicar que la divergencia de este término es cero.

$$\begin{aligned} h_{\eta\, i} &= h_i^{(rot-free)} + h_i^{(div-free)} \\ &= h^{(SV)}_{,\,i} + h_i^{(V)}, \end{aligned} \tag{37}$$

donde $\delta^{ij} h^{(V)}_{i,\,j} = 0$; de manera similar, la perturbación tensorial [71]:

$$h_{ij} = a^2 h^{(S)} \delta_{ij} + a^2 h^{(T)}_{ij}, \tag{38}$$

con $h^{(T)i}_{i} \equiv \delta^{ij} h^{(T)}_{ij} = 0$. A su vez, $h^{(T)}_{ij}$ se puede descomponer en,

$$\begin{aligned} h^{(T)}_{ij} &= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} \nabla^2 \right) h^{(ST)} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(h^{(VT)}_{i,\,j} + h^{(VT)}_{j,\,i} \right) + h^{(TT)}_{ij}, \end{aligned} \tag{39}$$

donde $\delta^{ij} h^{(VT)}_{i,\,j} = 0$, $\delta^{ik} h^{TT}_{ij,\,k} = 0$, y $\delta^{ij} h^{TT}_{ij} = 0$. En la literatura al primer término entre paréntesis del lado derecho de la Ec. (39) se le conoce como "operador sin traza de doble gradiente".

Tenemos entonces que la perturbación lineal de la métrica se puede descomponer en tres conjuntos de variables, cada conjunto definido por como se transforman sus elementos [72]: los que transforman como escalar $\left\{ h_{\eta\,\eta}, h^{(S)}, h^{(SV)}, h^{(ST)} \right\}$ que son aquellas que se pueden construir a partir de otros escalares, sus derivadas y cantidades de la métrica de fondo; aquellos que transforman como *3-vectores*, $\left\{ h^{(V)}_i,\, h^{(VT)}_i \right\}$, que tienen como característica que su divergencia es cero y finalmente un término que transforma como *3-tensor* con divergencia cero (o transverso) y con traza cero: $\left\{ h^{(TT)} \right\}$.

Esta descomposición tiene relaciones inversas que se escriben a continuación:

$$h^{(SV)} = \triangle^{-1} \delta^{ij} h_{\eta\, j,\, i} \tag{40a}$$

$$h^{(V)}_i = h_{\eta\, i} - \left(\triangle^{-1} h_{\eta\, j\, ,i} \right)^{,j} \tag{40b}$$

$$h^{(S)} = \frac{1}{3a^2} h_i{}^i \tag{40c}$$

$$h^{(T)}_{ij} = \frac{1}{a^2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3} h_k{}^k \delta_{ij} \right) \tag{40d}$$

$$h^{(ST)} = \frac{3}{2} \triangle^{-1} \triangle^{-1} h^{(T)\, ,i\, ,j}_{ij} \tag{40e}$$

$$h^{(VT)}_i = \triangle^{-1} h^{(T)\, ,k}_{ik} - \triangle^{-1}\left(\triangle^{-1} h^{(T)\, ,\, k,\, l}_{kl} \right)_{,\, i} \tag{40f}$$

$$\begin{aligned} h^{(TT)}_{ij} = h^{(T)}_{ij} &- \frac{3}{2}\left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\triangle \right) \triangle^{-1}\triangle^{-1} h^{(T),k,l}_{kl} \\ &- 2\partial_{(i}\triangle^{-1}\partial^k h^{(T)}_{j)k} + 2\partial_{(i}\triangle^{-1}\partial_{j)}\triangle^{-1} h^{(T),k,l}_{kl} \end{aligned} \tag{40g}$$

donde $\triangle \equiv \nabla^2$, es el laplaciano de la hipersuperficie espacial y estamos suponiendo que existe una función de Green inversa del operador $\triangle$, $\triangle^{-1}$, que garantice la correspondencia uno a uno entre $\{h_{\eta\eta},\, h_{\eta\, i},\, h_{ij}\}$ y

$$\left\{ \left\{ h_{\eta\,\eta},\, h^{(S)},\, h^{(SV)},\, h^{(ST)} \right\},\, \left\{ h^{(V)}_i,\, h^{(VT)}_i \right\},\, \left\{ h^{(TT)} \right\} \right\}.$$

Estas funciones de Green existen si especificamos el dominio de las perturbaciones (por ejemplo, L^2 en el espacio $\Sigma(\eta)$) con las condiciones apropiadas de frontera. Nótese que la suposición de la existencia de estas funciones excluye al *kernel* de los operadores $\triangle$, por ejemplo, los campos vectoriales de Killing, v_i [20] en $\Sigma(\eta)$. El estudio de las perturbaciones que pertenezcan al *kernel* de $\triangle$ queda excluido del alcance de esta revisión [73].

Una característica importante de esta descomposición, es que las ecuaciones físicas construidas en esta métrica no mezclarán, a primer orden, los elementos de un conjunto con los de otro, de tal manera que pueden ser estudiados por separado [74]. La clasificación en escalares, vectores y tensores, es importante ya que cada uno de ellos representan diferentes fenómenos: la gravitación descrita por Newton es un fenómeno escalar, pero los efectos relativistas se ven claramente (ya que están ausentes en las ecuaciones gravitacionales de Newton) en los comportamientos gravitomagnéticos (el conjunto vectorial de las perturbaciones) y de ondas gravitacionales (las pertubaciones tensoriales) [37]. La métrica en esta nueva descomposición se puede escribir como

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g^{(S)}_{\mu\nu} + \delta g^{(V)}_{\mu\nu} + \delta g^{(T)}_{\mu\nu},$$

donde la perturbación lineal escalar ($\delta g^{(S)}_{\mu\nu}$), vectorial ($\delta g^{(V)}_{\mu\nu}$) y tensorial ($\delta g^{(T)}_{\mu\nu}$) son respectivamente:

$$\delta g^{(S)}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\Big[-h_{\eta\eta}d\eta^2 + 2h^{(SV)}_{,i}d\eta dx^i + \left(h^{(S)}\delta_{ij} + h^{(ST)}_{,i,j}\right)dx^i dx^j\Big], \tag{41a}$$

$$\delta g^{(V)}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\Big[-2h^{(V)}_i d\eta dx^i + \left(h^{(VT)}_{i,j} + h^{(VT)}_{j,i}\right)dx^i dx^j\Big], \tag{41b}$$

$$\delta g^{(T)}_{\mu\nu} = h^{(TT)}_{ij}dx^i dx^j. \tag{41c}$$

La regla de transformación de norma (19a), en el caso de FLRW es

$$_{\varphi}h_{ab} -_{\psi} h_{ab} = \pounds_{\xi}g_{ab} = 2\nabla_{(a}\xi_{b)}. \tag{42}$$

El generador ξ^a de la transformación de norma es un campo vectorial en el espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$. Este vector puede descomponerse de una manera 3+1:

$$\xi_a = \xi_\eta\,(d\eta)_a + \xi_i(dx^i)_a, \tag{43}$$

De esta manera la transformación de norma para las perturbaciones originales, $\{h_{\eta\eta},\, h_{\eta\, i},\, h_{ij}\}$, es

$$_{\varphi}h_{\eta\eta} -_{\psi} h_{\eta\eta} = 2(\partial_\eta - \mathcal{H})\xi_\eta \tag{44a}$$

$$_{\varphi}h_{\eta\, i} -_{\psi} h_{\eta\, i} = \xi_{\eta,\, i} + (\partial_\eta - 2\mathcal{H})\xi_i \tag{44b}$$

$$_{\varphi}h_{i\, j} -_{\psi} h_{i\, j} = 2\xi_{(i,\, j)} - 2\mathcal{H}\delta_{ij}\xi_\eta \tag{44c}$$

Procedemos de la misma manera que con las perturbaciones a primer orden y descomponemos a ξ_i en sus partes longitudinales y solenoidales usando el teorema de Helmholtz:

$$\xi_i = \xi^{(SV)}_{,\, i} + \xi^{(V)}_i \quad \text{con} \quad \xi^i_{,\, i} = 0, \tag{45}$$

entonces la descomposición (44) ahora se escribe,

$$_{\varphi}h_{\eta\eta} -_{\psi} h_{\eta\eta} = 2(\partial_\eta - \mathcal{H})\xi_\eta \tag{46a}$$

$$_{\varphi}h_{\eta\, i} -_{\psi} h_{\eta\, i} = \left((\partial_\eta - 2\mathcal{H})\xi^{(SV)} + \xi_\eta\right)_{,i} + (\partial_\eta - 2\mathcal{H})\,\xi^{(V)}_i \tag{46b}$$

$$_{\varphi}h_{i\, j} -_{\psi} h_{i\, j} = 2\xi^{(V)}_{(i,\, j)} + 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\xi^{(SV)} + 2\left(\frac{1}{3}\nabla^2\xi^{(SV)} - \mathcal{H}\xi_\eta\right)\delta_{ij} \tag{46c}$$

donde la última expresión se escribe de esa manera para facilitar cálculos posteriores.

Utilizando las relaciones (40), las reglas de transformación de norma para la descomposición

$$\left\{\left\{h_{\eta\,\eta}, h^{(S)}, h^{(SV)}, h^{(ST)}\right\}, \left\{h^{(V)}_i, h^{(VT)}_i\right\}, \left\{h^{(TT)}\right\}\right\}$$

son para el conjunto escalar:

$$_{\varphi}h_{\eta\eta} -_{\psi} h_{\eta\eta} = 2(\partial_\eta - \mathcal{H})\xi_\eta, \tag{47a}$$

$$_{\varphi}h^{(SV)} -_{\psi} h^{(SV)} = \xi_\eta + (\partial_\eta - 2\mathcal{H})\xi^{(SV)}, \tag{47b}$$

$$a^2\,{}_{\varphi}h^{(S)} - a^2\,{}_{\psi}h^{(S)} = -2\mathcal{H}\xi_\eta + \frac{2}{3}\nabla^2\xi^{(SV)}, \tag{47c}$$

$$a^2\,{}_{\varphi}h^{(ST)} - a^2\,{}_{\psi}h^{(ST)} = 2\xi^{(SV)}, \tag{47d}$$

por su parte, para el conjunto de perturbaciones vectoriales,

$$_{\varphi}h^{(V)}_i -_{\psi} h^{(V)}_i = (\partial_\eta - 2\mathcal{H})\xi^{(V)}_i, \tag{48a}$$

$$a^2\,{}_{\varphi}h^{(VT)}_i - a^2\,{}_{\psi}h^{(VT)}_i = \xi^{(V)}_i, \tag{48b}$$

y para la parte tensorial,

$$a^2\,{}_{\varphi}h^{(TT)}_{ij} - a^2\,{}_{\psi}h^{(TT)}_{ij} = 0. \tag{49}$$

Sentadas las ecuaciones básicas de las perturbaciones de la métrica de FLRW, podemos estudiar las diferentes alternativas para tratar las perturbaciones en Relatividad General, utilizándola como ejemplo.

5. Enfoques en el tratamiento perturbativo

Otra forma de expresar el contenido del principio de covariancia es diciendo que los observables físicos no pueden depender de la elección de coordenadas, por lo tanto, una característica deseable de una teoría perturbativa es que especifique de una manera no ambigua tales observables, es decir, los observables deben de ser invariantes de norma. Básicamente existen dos maneras de extraer la física (*i.e.* eliminar los grados de libertad espurios) en el tratamiento perturbativo: (a) fijar los grados de libertad de norma (opción conocida como *eligir una norma*, o (b) *extraer las partes invariantes de norma de las perturbaciones*. La opción (b) se puede dividir a su vez en (b1) formalismo 1+3 covariante invariante de norma y en (b2) formalismo invariante de norma. Las opciones (a) y (b1) se mostrarán a grandes rasgos en esta sección y la opción (b2) será el tema por el resto de este reporte.

5.1. Fijando la norma

La elección más sencilla para eliminar los problemas de libertad de norma, es elegir o fijar una norma, procedimiento conocido en inglés como *gauge fixing*. Esto significa simplemente que se escogerá una foliación particular espacial del espacio-tiempo. Esta ha sido una de las opciones más populares de las décadas pasadas y fué iniciada por Lifshitz en 1946 [36], cuando empezó a estudiar la estabilidad (usando perturbaciones) en espacios-tiempos de FLRW.

Los principales problemas de esta aproximación son dos: (1) el eliminar verdaderamente los grados de libertad espurios; y (2) la interpretación física de los resultados obtenidos en una norma en particular. Estos problemas fueron resueltos de manera sistemática en cosmología por Bardeen [38]. El procedimiento de Bardeen es el siguiente: empezando en una norma, es posible definir cantidades invariantes de norma mediante combinaciones algebraicas o diferenciales de variables dependientes de la norma. Esta ha sido la manera de resolver las ambigüedades de la norma estándar en cosmología [15].

A continuación, mencionaremos algunas de las normas favoritas elegidas por la comunidad cosmológica.

5.1.1. Síncrona

La norma síncrona (*synchronous gauge*) fue introducida por Lifshitz en 1946 [36]. La norma síncrona está definida por $h_{\eta\eta}=0$, $h^{(V)}=0$ y $h^{(SV)}=0$, *i.e.* dejamos sin perturbar a g_{00} y a g_{0i}. La métrica en la norma síncrona tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + (\delta_{ij}+h_{ij})\,dx^i dx^j\right]. \tag{50}$$

Nótese que para ser compatible con las métricas expresadas en la literatura [36,39] en esta norma hemos regresado al uso de h_{ij}.

La norma síncrona es muy popular para los estudios numéricos y es la norma usada en CMBFAST [40]. Su principal problema es que no elimina completamente la libertad de norma. Este problema, aunado a su popularidad ha sido fuente de confusión en el pasado [15,38].

Esta norma permite la existencia de un conjunto de observadores que caen libremente –*i.e.* se mueven sobre geodésicas– sin cambiar sus coordenadas espaciales, llamados en la literatura "observadores fundamentales comóviles" [75]. Cada observador está equipado con un reloj que mide el tiempo conforme η y permanece fijo en la coordenada x^i. Los observadores junto con sus relojes y etiquetas que identifican su geodésica definen las coordenadas en todo el espacio-tiempo. El grado de libertad de norma residual (espurio) se debe a que hay libertad para ajustar las condiciones iniciales de los relojes y coordenadas espaciales. Otro problema de esta norma aparece cuando las perturbaciones son muy grandes, si es así, estas coordenadas pueden deformarse mucho e inclusive llegar a intersectarse [37] causando singularidades coordenadas. Las ecuaciones de Einstein y su relación con otra norma, se pueden obtener de las relaciones derivadas en la Sec. 3 y se invita al lector a verlas en [15,37,39].

5.1.2. Newtoniana conforme o longitudinal

En la norma newtoniana solo son diferentes de cero las perturbaciones escalares $h_{\eta\eta}$ y $h^{(S)}$. De esta definición se puede ver que se eliminan todas las perturbaciones de carácter vectorial y tensorial [15], entonces la métrica en esta norma es

$$\begin{aligned} ds^2 = a^2(\eta)\Big[&-(1+h_{\eta\eta})\,d\eta^2 \\ &+\left(1+h^{(S)}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j\Big]. \end{aligned} \tag{51}$$

Otra forma en la que esta norma es presentada en la literatura esta norma es mediante $h_{\eta\,i}=h^{(T)}=0$ [37].

Las condiciones que dan pie a esta norma sólo pueden ser establecidas si el tensor de energía momento no contiene partes vectoriales o tensoriales y no existen ondas gravitacionales libres [76]. La norma newtoniana solo tiene aplicabilidad a orden lineal perturbativo. Si se ignorara esta limitante se estarían eliminando [77] grados de libertad físicos y no grados de libertad de norma [37].

Esta norma se puede ver como una generalización cosmológica relativista de las ecuaciones de gravitación newtoniana. Permitiendo así una interpretación sencilla de las perturbaciones: $h_{\eta\eta}$ es el análogo del potencial gravitacional newtoniano Φ.

Uno de sus atractivos es que las variables invariantes de norma de primer orden [15,37,38], corresponden en esta norma a $h_{\eta\eta}$ y $h^{(S)}$ lo cual permite dar una interpretación física sencilla a las variables invariantes de norma. Debido a esta propiedad en [15] se sugiere calcular las ecuaciones en esta norma (debido a su sencillez relativa respecto al cálculo invariante de norma) y luego hacer las sustituciones de $h_{\eta\eta}$, $h^{(S)}$ por las variables escalares invariantes de norma para tener las ecuaciones invariantes de norma.

La norma newtoniana o longitudinal es un caso especial de una norma más completa conocida como de *norma de Poisson* [37], la cual no tiene las restricciones mencionadas arriba y que queda definida por $h_{\eta\;i}{}^{,i}=0$ y $h_{ij}{}^{,j}=0$.

5.1.3. Otros

Existen otras normas populares en la literatura cosmológica, como la (a) *norma espacialmente plana* $\left(h_{\eta\eta}=h^{(ST)}=h_i^{(VT)}=0\right)$ en esta norma las hipersuperficies espaciales no son perturbadas escalar o vectorialmente. En esta norma la perturbación del campo escalar coincide con la variable de Mukhanov-Sasaki [41]; (b) la *norma ortogonal comóvil* en las cual la 3-velocidad del fluido se hace cero y (c) la *norma de densidad uniforme* que como nombre indica en sus hipersuperficies espaciales la perturbación de la densidad es nula [42].

5.2. 1+3 Covariante-invariante de norma

Hasta el momento hemos considerado foliar el espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales etiquetadas por el tiempo η, esta división se conoce como división 3+1 y recibe el nombre de *slicing* en inglés. La división 3+1 es la usada en la formulación hamiltoniana de Relatividad General [4]. Existen otras formas de hacer la separación espacio-temporal, en 1971 G.F.R. Ellis [43] y otros autores después de él, han desarrollado un formalismo basado en una divisón 1+3 de las identidades de Bianchi y Ricci [44-49] llamado formalismo 1+3 Covariante-Invariante de Norma.

En el formalismo 1+3 Covariante-Invariante de Norma se ejecuta una operación diferente al *slicing*, llamada en inglés *threading* (literalmente “hilado”). Los objetos geométricos usados son una serie de líneas de mundo temporaloides $x^\mu(\tau, \boldsymbol{q})$ donde τ es el parámetro afín que mide el tiempo propio sobre la línea de mundo y $\boldsymbol{q}$ es una etiqueta única para distinguir las diferentes líneas de mundo. Los observadores en este formalismo se mueven a lo largo de estas líneas [37].

La herremienta principal en la construcción de este formalismo, es el vector temporal ($u^\mu u_\mu = -1$) tangente a la línea de mundo $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$. Los tensores se descomponen en una parte paralela al vector u^μ y otra normal a este, usando el operador de proyección $P_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, que es la métrica espacial de los observadores moviéndose con u^μ. Las ecuaciones a las que se les aplicará este procedimiento de descomposición no son las ECE, si no ecuaciones definidas para el tensor de Riemann o el tensor de Weyl y las ecuaciones de Raychaudhuri [ver 43, 45, y referencias dadas arriba].

Usando el Lemma de Stewart-Walker se escogen las variables invariantes de norma, es decir se eligen las variables que son cero de manera natural en el espacio-tiempo de fondo FLRW (por ejemplo el tensor de Weyl –sus partes eléctrica E_{ab} y magnética H_{ab} [47] –, la presión anisotrópica π_{ab} del fluido, el corte de las congruencias de geodésicas σ_{ab}, $\dot{u}^a$, etc [ver 45, para una lista exhaustiva]), por lo tanto las ecuaciones de evolución 1+3 del universo perturbado no poseen ambigüedades de norma. Además las variables elegidas para caracterizar la evolución tienen una interpretación física directa, a diferencia de las variables definidas en el enfoque Invariante de Norma (cf. VI).

En este formalismo es fácil aplicar técnicas de sistemas dinámicos a la cosmología [47].

6. Formalismo Invariante de Norma

En el formalismo Invariante de Norma –presentado en los trabajos de J.M. Stewart y M. Walker [35], M. Bruni *et al*. [50] y luego desarrollado extensamente en los trabajos de Kouji Nakamura [20,51-55])– se busca eliminar desde el inicio, cualquier posible elemento no físico de los grados de libertad. Entre las ventajas de este formalismo, se pueden mencionar que (a) no hace ninguna suposición acerca del espacio-tiempo de fondo (a diferencia, por ejemplo, del método de elección de norma, cf. Sec. 5.1); (b) no sólo se aplica a la teoría de Relatividad General sino a toda teoría en la cual se exija la validez del principio de covariancia general [para un ejemplo de esto ver 51 y las referencias ahí dadas], y por último (c) si se cumple cierta condición de separabilidad de la métrica perturbada a primer orden propone un algoritmo para encontrar perturbaciones invariantes de norma a cualquier orden superior al primero.

6.1. Algoritmo

El procedimiento para encontrar invariantes de norma a un orden perturbativo arbitrario es el siguiente:

1. Se expande mediante la serie de Taylor (B1) a la métrica $\bar{g_{ab}}$ de $\mathcal{M}_\lambda$ luego de aplicarle un *pull-back* usando la elección de norma φ_λ a $\mathcal{M}_0$, *i.e.*
$$\varphi^*_\lambda \overline{g_{ab}} = g_{ab} + \lambda \, {}_\varphi h_{ab} + \frac{\lambda^2}{2} \, {}_\varphi l_{ab} + \mathcal{O}^3(\lambda), \quad (52)$$
donde g_{ab} es la métrica de $\mathcal{M}_0$ y hemos definido a $\delta g_{ab} \equiv h_{ab}$ y a $\delta^2 g_{ab} \equiv l_{ab}$ como las perturbaciones de la métrica a primer y segundo orden respectivamente. Las transformaciones de norma (19a) y (19b) de la métrica a primer y segundo orden son
$${}_\varphi h_{ab} - {}_\psi h_{ab} = \pounds_{\xi_1} g_{ab}, \quad (53a)$$
$${}_\varphi l_{ab} - {}_\psi l_{ab} = 2\pounds_{\xi_1} h_{ab} + \left\{ \pounds_{\xi_2} + \pounds^2_{\xi_1} \right\} g_{ab}. \quad (53b)$$

2. Inspeccionando las reglas de transformación de norma (53) se procede a separar, en partes invariantes de norma y variantes de norma, a la primera perturbación de la métrica, h_{ab}.
$$h_{ab} \equiv \mathcal{H}_{ab} + 2\nabla_{(a}\, X_{b)}. \quad (54)$$
donde $\mathcal{H}_{ab}$ es la parte que es invariante de norma y X^a es la parte variable. Es decir, ante transformaciones de norma $\Phi = \varphi^{-1} \circ \psi$,
$${}_\psi \mathcal{H}_{ab} - {}_\varphi \mathcal{H}_{ab} = 0, \quad (55a)$$
$${}_\psi X^a - {}_\varphi X^a = \xi^a_1. \quad (55b)$$
Este procedimiento de separación se supone que se conoce y es la condición de entrada del algoritmo. Esta condición puede parecer muy restrictiva, ya que no existe una manera canónica de realizar esta descomposición. En nuestro espacio-tiempo de ejemplo *i.e.* Universos FLRW, está descomposición se mostró en IV B, a partir de esta primera descomposición se manipulan algebráicamente los elementos para llegar a (54) como se mostrará adelante.

   Al no existir una manera canónica de realizar la descomposición a primer orden (54) se pueden intentar algunas estrategias para lograrla, por ejemplo, si existen algunas simetrías de Killing en el espacio-tiempo de fondo, se puede intentar una descomposición armónica de las variables [78].

3. Realice la misma descomposición en partes variantes e invariantes de norma para perturbaciones de orden superior de la métrica. El artículo [51] mostró que esto se puede hacer siempre con algunas manipulaciones algebraicas que resultan de inspeccionar la reglas de transformación de norma a ordenes mayores que el segundo (que se vuelven más complicadas cada vez que aumentamos el orden perturbativo). A segundo orden,

por ejemplo, definimos la variable basándonos en la forma de la Ec. (53b) para la elección de norma φ,

$$ {}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} \equiv {}_{\varphi} l_{ab} - 2\pounds_{\varphi X}\, {}_{\varphi}h_{ab} + \pounds_{\varphi X} g_{ab}, \qquad (56) $$

y para la norma ψ,

$$ {}_{\psi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} \equiv {}_{\psi} l_{ab} - 2\pounds_{\psi X}\, {}_{\psi}h_{ab} + \pounds_{\psi X} g_{ab}. \qquad (57) $$

Esta variable se transforma como mostraremos, primero restamos ambas variables,

$$ \begin{aligned} {}_{\psi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} - {}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} = {}_{\psi} l_{ab} - {}_{\varphi} l_{ab} \\ - 2\pounds_{\psi X}\, {}_{\psi}h_{ab} + 2\pounds_{\varphi X}\, \varphi h_{ab} \\ + \pounds^2_{\psi X}\, g_{ab} - \pounds^2_{\varphi X}\, g_{ab}, \end{aligned} \qquad (58) $$

luego, usando la linealidad de la derivada de Lie 7 y las reglas de transformación de norma a primer orden (53) y (55b)

$$ \begin{aligned} {}_{\psi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} - {}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} &= -2\pounds_{\xi_1}(\pounds_{\xi_1} g_{ab}) + \pounds_{\xi_2} g_{ab} + \pounds^2_{\xi_1} g_{ab} \\ &\quad - 2\pounds_{\varphi X}\,(\pounds_{\xi_1} g_{ab}) + \pounds^2_{\psi X}\, g_{ab} - \pounds^2_{\varphi X}\, g_{ab} \\ &= \pounds_{\xi_2}\, g_{ab} + \Big(\pounds_{\xi_1}\pounds_{\varphi X} - \pounds_{\varphi X}\pounds_{\xi_1}\Big) g_{ab} \\ &= \pounds_{\sigma_2} g_{ab} \end{aligned} \qquad (59) $$

donde $\sigma_2^a \equiv \xi_2^a + [\xi_1,\, {}_{\varphi}X]^a$.

Entonces, la transformación de $\hat{\mathcal{L}}$ tiene la misma forma que la transformación de primer orden (53a). Por lo tanto, como suponemos que existe un procedimiento para descomponer un campo tensorial de rango dos que se transforma como (53a) en (54), podemos descomponer al tensor $\hat{\mathcal{L}}_{ab}$ en un campo tensorial $\mathcal{L}_{ab}$ y un campo vectorial ${}_{\varphi}Y^b$ de la siguiente manera:

$$ {}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} =: \mathcal{L}_{ab} + \nabla_{(a}\, {}_{\varphi}Y_{b)} \qquad (60) $$

donde $\mathcal{L}_{ab}$ se transforma como la parte invariante de norma de $\hat{\mathcal{L}}_{ab}$

$$ {}_{\psi}\mathcal{L}_{ab} - {}_{\varphi}\mathcal{L}_{ab} = 0, \qquad (61) $$

y el campo vectorial Y^b como la parte variable de norma

$$ {}_{\psi}Y^a - {}_{\varphi}Y^a = \xi_2^a + [\xi_1,\, {}_{\varphi}X]^a\,. \qquad (62) $$

Usando este campo tensorial y la definición (53b), la perturbación a segundo orden de la métrica es posible descomponerla en

$$ l_{ab} = \mathcal{L}_{ab} + 2\pounds_X h_{ab} + \left(\pounds_Y - \pounds_X^2\right) g_{ab}, \qquad (63) $$

donde $\mathcal{L}_{ab}$ es la parte invariante de norma y Y^a es la parte variante de la perturbación a segundo orden. El caso para ordenes superiores es completamente análogo al mostrado para el segundo orden, por ejemplo para tercer orden, el lector puede consultar [51].

4. Se pueden definir los invariantes de norma a orden $n < k$ de cualquier campo tensorial (excluyendo la métrica) usando las perturbaciones de la métrica. Las partes variantes de norma de la métrica (X^a, Y^b a primer y segundo orden) no poseen nada de contenido físico, mas sin embargo, son importantes para definir las variables invariantes de norma de los campos tensoriales. Las partes invariantes de norma **Q** de un campo tensorial arbitrario $\mathcal{Q}$ (sin incluir la métrica) están dadas por (a segundo orden)

$$ {}^{(1)}\mathbf{Q} \equiv {}^{(1)}\mathcal{Q} - \pounds_X \mathcal{Q}_0, \qquad (64a) $$

$$ {}^{(2)}\mathbf{Q} \equiv {}^{(2)}\mathcal{Q} - 2\pounds_X\, {}^{(1)}\mathcal{Q} - \left\{\pounds_Y - \pounds_X^2\right\} \mathcal{Q}_0 \qquad (64b) $$

Es fácil ver que estas variables son invariantes de norma si se usan las Ecs. (19), (55b) y (62).

En este momento podemos resolver la pregunta acerca de la generalidad de las Ecs. (64), esta pregunta es válida debido a que nuestras elecciones de norma eran mapeos exponenciales, si esto no fuese así, las ecuaciones afectadas serían (10) (la serie de Taylor del *pull-back* de $\mathcal{Q}_\lambda$), las definiciones de las perturbaciones (12) y las relaciones entre generadores de los mapeos y los generadores de la transformación de norma (20), pero las ecuaciones más importantes (64) no se ven cambiadas, ya que son consecuencia directa de la expansión en serie de Taylor del difeomorfismo que define la transformaciones de norma, Φ_λ [20].

En lo que resta de la sección se seguirá el esquema siguiente, se presentan los cálculos y conceptos de manera general en un apartado y luego se aplican en el apartado siguiente al caso de FLRW. Entonces, el apartado siguiente tratará sobre la descomposición de las partes invariantes de norma de las perturbaciones de la métrica.

6.2. Perturbaciones de la métrica invariantes de norma en el Universo FLRW

En esta sección procederemos a aplicar el algoritmo recién dado (Sec. 6.1) al espacio-tiempo de FLRW presentado en la Sec. 4. Empezando por descomponer la perturbación lineal de la métrica como en (54).

Analizando las transformaciones de norma (47), (48) y (49) podemos encontrar las variables invariantes y variantes de norma a primer orden en la perturbación de una manera sencilla. De la Ec. (49) se ve que la parte transversa y sin traza de la perturbación tensorial, es invariante de norma, a la cual llamaremos $\chi_{ij}^{(1)}$, donde el superíndice indica que es la variable invariante de norma a primer orden,

$$ \begin{aligned} &\chi_{ij}^{(1)} \equiv h_{ij}^{(TT)}, \quad \chi_{ij}^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)}, \\ &\chi^{(1)\,i}{}_{i} = 0, \quad \chi_{ij}^{(1)\,,i} = 0, \end{aligned} \qquad (65) $$

podemos ver que $\chi_{ij}^{(1)}$ tiene dos componentes y es llamado *modo tensorial* en el contexto de las perturbaciones cosmológicas. Usando ahora (48a) y (48b) podemos definir la variable

$$a^2\nu_i^{(1)} \equiv h_i^{(V)} - (\partial_\eta - 2\mathcal{H})\left(a^2 h_i^{(VT)}\right)$$
$$= h_i^{(V)} - a^2\partial h_i^{(VT)}. \tag{66}$$

Esta variable también es invariante de norma y se le conoce como *modo vectorial* y es libre de divergencia, *i.e.*

$$\nu_i^{(1),i} = 0, \tag{67}$$

esta propiedad nos indica que el modo vectorial, $\nu_i^{(1)}$, tiene dos variables independientes.

Por último, para obtener los *modos escalares*, podemos definir la variable $\bar{X}_\eta$, a partir de las Ecs. (47b) y (47d) mediante

$$\bar{X}_\eta \equiv h^{(SV)} - \frac{1}{2}(\partial_\eta - 2\mathcal{H})(a^2 h^{(ST)})$$
$$= h^{(SV)} - \frac{1}{2}a^2\partial_\eta h^{(ST)}, \tag{68}$$

esta variable transforma de la manera siguiente (*i.e.* es variante de norma)

$$_\varphi\bar{X}_\eta -_\psi \bar{X}_\eta = \xi_\eta, \tag{69}$$

Observando a (47a) es fácil definir al invariante de norma Φ,

$$-2a^2\Phi^{(1)} \equiv h_{\eta\eta} - 2(\partial_\eta - \mathcal{H})\bar{X}_\eta. \tag{70}$$

Además, de las transformaciones de norma (47c), (47d) y de la transformación de $\bar{X}_\eta$ definimos al invariante de norma Ψ,

$$-2a^2\Psi^{(1)} \equiv a^2\left(h^{(S)} - \frac{1}{3}\nabla^2 h^{(ST)}\right) + 2\mathcal{H}\bar{X}_\eta. \tag{71}$$

Tenemos entonces seis componentes invariantes de norma: 2 escalares $(\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)})$, 2 vectoriales $\nu_i^{(1)}$ y 2 tensoriales $\chi_{ij}^{(1)}$. Como la parte perturbada de la métrica h_{ab}, tiene 10 componentes independientes las cuatro componentes restantes son la parte variable de norma de la métrica. Para encontrar sus expresiones, escribamos la descomposición 3+1 de la métrica en términos de los invariantes de norma $\{\Phi, \Psi, \nu_i, \chi_{ij}\}$:

$$h_{\eta\eta} = -2a^2\Phi^{(1)} + 2(\partial_\eta - \mathcal{H})\bar{X}_\eta, \tag{72a}$$

$$h_{\eta\, i} = a^2\nu_i^{(1)} + a^2\partial_\eta h_i^{(VT)} + h_{,i}^{(SV)}, \tag{72b}$$

$$h_{ij} = -2a^2\Psi^{(1)}\delta_{ij} + a^2\chi_{ij}^{(1)} + a^2 h_{,i\,,j}^{(ST)}$$
$$- 2\mathcal{H}\bar{X}_\eta\delta_{ij} + 2a^2 h_{(j\,,i)}^{(VT)}, \tag{72c}$$

comparando estas ecuaciones con la descomposición en términos de la separación (54)

$$h_{\eta\eta} = \mathcal{H}_{\eta\eta} + 2(\partial_\eta - \mathcal{H})X_\eta \tag{73a}$$

$$h_{\eta\, i} = \mathcal{H}_{\eta\, i} + X_{\eta\,,i} + X_{i\,\eta} - 2\mathcal{H}X_i \tag{73b}$$

$$h_{ij} = \mathcal{H}_{ij} + 2X_{(i\,,j)} - 2\mathcal{H}\delta_{ij}X_\eta \tag{73c}$$

de aquí se sigue fácilmente que las partes invariantes de norma de la perturbación a primer orden de la métrica son

$$\mathcal{H}_{\eta\eta} \equiv -2a^2\Phi^{(1)}, \quad \mathcal{H}_{\eta\, i} \equiv a^2\nu^{(1)},$$
$$\mathcal{H}_{ij} \equiv -2a^2\Psi^{(1)}\partial_{ij} + a^2\chi_{ij}^{(1)}. \tag{74}$$

Igualando las partes variantes de norma de los conjuntos de Ecs. (72) y (73) obtenemos las siguientes ecuaciones que hay que resolver para obtener la parte variable de norma

$$2(\partial_\eta - \mathcal{H})X_\eta = 2(\partial_\eta - \mathcal{H})\bar{X}_\eta \tag{75a}$$

$$X_{i\,\eta} - 2\mathcal{H}X_i = a^2\partial_\eta h_i^{(VT)} + h_{,i}^{(SV)} \tag{75b}$$

$$2X_{(i\,,j)} - 2\mathcal{H}\delta_{ij}X_\eta = a^2\chi_{ij}^{(1)} + a^2 h_{,i\,,j}^{(ST)}$$
$$- 2\mathcal{H}\bar{X}_\eta\delta_{ij} + 2a^2 h_{(j\,,i)}^{(VT)} \tag{75c}$$

De la Ec. (75a) obtenemos $X_\eta = \bar{X}_\eta + a\bar{C}_\eta$, donde $\bar{C}_\eta$ es una función escalar que satisface $\partial_\eta\bar{C}_\eta = 0$. Usando esta solución, (68) en (75b)

$$X_i = a^2\left(h_i^{(VT)} + \frac{1}{2}h_{,i}^{(ST)}\right) - \partial_i\bar{C}_\eta a^2\int\frac{d\eta}{a} + a^2\bar{C}_i, \tag{76}$$

con $\partial\bar{C}_i = 0$. La última Ec. (75c) da la siguiente relación de constricción

$$a^2\partial_{(i}\bar{C}_{j)} - \partial_i\partial_j\bar{C}_\eta a^2\int\frac{d\eta}{a} - \mathcal{H}\gamma_{ij}a\bar{C}_\eta = 0 \tag{77}$$

definiendo $C_\eta \equiv a\bar{C}_\eta$ y

$$C_i \equiv \partial_i\bar{C}_\eta a^2\int\frac{d\eta}{a} + a^2\bar{C}_i,$$

podemos construir el vector $C_a \equiv C_\eta(\eta)(d\eta)_a + C_i(dx^i)_a$, el cual es un vector de Killing en el espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$ como se puede verificar fácilmente. Por lo tanto la parte variante de la perturbación de la métrica y su relación con las perturbaciones $h^{(SV)}, h^{(ST)}, h_i^{(VT)}$ es única salvo el grado de libertad proveniente del campo vectorial de Killing. Además, como la parte variante contribuye a la perturbación de la métrica mediante (54), el campo vectorial de Killing C_a no contribuye a las perturbaciones de la métrica. Finalmente, para satisfacer la constricción (77), tenemos $\bar{C}_\eta = 0$, $\partial_{(i}\bar{C}_{j)} = 0$, con lo que $\bar{C}_j$ es un vector de Killing en $\Sigma(\eta)$ y como se mencionó antes estos vectores perteneces al *kernel* de $\triangle$ y quedan fuera del dominio de las perturbaciones, entonces $\bar{C}_j = 0$. Claro que sería posible incluir este *kernel* en nuestras discusión al extender el dominio de las perturbaciones, pero esto queda fuera del alcance de este artículo [20,52]. Es fácil comprobar que la parte variante de la norma X^a transforma mediante (55b), como era de esperarse.

Las perturbaciones de la métrica a segundo orden se pueden encontrar siguiendo los mismos argumentos y pasos algebraicos que para el orden lineal, pero usando la variable $\hat{\mathcal{L}}_{ab}$, definida por (56). Repitiendo todos los pasos con esta variable (*i.e.* descomponiendola en su parte variable e invariante de norma, descomponiendola de manera armónica, etc) llegamos a esta expresión para la parte invariante de norma de la perturbación a segundo orden de la métrica (63), $\mathcal{L}_{ab}$,

$$\mathcal{L}_{ab} = -2a^2\Phi^{(2)}(d\eta)_a(d\eta)_b + 2a^2\nu_i^{(2)}(d\eta)_{(a}(dx^i)_{b)} + a^2\left(-2\Psi^{(2)}\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(2)}\right)(dx^i)_a(dx^j)_b \tag{78}$$

donde $\nu^{(2)}$ y $\chi_{ij}^{(2)}$ satisfacen las ecuaciones

$$\nu_i^{(2)\ ,i} = \delta^{ij}\nu_{j\ ,i}^{(2)} = 0, \quad \chi_i^{(2)\ i} = 0, \quad \chi_{ij}^{(2)\ ,i} = 0. \tag{79}$$

Los invariantes de norma $\Phi^{(2)}, \Psi^{(2)}$ son los *modos escalares* de la perturbación a segundo orden, y $\nu_i^{(2)}$ y $\chi_{ij}^{(2)}$ son los modos *vectoriales* y *tensoriales* a segundo orden respectivamente.

6.3. Invariantes de norma de variables geométricas

Luego de realizar los primeros tres pasos (encontrar las partes invariantes de norma a primer y segundo orden del *pull-back* de la métrica del universo físico) del algoritmo presentado en la Sec. 6.1, el siguiente paso (el cuatro) es encontrar las partes invariantes de norma de las cantidad geométricas de interés.

6.3.1. Tensor de curvatura

La definición del tensor de curvatura $\bar{R}_{abc}{}^d$ [4] en el espacio-tiempo físico $(\mathcal{M}, \bar{g}_{ab})$ es

$$\left(\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b - \bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\right)\bar{\omega}_c = \bar{\omega}_d\bar{R}_{abc}{}^d \tag{80}$$

donde $\bar{\nabla}_a$ es la derivada covariante compatible con $\bar{g}_{ab}$ y $\bar{\omega}_c$ es una uno-forma en el espacio físico $\mathcal{M}$. Por otra parte, en el espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$, $R_{abc}{}^d$ esta definido por

$$\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right)\omega_c = \omega_d R_{abc}{}^d \tag{81}$$

con ∇_a la derivada compatible con g_{ab} y ω_c una una-forma en $\mathcal{M}_0$. Introducimos el operador $\varphi^*\bar{\nabla}_a(\varphi^{-1})^*$ en $\mathcal{M}_0$, que podemos identificar con el *pull-back* de la derivada $\bar{\nabla}_a$ en $\mathcal{M}$. Este operador depende de la elección de norma φ.

La propiedad de que este operador derivada sea compatible con la métrica está dada por

$$\varphi^*\bar{\nabla}_a\left(\left(\varphi^{-1}\right)^*\varphi^*\bar{g}_{ab}\right) = 0 \tag{82}$$

donde $\varphi^*\bar{g}_{ab}$ es *pull-back* de la métrica en $\mathcal{M}$. Dado que el *pull-back* $\varphi^*\bar{\nabla}_a(\varphi^{-1})^*$ en $\mathcal{M}_o$ de la $\bar{\nabla}_a$ en $\mathcal{M}$ es lineal, satisface la regla de Leibnitz, conmuta con la contracción y es libre de torsión se puede considerar como operador derivada en $\mathcal{M}_0$.

Aunque es obvio que los *pull-backs* de las cantidades geométricas del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ dependen de la elección de norma, (*e.g.* de φ), a partir de este momento obviaremos a φ en las fórmulas, es decir, con el fin de no complicar la notación expresaremos a $\varphi^*\bar{\nabla}_a(\varphi^{-1})^*$ simplemente como $\bar{\nabla}_a$, ${}^{\varphi}\bar{R}_{abc}{}^d$, como $\bar{R}_{abc}{}^d$ etc.

Como el operador $\bar{\nabla}_a$ se puede considerar como un operador derivada en $\mathcal{M}_0$, existe entonces, un campo tensorial $C^a_{\ bc}$ en $\mathcal{M}_0$ tal que,

$$\bar{\nabla}_a\omega_b = \nabla_a\omega_b - C^c_{\ ab}\omega_c, \tag{83}$$

donde ω_c es una uno-forma arbitraria en $\mathcal{M}_0$. Usando $\bar{\nabla}_a\bar{g}_{bc} = 0$ en $\mathcal{M}$ el $C^a_{\ bc}$ en $\mathcal{M}_0$ está dado por

$$C^c_{ab} = \frac{1}{2}\bar{g}^{cd}\left(\nabla_a\bar{g}_{db} + \nabla_b\bar{g}_{da} - \nabla_d\bar{g}_{ab}\right). \tag{84}$$

Debemos notar que toda la dependencia de la elección de norma del operador $\bar{\nabla}_a$ en $\mathcal{M}_0$ está incluida únicamente en $C^c_{\ ab}$.

Usando la definición del tensor de Riemann, (80) y la Ec. (83), por un lado tenemos,

$$\begin{aligned}\bar{R}^d_{abc} &= \left(\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b - \bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\right) \\ &= \bar{\nabla}_a(\nabla_b - C^d_{bc}) - \bar{\nabla}_b(\nabla_a - C^d_{ac}) \\ &= \nabla_a\nabla_b - C^e_{ab}\nabla_e - \bar{\nabla}_a C^d_{bc} \\ &\quad - \nabla_b\nabla_a + C^e_{ba}\nabla_e - \bar{\nabla}_b C^d_{ac},\end{aligned} \tag{85}$$

pero aplicando la definición de $\bar{\nabla}$ (83)

$$\bar{\nabla}_a C^d_{bc}\omega_d = \nabla_a C^d_{bc}\omega_d - C^d_{ec}C^e_{ab}\omega_d - C^d_{be}C^e_{ac}\omega_d,$$

obtenemos entonces,

$$\bar{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a}C^d_{b]c} + 2C^d_{e[a}C^e_{b]c}. \tag{86}$$

Así, hemos obtenido el tensor de curvatura en el espacio-tiempo físico $\mathcal{M}$, en términos del tensor de curvatura del espacio-tiempo de fondo $\mathcal{M}_0$.

Para obtener la expresión perturbada de la curvatura $\bar{R}_{abc}{}^d$, es necesario calcular las expansiones perturbativas de la inversa de la métrica, $\bar{g}^{ab}$ y C^c_{ab}.

a. Perturbación de la inversa de la métrica Expandamos en serie de Taylor la inversa de la métrica

$$\bar{g}^{ab} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{k!}\delta^{(k)}\,{}_{\varphi}\bar{g}^{ab} = g^{ab} + \lambda D^{ab} + \frac{\lambda^2}{2}E^{ab} + \mathcal{O}(\lambda^3),$$

usando $\bar{g}^{ab}\bar{g}_{bc} = \delta^a_c$ tenemos

$$\begin{aligned}\delta^a_c &= \left(g^{ab} + \lambda C^{ab} + \frac{\lambda^2}{2}E^{ab}\right)\left(g_{bc} + \lambda h_{bc} + \frac{\lambda^2}{2}l_{ab}\right) \\ &= \delta^a_c + \lambda\left(h^a_c + C^a_c\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(l^a_c + 2h_{bc}C^{ab} + D^a_c\right)\end{aligned}$$

de aquí se ve que $C^{ab} = -h^{ab}$. En el segundo orden

$$D^a_c = -2h_{bc}\left(-h^{ab}\right) - l^a_c = 2h_{ec}h^{ae} - l^a_c$$

obteniendo finalmente $D^{ab} = 2h^{ae}h^b_c - l^{ab}$.

Entonces, las perturbaciones a primer y segundo orden del inverso de la métrica son

$$\delta\bar{g}^{ab} \equiv -h^{ab} \tag{87a}$$

$$\delta^{(2)}\bar{g}^{ab} \equiv 2h^{ae}h^c_b - l^{ab} \tag{87b}$$

b. Perturbaciónes de C^a_{bc} Sustituyendo en (84) las expansiones de la métrica y la métrica inversa a segundo orden. Se pueden obtener las expresiones perturbadas deC^a_{bc} a primer y segundo orden

$$\delta C^c{}_{ab} = \nabla_{(a}h^c_{b)} - \frac{1}{2}\nabla^c h_{ab}, \tag{88a}$$

$$\delta^{(2)}C^c{}_{ab} = \left[\nabla_{(a}l_{b)}{}^c - \frac{1}{2}\nabla^c l_{ab}\right] - 2h^{cd}\left[\nabla_{(a}h_{b)d} - \nabla_d h_{ab}\right] \tag{88b}$$

Definimos la variable $H_{ab}{}^c[A]$ donde $A = \{h, l\}$,

$$H_{ab}{}^c[A] \equiv \nabla_{(a}\, A_{b)}{}^c - \frac{1}{2}\nabla^c A_{ab}, \tag{89}$$

$H_{ab}{}^c[A]$ estará apareciendo repetidamente en los cálculos que siguen con varios acomodos de índices, que son definidos como

$$H_{abc}[A] \equiv g_{cd}H_{ab}{}^d[A],$$
$$H_a{}^{bc}[A] \equiv g^{bd}H_{ad}{}^c[A],$$
$$H_a{}^b{}_c[A] \equiv g_{cd}H_a{}^{bd}[A].$$

escritas en estas nuevas variables las ecuaciones (88) son

$$\delta C^c{}_{ab} = H_{ab}{}^c[h], \tag{90a}$$

$$\delta^{(2)}C^c{}_{ab} = H_{ab}{}^c[l] - 2h^{cd}H_{abd}[h]. \tag{90b}$$

Ahora podemos expandir en serie de Taylor el tensor de Riemann a segundo orden

$$\bar{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d + \lambda\,{}^{(1)}R_{abc}{}^d + \frac{\lambda^2}{2}\,{}^{(2)}R_{abc}{}^d. \tag{91}$$

Comparando esta última ecuación con (86), luego de sustituir (90a) y (90b),

$$\delta\bar{R}^d_{abc} = -2\nabla_{[a}H_{b]c}{}^d[h] \tag{92a}$$

$$\delta^{(2)}\bar{R}^d_{abc} = -2\nabla_{[a}H_{b]c}{}^d[l] + 4h^{de}\nabla_{[a}H_{b]ce}[h] + 4H_{c[a}{}^e[h]H_{b]e}{}^d[h] \tag{92b}$$

Para descomponer el tensor de Riemann en sus partes invariante y variante de norma debemos escribir primero $H^c_{ab}[*]$ en términos de variables invariantes de norma, esto será sencillo ya que hemos descompuesto a h_{ab} como (54),

$$2H_{abc}[h] = \left[\nabla_a h_{bc} + \nabla_b h_{ac} - \nabla_c h_{ab}\right],$$

derivando h_{ab},

$$\nabla_a h_{bc} = \nabla_a\mathcal{H}_{bc} + \nabla_a\nabla_b X_c + \nabla_a\nabla_c X_b$$
$$\nabla_b h_{ac} = \nabla_b\mathcal{H}_{ac} + \nabla_b\nabla_a X_c + \nabla_b\nabla_c X_c$$
$$-\nabla_c h_{ab} = -\nabla_c\mathcal{H}_{ab} - \nabla_c\nabla_a X_b - \nabla_c\nabla_b X_a$$

entonces, sumando estas expresiones,

$$2H_{abc}[h] = 2\nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \nabla_c\mathcal{H}_{ab} + R^d_{acb}X_d + R_{bca}{}^d X_x + (\nabla_a\nabla_b + \nabla_b\nabla_a)X_c + \nabla_b\nabla_a X_c - \nabla_b\nabla_a X_c$$

en esta última ecuación hemos sumando y restando $\nabla_b\nabla_a X_c$. Ahora sumemos y restemos $R_{cab}{}^d X_d$

$$2H_{abc}[h] = 2\nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \nabla_c\mathcal{H}_{ab} + R^d_{acb}X_d + R^d_{bca}X_x + R^d_{abc}X_d + 2\nabla_b\nabla_a X_c + R_{cab}{}^d X_d - R_{cab}{}^d X_d,$$

usando la primera identidad de Bianchi, $R_{a[bcd]} = 0$,

$$2H_{abc}[h] = 2\nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \nabla_c\mathcal{H}_{ab} + 2\nabla_b\nabla_a X_c + R_{acb}{}^d X_d - R_{cab}{}^d X_d.$$

recordando las simetrías del tensor de Riemann R^d_{acb}=$-R^d_{cab}$, y usando por segunda vez la primera identidad de Bianchi, obtenemos finalmente

$$H_{abc}[h] = \nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \frac{1}{2}\nabla_c\mathcal{H}_{ab} + \nabla_a\nabla_b X_c + R_{bca}{}^d X_d = H_{abc}[\mathcal{H}] + \nabla_a\nabla_b X_c + R_{bca}{}^d X_d$$

Derivando esta última expresión obtenemos,

$$\nabla_b H_{acd}[h] = \nabla_b H_{acd}[\mathcal{H}] + \nabla_b\nabla_a\nabla_c X_d + X_e\nabla_b R_{cda}{}^e + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e \tag{93}$$

y sustituyéndola en (92a)

$$\delta\bar{R}_{abcd} = -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + (\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)\nabla_c X_d + X_e\left(\nabla_b R_{cda}{}^e - \nabla_a R_{cdb}{}^e\right) + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e - R_{cdb}{}^e\nabla_a X_e,$$

usando $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)Q_{cd} = R_{abc}{}^e Q_{ed} + R_{abd}{}^e Q_{ce}$ en esta última ecuación

$$\begin{aligned}\delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + R_{bac}{}^e\nabla_e X_d + R_{bad}{}^e\nabla_c X_e + X_e\left(\nabla_b R_{cda}{}^e - \nabla_a R_{cdb}{}^e\right) \\ &\quad + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e - R_{cdb}{}^e\nabla_a X_e \\ &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + R_{bac}{}^e\nabla_e X_d + R_{bad}{}^e\nabla_c X_e \\ &\quad + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e - R_{cdb}{}^e\nabla_a X_e \\ &\quad + g^{fe}X_e\left(\nabla_b R_{cdaf} - \nabla_a R_{cdbf}\right),\end{aligned}$$

una vez más aplicamos las simetrías del tensor de Riemann,

$$\begin{aligned}\delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] - R_{abc}{}^{e}\nabla_e X_d \\ &\quad + R_{abed}\nabla_c X^e + R_{aecd}\nabla_b X^e - R_{ebcd}\nabla_a X^e \\ &\quad + X^e\left(\nabla_b R_{cdae} - \nabla_a R_{cdbe}\right) = -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] \\ &\quad + g_{hd}\left(R_{ebc}{}^{h}\nabla_a X^e + R_{aec}{}^{h}\nabla_b X^e + R_{abe}{}^{h}\nabla_c X^e \right. \\ &\quad \left. - R_{abc}{}^{e}\nabla_e X^h\right) + X^e(\nabla_b R_{aecd} + \nabla_a R_{ebcd}),\end{aligned}$$

luego, empleando la segunda identidad de Bianchi, $\nabla_{[a}R_{bc]de} = 0$

$$\begin{aligned}\delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + g_{hd}\left(R_{ebc}{}^{h}\nabla_a X^e \right. \\ &\quad \left. + R_{aec}{}^{h}\nabla_b X^e + R_{abe}{}^{h}\nabla_c X^e - R_{abc}{}^{e}\nabla_e X^h\right) \\ &\quad + X^e(-\nabla_a R_{ebcd} - \nabla_e R_{bacd} + \nabla_a R_{ebcd}),\end{aligned}$$

y utilizando la definición de la derivada de Lie (A1d) sobre un campo tensorial de rango $(1,3)$

$$\begin{aligned}\delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] \\ &\quad + g_{hd}\left(\pounds_X R_{abc}{}^{h} - X^e\nabla_e R_{abc}{}^{h}\right) + X^e\nabla_e R_{abcd},\end{aligned}$$

llegamos finalmente a la perturbación lineal del tensor de Riemann escrita en sus partes invariantes y variantes de norma,

$$\delta\bar{R}_{abc}{}^{d} = -2\nabla_{[a}H_{b]c}{}^{d}[\mathcal{H}] + \pounds_X R_{abc}{}^{d}. \tag{94}$$

Para la perturbación a segundo orden, usamos la variable definida en (56), y calculamos $H_{ab}{}^{c}[\hat{\mathcal{L}}]$,

$$\begin{aligned}H^c_{ab}[\hat{\mathcal{L}}] &= H^c_{ab}[l] - \pounds_X\left(H^c_{ab}[h] + H^c_{ab}[\mathcal{H}]\right) \\ &\quad + \left(H_{abd}[h] + H_{abd}[\mathcal{H}]\right)\pounds_X g^{cd} \\ &\quad - \left(h^d_c + \mathcal{H}^d_c\right)\left(\nabla_a\nabla_b X^d - R^d_{eab}X^e\right),\end{aligned} \tag{95}$$

despejando $H_{ab}{}^{c}[l]$ y sustituyendo en (92b), llegamos a

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\bar{R}^d_{abc} &= -2\nabla_{[a}H^d_{b]c}[\hat{\mathcal{L}}] + 4H^{de}_{[a}[\mathcal{H}]H_{b]ce}[\mathcal{H}] \\ &\quad + 2\mathcal{H}^d_e\left(\pounds_X R^e_{abc} - \delta\bar{R}^e_{abc}\right) \\ &\quad + 2\pounds_X\left(\delta\bar{R}^d_{abc} - \frac{1}{2}\pounds_X R^d_{abc}\right),\end{aligned} \tag{96}$$

usando las fórmulas (60) y (92a),

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\bar{R}^d_{abc} &= -2\nabla_{[a}H^d_{b]c}[\mathcal{L}] + 4H^{de}_{[a}[\mathcal{H}]H_{b]ce}[\mathcal{H}] \\ &\quad + 4\mathcal{H}^d_e\nabla[aH^e_{b]c}[\mathcal{H}] + 2\pounds^{(1)}_X\bar{R}^d_{abc} \\ &\quad + (\pounds_Y - \pounds^2_X)R^d_{abc}.\end{aligned} \tag{97}$$

Usando (94) y (97) podemos definir los tensores de curvatura invariantes de norma de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}^d_{abc} \equiv \delta\bar{R}^d_{abc} - \pounds_X R_{abc}{}^{d} \tag{98a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathbf{R}^d_{abc} &\equiv \delta^{(2)}\bar{R}^d_{abc} - 2\pounds_X\delta\bar{R}^d_{abc} \\ &\quad - \left(\pounds_Y - \pounds^2_X\right)R^d_{abc}.\end{aligned} \tag{98b}$$

6.3.2. *Perturbaciónes del tensor de Ricci*

Contrayendo los índices b y d en las ecuaciones (94) y (97), podemos derivar las fórmulas perturbativas de la curvatura de Ricci,

$$\delta\bar{R}_{ab} = -2\nabla_{[a}H_{c]b}{}^{c}[\mathcal{H}] + \pounds_X R_{ab} \tag{99a}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\bar{R}_{ab} &= -2\nabla_{[a}H^c_{c]b}[\mathcal{L}] + 4H^{cd}_{[a}[\mathcal{H}]H_{c]bd}[\mathcal{H}] \\ &\quad + 4\mathcal{H}^c_d\nabla_{[a}H^d_{b]c}[\mathcal{H}] + 2\pounds_X\delta\bar{R}_{ab} \\ &\quad + \left(\pounds_Y - \pounds^2_X\right)R_{ab},\end{aligned} \tag{99b}$$

de estas ecuaciones definimos los invariantes de norma del tensor de Ricci:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}_{ab} = \delta\bar{R}_{ab} - \pounds_X R_{ab} \tag{100a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathbf{R}_{ab} &= \delta^{(2)}\bar{R}_{ab} - 2\pounds_X\delta\bar{R}_{ab} \\ &\quad - \left(\pounds_Y - \pounds^2_X\right)R_{ab}.\end{aligned} \tag{100b}$$

6.3.3. *Perturbaciones del escalar de Ricci*

El escalar de Ricci en el espacio-tiempo físico $\mathcal{M}$ está dado por

$$\bar{\mathfrak{R}} \equiv \bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} \tag{101}$$

Expandiendo a primer orden ambas cantidades, usando (87a) y (99a)

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{R}} &= \mathfrak{R} + \lambda^{(1)}\bar{\mathfrak{R}} = \left(g^{ab} - \lambda h^{ab}\right) \\ &\quad \times\left(R_{ab} + \lambda\pounds_X R_{ab} - 2\lambda\nabla_{[a}H_{c]b}{}^{c}[\mathcal{H}]\right)\end{aligned} \tag{102}$$

Reconociendo términos a primer orden

$$\delta\bar{\mathfrak{R}} = g^{ab}\pounds_X R_{ab} - h^{ab}R_{ab} - 2\nabla_{[a}H^{ac}_{c]}[\mathcal{H}] \tag{103}$$

usando la regla de Leibnitz de la derivada de Lie,

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathfrak{R}} &= \pounds_X\left(g^{ab}R_{ab}\right) \\ &\quad - R_{ab}\pounds_X g^{ab} - h^{ab}R_{ab} - 2\nabla_{[a}H^{ac}_{c]}[\mathcal{H}]\end{aligned} \tag{104}$$

calculando la derivada de Lie de la métrica y usando la descomposición de h^{ab} (54), llegamos a

$$\delta\bar{\mathfrak{R}} = \pounds_X\mathfrak{R} - \mathcal{H}^{ab}R_{ab} - 2\nabla_{[a}H_{c]}{}^{ac}[\mathcal{H}] \tag{105}$$

Similarmente, usando (87a), (87b), (99a) y (99b) llegamos a

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\bar{\mathfrak{R}} &= -2\nabla_{[a}H_{c]}{}^{ac}[\mathcal{L}] + R^{ab}\left(2\mathcal{H}_{ca}\mathcal{H}_b{}^{c} - \mathcal{L}_{ab}\right) \\ &\quad + 4H_{[a}{}^{cd}[\mathcal{H}]H_{c]}{}^{a}{}_{d}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}_c{}^{b}\nabla_{[a}H_{b]}{}^{ac}[\mathcal{H}] \\ &\quad + 4\mathcal{H}^{ab}\nabla_{[a}H_{d]}b^{d}[\mathcal{H}] \\ &\quad + 2\pounds_X\delta\bar{\mathfrak{R}} + \left(\pounds_Y - \pounds^2_X\right)\mathfrak{R},\end{aligned} \tag{106}$$

que es la perturbación a segundo orden del escalar de Ricci. La definición de los escalares de Ricci invariantes de norma es trivial:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{R} \equiv \delta\bar{\mathfrak{R}} - \pounds_X\mathfrak{R} \tag{107a}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathbf{R} \equiv \delta^{(2)}\bar{\mathfrak{R}} - 2\pounds_X\delta\bar{\mathfrak{R}} - \left(\pounds_Y - \pounds^2_X\right)\mathfrak{R}. \tag{107b}$$

6.3.4. Perturbaciónes del tensor de Einstein

La perturbación a primer orden el tensor de Einstein es

$$\delta\bar{G}_{ab} = -2\nabla_{[a}H_{d]b}{}^{d}\,[\mathcal{H}] + g_{ab}\nabla_{[c}H_{d]}{}^{cd}\,[\mathcal{H}] - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ab}\mathcal{R} + \frac{1}{2}g_{ab}R_{cd}\mathcal{H}^{cd} + \pounds_X G_{ab} \tag{108}$$

y a segundo orden

$$\delta^{(2)}\bar{G}_{ab} = -2\nabla_{[a}H^{c}_{c]b}\,[\mathcal{L}] + 4H^{cd}_{[a}[\mathcal{H}]H_{c]bd}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{L}^{d}_{c}\nabla_{[a}H^{c}_{d]b}[\mathcal{H}] - \frac{1}{2}g_{ab}\Bigg(-2\nabla_{[c}H^{cd}_{d]}[\mathcal{L}] + R_{de}\left(2\mathcal{H}^{d}_{c}\mathcal{H}^{ec} - \mathcal{L}^{de}\right)$$
$$+ 4H^{de}_{[c}[\mathcal{H}]H^{c}_{d]e}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}^{d}_{e}\nabla_{[c}H^{ce}_{d]}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}^{ce}\nabla_{[c}H^{d}_{d]e}[\mathcal{H}]\Bigg) + 2\mathcal{H}_{ab}\nabla_{[c}H^{cd}_{d]}[\mathcal{H}] + \mathcal{H}_{ab}R_{cd}\mathcal{H}^{cd}$$
$$- \frac{1}{2}\mathcal{L}_{ab}\mathcal{R} + 2\pounds_X\delta\bar{G}_{ab} + \left(\pounds_Y - \pounds_X^2\right)G_{ab}. \tag{109}$$

Es conveniente usar a $\bar{G}_a{}^b \equiv \bar{g}^{bc}\bar{G}_{ac}$, en lugar de $\bar{G}_{ab}$. Entonces levantamos el índice en las Ecs. (108) y (109) con ayuda de (87):

$$\delta\bar{G}^{b}_{a} = \boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}] + \pounds_X G^{b}_{a}, \tag{110a}$$

$$\delta^{(2)}\bar{G}^{b}_{a} = \boldsymbol{\delta}\mathcal{G}^{b}_{a}[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}^{b}_{a}[\mathcal{H},\mathcal{H}] + 2\pounds_X\delta\bar{G}^{b}_{a} + \left(\pounds_Y - \pounds_X^2\right)G^{b}_{a}, \tag{110b}$$

donde se introdujeron las variables

$$\delta\mathcal{G}[A]^{b}_{a} \equiv^{(1)} \Sigma^{b}_{a}[A] - \frac{1}{2}\delta^{b(1)}_{a}\Sigma^{c}_{c}[A], \tag{111}$$

$$\delta^{(2)}\mathcal{G}[A]^{b}_{a} \equiv^{(2)} \Sigma^{b}_{a}[A,B] - \frac{1}{2}\delta^{b(2)}_{a}\Sigma^{c}_{c}[A,B], \tag{112}$$

$${}^{(1)}\Sigma^{b}_{a}[A] \equiv -2\nabla_{[a}H_{d]}{}^{bd}[A] - A^{cb}R_{ac} + \frac{1}{2}\left(2\nabla_{[e}H^{ed}_{d]}[A] + R_{ed}A^{ed}\right), \tag{113}$$

$${}^{(2)}\Sigma_a{}^b[A,B] \equiv 2R_{ad}B^{(b}_{c}A^{d)c} + 2H_{[a}{}^{de}[A]H_{d]}{}^{b}{}_{e}[B] + 2H^{de}_{[a}[B]H_{d]}{}^{b}{}_{e}[A]$$
$$+ 2A_e{}^d\nabla_{[a}H_{d]}{}^{be}[B] + 2B_e{}^d\nabla_{[a}H_{d]}{}^{be}[A] + 2A_c{}^b\nabla_{[a}H_{d]}{}^{cd}[B] + 2B_c{}^b\nabla_{[a}H_{d]}{}^{cd}[A]. \tag{114}$$

donde $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}[A]^{b}_{a}$, $\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}[A]^{b}_{a}$ son las partes invariantes de norma del tensor de Einstein a primer y segundo orden, respectivamente.

6.3.5. Perturbaciónes de la divergencia de un tensor $(1,1)$

Debido a la importancia de la identidad de Bianchi $\nabla^b\bar{G}_b{}^a = 0$, en esta sección la perturbación a primer y segundo orden de la divergencia de un tensor $(1,1)$ se calculará para un campo tensorial arbitrario $\bar{T}_a{}^b$. Luego de obtener las expresiones generales se mostrará que las identidades de Bianchi se cumplen orden a orden.

La divergencia de $\bar{T}_a{}^b$ se define como

$$\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a = \nabla_a\bar{T}_b{}^a + C^a{}_{ce}\bar{T}_b{}^c - C^c{}_{ba}\bar{T}_c{}^a. \tag{115}$$

Expandiendo en una serie de Taylor esta última ecuación,

$$\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\quad\left[\delta^{(k)}\left(\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a\right)\right]. \tag{116}$$

A orden lineal encontramos

$$\delta(\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a) = \nabla_a\bar{T}_b{}^a + (H_{ca}{}^a[\mathcal{H}] + \nabla_c\nabla_a X^a)T_b{}^c - (H_{bac}[\mathcal{H}] + \nabla_b\nabla_a X_c + R_{abc}{}^e X_e)T^{ca}, \tag{117}$$

Expandimos ahora a el campo tensorial $\bar{T}_a{}^b$ usando (10). Siguiendo las definiciones (64), definimos las perturbaciones invariantes de norma, $\mathcal{T}_b{}^a$, como sigue

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_b{}^a \equiv \delta\bar{T}_b{}^a - \pounds_X T_b{}^a, \tag{118}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_b{}^a \equiv \delta^{(2)}\bar{T}_b{}^a - 2\pounds_X\,\delta\bar{T}_b{}^a - \left(\pounds_Y - \pounds_X^2\right)T_b{}^a, \tag{119}$$

luego, usando (118) y la fórmula del apéndice (A2d), obtenemos la división de la parte invariante de norma de la divergencia de un tensor $(1,1)$:

$$\delta(\bar{\nabla}_a \bar{T}_b{}^a) = \nabla_a \boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_b{}^a + (H_{ca}{}^a[\mathcal{H}] + \nabla_c \nabla_a X^a) T_b{}^c - (H_{ba}{}^c[\mathcal{H}] T_c{}^a + \pounds_X \nabla_a T_b{}^a)\,. \tag{120}$$

Podemos verificar la validez de la identidad de Bianchi del tensor de Einstein a orden lineal perturbativo usando la Ec. (120) con $\bar{T}_b{}^a \to \bar{G}_b{}^a$:

$$\delta(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b{}^a) = \nabla_a \boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_b{}^a + (H_{ca}{}^a[\mathcal{H}] + \nabla_c \nabla_a X^a) G_b{}^c - (H_{ba}{}^c[\mathcal{H}] G_c{}^a + \pounds_X \nabla_a G_b{}^a)\,, \tag{121}$$

necesitamos la derivada de la parte invariante del tensor de Einstein (111)

$$\nabla_a \boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_b{}^a = -H_{ca}{}^a[\mathcal{H}] G_b{}^c + H_{ba}{}^c[\mathcal{H}] G_c{}^a \tag{122}$$

y sustituyéndola en (121) obtenemos la divergencia del tensor de Einstein a primer orden

$$\delta(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b{}^a) = \pounds_X \nabla_a G_b{}^a, \tag{123}$$

pero $\nabla_a G_b{}^a = 0$ en un espacio-tiempo arbitrario, entonces a primer orden $\delta\bar{\nabla}_a G_b{}^a = 0$.

La perturbación a segundo orden de la divergencia del tensor $\bar{T}_b{}^a$ se obtiene de manera similar que la divergencia a orden lineal,

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}(\bar{\nabla}_a \bar{T}_b{}^a) = {}& \nabla_a \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_b{}^a - (2H_{cad}[\mathcal{H}]\mathcal{H}^{da} - H_{ca}{}^a[\mathcal{L}]) T_b{}^c + (2H_{bad}[\mathcal{H}]\mathcal{H}^{dc} \\ & - H_{ba}{}^c[\mathcal{L}]) T_c{}^a - 2H_{ba}{}^c[\mathcal{H}]\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_c{}^a + 2H_{ca}{}^a[\mathcal{H}]\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_b{}^c + 2\pounds_X(\bar{\nabla}_a \bar{T}_b{}^a) + (\pounds_Y - \pounds_X^2)(\nabla_a T_b{}^b).\end{aligned} \tag{124}$$

Con esta expresión comprobaremos la identidad de Bianchi a segundo orden del tensor perturbado de Einstein

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b{}^a) = {}& \nabla_a \left(\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_b{}^a[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_b{}^a[\mathcal{H},\mathcal{H}]\right) - \left(2H_{cad}[\mathcal{H}]\mathcal{H}^{da} - H_{ca}{}^a[\mathcal{L}]\right) G_b{}^c \\ & + \left(2H_{bad}[\mathcal{H}]\mathcal{H}^{dc} - H_{ba}{}^c[\mathcal{L}]\right) G_c{}^a - 2H_{ba}{}^c[\mathcal{H}]\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_c{}^a[\mathcal{H}] + 2H_{ca}{}^a[\mathcal{H}]\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_b{}^c[\mathcal{H}] \\ & + 2\pounds_X(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b{}^a) + (\pounds_Y - \pounds_X^2)(\nabla_a G_b{}^a).\end{aligned} \tag{125}$$

Usando la Ec. (122) con el reemplazo $\mathcal{H} \to \mathcal{L}$ y calculando la divergencia del invariante de norma a segundo orden

$$\nabla_a \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_b{}^a[\mathcal{H},\mathcal{H}] = -2H_{ca}{}^a[\mathcal{H}]\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_b{}^c[\mathcal{H}] + 2H_{ba}{}^e[\mathcal{H}]\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_e{}^a[\mathcal{H}] - 2H_{bad}[\mathcal{H}]\mathcal{H}^{dc} G_c{}^a - 2H_{cad}[\mathcal{H}]\mathcal{H}^{ad} G_b{}^c, \tag{126}$$

observamos que la identidad de Bianchi se cumple a segundo orden también ya que $\bar{\nabla}_a \bar{G}_b{}^a = 0$ y $\nabla_a G_b{}^a = 0$.

6.3.6. *Ecuaciones de Einstein perturbadas invariantes de norma*

Por último escribiremos las ecuaciones de Einstein perturbadas $\delta^{(k)} G_a{}^b = 8\pi G\, \delta^{(k)} T_a{}^b$. Usando las definiciones (118) y (119) se puede mostrar que las ecuaciones de Einstein se pueden expresar orden por orden .en términos de variables invariantes de norma únicamente,

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}] = 8\pi G\, \boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_a{}^b, \tag{127a}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H},\mathcal{H}] = 8\pi G\, \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_a{}^b. \tag{127b}$$

6.4. Ecuaciones de Einstein invariantes de norma en el Universo FLRW

En esta sección aplicaremos las fórmulas recién deducidas al espacio-tiempo de ejemplo IV.

a. Tensor de energía-momento de un campo escalar. El tensor de energía momento de un campo escalar está dado por la fórmula (30), para obtener la ecuación perturbada debemos expandir al campo escalar en series de Taylor

$$\bar{\varphi} = \varphi + \lambda\delta\varphi + \frac{1}{2}\lambda^2 \delta^{(2)}\varphi + \mathcal{O}(\lambda^3), \tag{128}$$

donde $\varphi \equiv \varphi(\eta)$ es una función homogénea en un universo homogéneo e isotrópico. El tensor de energía momento también debe de ser descompuesto en la variadad de fondo

$$\bar{T}_a{}^b = T_a{}^b + \lambda\delta T_a{}^b + \frac{1}{2}\lambda^2 \delta^{(2)} T_a{}^b + \mathcal{O}(\lambda^3), \tag{129}$$

donde $\delta T_a{}^b$ es lineal en $\delta\varphi$ y h_{ab} y $\delta^{(2)}T_a{}^b$ incluye las perturbaciones de segundo orden $\delta^{(2)}\varphi$, l_{ab} y los productos cuadráticos de $\delta\varphi$ y h_{ab}. Sustituyendo (128) en (129) y preservando sólo los términos hasta orden cuadrático,

$$\delta T_a{}^b \equiv \nabla_a\varphi\nabla^b\delta\varphi - \nabla_a\varphi\, h^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\delta\varphi\nabla^b\varphi - \frac{1}{2}\delta_a{}^b\left(\nabla_c\varphi\nabla^c\delta\varphi - \nabla_c\varphi\, h^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\delta\varphi\nabla^c\varphi + 2\delta\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right), \tag{130a}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}T_a{}^b \equiv{}& \nabla_a\varphi\nabla^b\delta^{(2)}\varphi - 2\nabla_a\varphi\, h^{bc}\nabla_c\delta\varphi + \nabla_a\varphi\left(2h^{bd}h_d{}^c - l^{bc}\right)\nabla_c\varphi + 2\nabla_a\delta\varphi\nabla^b\delta\varphi - 2\nabla_a\delta\varphi h^{bc}\nabla_c\varphi \\ &+ \nabla_a\delta^{(2)}\varphi g^{bc}\nabla_c\varphi - \frac{1}{2}\delta_a{}^b\Bigg(\nabla_c\varphi\nabla^c\delta^{(2)}\varphi - 2\nabla_c\varphi\, h^{dc}\nabla_d\delta\varphi + \nabla_c\varphi\left(2h^{de}h_e{}^c - l^{dc}\right)\nabla_d\varphi \\ &+ 2\nabla_c\delta\varphi\nabla^c\delta\varphi - 2\nabla_c\delta\varphi h^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\delta^{(2)}\varphi\nabla^c\varphi + 2\delta^{(2)}\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi} + 2(\delta\varphi)^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\Bigg).\end{aligned} \tag{130b}$$

Siguiendo (64), se puede descomponer las perturbaciones del campo en su parte invariante y variable de norma:

$$\delta\varphi =: \boldsymbol{\varphi}^{(1)} + \pounds_X\varphi, \tag{131}$$

$$\delta^{(2)}\varphi =: \boldsymbol{\varphi}^{(2)} + 2\pounds_X\delta\varphi + (\pounds_Y - \pounds_X^2)\varphi, \tag{132}$$

donde $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\varphi}^{(2)}$ son las partes invariantes de norma a primer y segundo orden respectivamente.

Sustituyendo estas ecuaciones en las perturbaciones del tensor de energía-momento (130), y usando las descomposiciones de la métrica (54) y (63), llegamos a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_a{}^b ={}& \nabla_a\varphi\nabla^b\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - \nabla_a\varphi\mathcal{H}^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\nabla^b\varphi \\ &- \frac{1}{2}\delta_a{}^b\left(\nabla_c\varphi\nabla^c\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - \nabla_c\varphi\mathcal{H}^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\nabla^c\varphi + 2\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right),\end{aligned} \tag{133a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_a{}^b ={}& \nabla_a\varphi\nabla^b\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - 2\nabla_a\varphi\mathcal{H}^{bc}\nabla_c\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + 2\nabla_a\varphi\mathcal{H}^{bd}\mathcal{H}_{dc}\nabla^c\varphi - \nabla_a\varphi g^{bd}\mathcal{L}_{dc}\nabla^c\varphi + 2\nabla_a\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\nabla^b\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - 2\nabla_a\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\nabla^b\boldsymbol{\varphi}^{(1)} \\ &- 2\nabla_a\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\mathcal{H}^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\nabla^b\varphi - \frac{1}{2}\Bigg(\nabla_c\varphi\nabla^c\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - 2\nabla_c\varphi\mathcal{H}^{dc}\nabla_d\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + 2\nabla^c\varphi\mathcal{H}^{de}\mathcal{H}_{ec}\nabla_d\varphi - \nabla^c\varphi\mathcal{L}_{dc}\nabla^d\varphi \\ &+ 2\nabla_c\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\nabla^c\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - 2\nabla_c\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\mathcal{H}^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\nabla^c\varphi + 2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + 2(\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\Bigg).\end{aligned} \tag{133b}$$

Entonces, las componentes del tensor de energía-momento invariantes de norma del campo escalar a primer orden son:

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_\eta{}^\eta = -\frac{1}{a^2}\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 + a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{134a}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_i{}^\eta = -\frac{1}{a^2}\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi, \tag{134b}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_\eta{}^i = \frac{1}{a^2}\partial_\eta\varphi\left(\partial^i\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + (\partial_\eta\varphi)\nu^{i\,(1)}\right), \tag{134c}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{T}_i{}^j = \frac{1}{a^2}\delta_i{}^j\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 - a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{134d}$$

y a segundo orden,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_\eta{}^\eta = -\frac{1}{a^2}\Bigg(&\partial_\eta\varphi\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - 4\partial_\eta\varphi\Phi^{(1)}\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + 4(\partial_\eta\varphi)^2\left(\Phi^{(1)}\right)^2 - (\partial_\eta\varphi)^2\Phi^{(2)} \\ &+ (\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2 + \partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial^i\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + a^2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + a^2(\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\Bigg),\end{aligned} \tag{135a}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_i{}^{\eta} = -\frac{1}{a^2}\left(\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\partial_\eta\varphi + 2\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - 4\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\Phi^{(1)}\partial_\eta\varphi\right), \tag{135b}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_\eta{}^{i} = \frac{1}{a^2}\left(\partial_\eta\varphi\partial^i\boldsymbol{\varphi}^{(2)} + 4\partial_\eta\Phi^{(1)}\partial^i\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + (\partial_\eta\varphi)^2\,\nu^{i\,(2)} + 2\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial^i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{135c}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_i{}^{j} &= 2\frac{1}{a^2}\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial^j\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + \frac{1}{a^2}\delta_i{}^j\Bigg(\partial_\eta\varphi\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - 4\partial_\eta\varphi\Phi^{(1)}\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + 4\left(\partial_\eta\varphi\right)^2\left(\Phi^{(1)}\right)^2 \\ &\quad - \left(\partial_\eta\varphi\right)^2\Phi^{(2)} + \left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right)^2 - \partial_k\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial^k\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - a^2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} - a^2(\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\Bigg).\end{aligned} \tag{135d}$$

6.4.1. Ecuaciones de Einstein a primer orden

Antes de poder escribir las componentes de la ecuación (111) a primer orden debemos expresar las componentes de $H_{ab}{}^{c}$ dadas por la expresión (89):

$$H_{\eta\,\eta}{}^{\eta}[\mathcal{H}] = \partial_\eta\Phi^{(1)} \tag{136}$$

$$H_{i\,\eta}{}^{\eta}[\mathcal{H}] = \partial_i\Phi^{(1)} + \mathcal{H}\nu_i^{(1)} \tag{137}$$

$$H_{i\,j}{}^{\eta}[\mathcal{H}] = -\left(2\mathcal{H}\left(\Psi^{(1)} + \Phi^{(1)}\right) + \partial_\eta\Psi^{(1)}\right)\delta_{ij} - \partial_{(i}\nu_{j)}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\partial_\eta + 2\mathcal{H}\right)\chi_{ij}^{(1)} \tag{138}$$

$$H_{\eta\,\eta}{}^{i}[\mathcal{H}] = \partial^i\Phi^{(1)} + \left(\partial_\eta + \mathcal{H}\right)\nu^{i\,(1)} \tag{139}$$

$$H_{j\,\eta}{}^{i}[\mathcal{H}] = -\partial_\eta\Psi^{(1)}\delta_j{}^{i} + \frac{1}{2}\left(\partial_j\nu^{i\,(1)} - \partial^i\nu_j{}^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\partial_\eta\chi_j{}^{i\,(1)} \tag{140}$$

$$H_{j\,k}{}^{i}[\mathcal{H}] = \partial^i\Psi^{(1)}\delta_{kj} - 2\delta^i_{(k}\partial_{j)}\Psi^{(1)} - \mathcal{H}\delta_{kj}\nu^{i\,(1)} + \partial_{(j}\chi_{k)}{}^{i\,(1)} - \frac{1}{2}\partial^i\chi_{kj}{}^{(1)} \tag{141}$$

Usando estas ecuaciones y la Ec. (111), las componentes del tensor de Einstein invariante de norma a primer orden serán

$${}^{(1)}\mathcal{G}_\eta{}^{\eta}[\mathcal{H}] = -\frac{1}{a^2}\left\{(-6\mathcal{H}\partial_\eta + 2\triangle)\Psi^{(1)} - 6\mathcal{H}^2\Phi^{(1)}\right\}, \tag{142a}$$

$${}^{(1)}\mathcal{G}_i{}^{\eta}[\mathcal{H}] = -\frac{1}{a^2}\left(2\partial_\eta\partial_i\Psi^{(1)} + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(1)} - \frac{1}{2}\triangle\nu_i^{(1)}\right), \tag{142b}$$

$${}^{(1)}\mathcal{G}_\eta{}^{i}[\mathcal{H}] = \frac{1}{a^2}\left\{2\partial_\eta\partial^i\Psi^{(1)} + 2\mathcal{H}\partial^i\Phi^{(1)} + \frac{1}{2}(-\triangle + 4\mathcal{H}^2 - 4\partial_\eta\mathcal{H})\nu^{i\,(1)}\right\}, \tag{142c}$$

$$\begin{aligned}{}^{(1)}\mathcal{G}_i{}^{j}[\mathcal{H}] &= \frac{1}{a^2}\Bigg[\partial_i\partial^j\left(\Psi^{(1)} - \Phi^{(1)}\right) + \left\{(-\triangle + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(1)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \triangle)\Phi^{(1)}\right\}\delta_i{}^{j} \\ &\quad - \frac{1}{2a^2}\partial_\eta\left\{a^2\left(\partial_i\nu^{j\,(1)} + \partial^j\nu_i^{(1)}\right)\right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \triangle)\chi_i{}^{j\,(1)}\Bigg].\end{aligned} \tag{142d}$$

A continuación escribimos las componentes de las ecuaciones de Einstein linearizadas (127a) de FLRW lleno con un campo escalar (con perturbaciones lineales dadas por (134)), la componente $\eta - \eta$

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \triangle)\Psi^{(1)} - 3\mathcal{H}^2\Phi^{(1)} = 4\pi\,G\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 + a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{143}$$

las componentes $i - \eta$ y $\eta - i$ son iguales en virtud de (33)

$$\partial_\eta\partial_i\Psi^{(1)} + \mathcal{H}\partial_i\Phi^{(1)} - \frac{1}{4}\triangle\nu_i^{(1)} = 4\pi\,G\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi, \tag{144}$$

y por último la componente espacial-espacial es

$$\Bigg[\partial_i\partial^j\left(\Psi^{(1)}-\Phi^{(1)}\right)+\left\{(-\triangle+2\partial_\eta^2+4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(1)}+(2\mathcal{H}\partial_\eta+4\partial_\eta\mathcal{H}+2\mathcal{H}^2+\triangle)\Phi^{(1)}\right\}\delta_i{}^j$$
$$-\frac{1}{2a^2}\partial_\eta\left\{a^2\left(\partial_i\nu^{j\,(1)}+\partial^j\nu_i^{(1)}\right)\right\}+\frac{1}{2}(\partial_\eta^2+2\mathcal{H}\partial_\eta-\triangle)\chi_i{}^{j\,(1)}\Bigg]=8\pi G$$
$$\times\,\delta_i{}^j\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi-\Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2-a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right). \tag{145}$$

Podemos descomponer estas ecuaciones en sus modos escalares, vectoriales y tensoriales, siguiendo los mismos pasos que en la Sec. 4.2. Los modos escalares son

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta+\triangle)\Psi^{(1)}-3\mathcal{H}^2\Phi^{(1)}=4\pi G\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi-\Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2+a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{146}$$

$$\partial_\eta\partial_i\Psi^{(1)}+\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(1)}=4\pi G\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi, \tag{147}$$

$$(-\triangle+2\partial_\eta^2+4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(1)}+(2\mathcal{H}\partial_\eta+4\partial_\eta\mathcal{H}+2\mathcal{H}^2+\triangle)\Phi^{(1)}=8\pi G\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi-\Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2-a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{148}$$

$$\partial_i\partial^j\left(\Psi^{(1)}-\Phi^{(1)}\right)=0, \tag{149}$$

de esta última ecuación vemos que

$$\Psi^{(1)}=\Phi^{(1)}. \tag{150}$$

Usando las ecuaciones de Einstein de fondo, integrando con las apropiadas condiciones de frontera y usando repetidamente (32) y (33) llegamos a

$$(\triangle-3\mathcal{H}\partial_\eta-\partial_\eta\mathcal{H}-2\mathcal{H}^2)\Phi^{(1)}=4\pi G\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial\varphi+a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{151}$$

$$\partial_\eta\Phi^{(1)}+\mathcal{H}\Phi^{(1)}=4\pi G\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi, \tag{152}$$

$$(\partial_\eta^2+3\mathcal{H}\partial_\eta+\partial_\eta\mathcal{H}+2\mathcal{H}^2)\Phi^{(1)}=4\pi G\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi-a^2\frac{dV}{d\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right), \tag{153}$$

es importante notar que sólo dos de estas ecuaciones son independientes. Para los modos vectoriales tenemos

$$\triangle\nu^{i\,(1)}=0 \tag{154}$$

$$\partial_\eta\left\{a^2\left(\partial_i\nu^{j\,(1)}+\partial^j\nu_i^{(1)}\right)\right\}=0, \tag{155}$$

de donde podemos deducir que el campo escalar *no produce* perturbaciones vectoriales si la condición inicial no los incluye y finalmente, para los modos tensoriales

$$(\partial_\eta^2+2\mathcal{H}\partial_\eta-\triangle)\chi_{ij}{}^{(1)}=0. \tag{156}$$

Tomando las ecuaciones (151) y (153) podemos eliminar el término potencial del campo escalar

$$(\partial_\eta^2+\triangle)\Phi^{(1)}=8\pi G\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\varphi, \tag{157}$$

y si usamos (152) para eliminar $\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}$ de esta ecuación llegamos a

$$\left(\partial_\eta^2+2\left(\mathcal{H}-\frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\right)\partial_\eta-\triangle+2\left(\partial_\eta\mathcal{H}-\mathcal{H}\frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\right)\right)\Phi^{(1)}=0, \tag{158}$$

ecuación que es conocida como la *ecuación maestra* para la perturbación del modo escalar de las perturbaciones cosmológicas en un universo lleno con un único campo escalar.

6.4.2. Ecuaciones de Einstein a segundo orden

Para derivar las ecuaciones invariantes de norma de Einstein a segundo orden, (127b), es necesario contar con $\mathcal{L}_{ab}$, (78), y luego calcular $H_{ab}{}^{c}[\mathcal{L}]$, (89), $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}]$, (111), $\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H},\mathcal{H}]$, (127b), y por último $\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_a{}^b$, (135). Todos estos cálculos algebraicos son largos y tediosos, por eso, se creó una hoja de cálculo de Maple que se puede descargar en la dirección URL dada en el Apéndice D.

En el caso cosmológico regularmente se supone que las condiciones iniciales de las perturbaciones vectoriales y tensoriales a primer orden son cero, *i.e.*

$$\nu^{i\,(1)} = 0, \qquad \chi_{ij}{}^{(1)} = 0, \tag{159}$$

esto se puede justificar recordando (cf. 154) que a primer orden no hay generación de perturbaciones vectoriales, además, las perturbaciones vectoriales están suprimidas por un factor de a^{-2} (segunda ecuación (154)). Para justificar el despreciar el modo tensorial a primer orden usaremos el hecho que las observaciones del CMB indican que la relación escalar-tensor es mucho menor que la unidad. Esto simplificará mucho nuestras expresiones. Si se quisieran las expresiones completas (i.e. sin despreciar a primer orden los modos vectoriales y tensoriales), la hoja de cálculo de Maple del apéndice 6.4.2, se puede modificar fácilmente para obtenerlas.

Las expresiones para $H_{ab}{}^{c}[\mathcal{L}]$ y $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}]$ se obtienen de (136) y de (142) con los siguientes reemplazos:

$$\Phi^{(1)} \to \Phi^{(2)}, \quad \Psi^{(1)} \to \Psi^{(2)}, \quad \nu^{i\,(1)} \to \nu^{i\,(2)}, \quad \chi_{ij}{}^{(1)} \to \chi_{ij}{}^{(2)}, \tag{160}$$

entonces tenemos para $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}]$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{L}] = -\frac{1}{a^2}\left\{(-6\mathcal{H}\partial_\eta + 2\triangle)\Psi^{(2)} - 6\mathcal{H}^2\Phi^{(2)}\right\}, \tag{161a}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{L}] = -\frac{1}{a^2}\left(2\partial_\eta\partial_i\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(2)} - \frac{1}{2}\triangle\nu_i^{(2)}\right), \tag{161b}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{L}] = \frac{1}{a^2}\left\{2\partial_\eta\partial^i\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\partial^i\Phi^{(2)} + \frac{1}{2}(-\triangle + 4\mathcal{H}^2 - 4\partial_\eta\mathcal{H})\nu^{i\,(2)}\right\}, \tag{161c}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{L}] = \frac{1}{a^2}\Bigg[&\partial_i\partial^j\left(\Psi^{(2)} - \Phi^{(2)}\right) + \left\{(-\triangle + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(2)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \triangle)\Phi^{(2)}\right\}\delta_i{}^j \\ &- \frac{1}{2a^2}\partial_\eta\left\{a^2\left(\partial_i\nu^{j\,(2)} + \partial^j\nu_i^{(2)}\right)\right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \triangle)\chi_i{}^{j\,(2)}\Bigg].\end{aligned} \tag{161d}$$

Las componentes del tensor invariante de norma $\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H},\mathcal{H}]$ son

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^\eta = -\frac{2}{a^2}\left\{3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)} + 3(\partial_\eta\Phi^{(1)})^2 + 8\Phi^{(1)}\triangle\Phi^{(1)} + 12\mathcal{H}^2(\Phi^{(1)})^2\right\}, \tag{162a}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_i{}^\eta = \frac{4}{a^2}\left(4\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} - \partial_\eta\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)}\right), \tag{162b}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^i = \frac{4}{a^2}\left(\partial_\eta\Phi^{(1)}\partial^i\Phi^{(1)} + 4\Phi^{(1)}\partial_\eta\partial^i\Phi^{(1)}\right), \tag{162c}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_i{}^j = \frac{2}{a^2}\Bigg[&2\partial_i\Phi^{(1)}\partial^j\Phi^{(1)} + 4\Phi^{(1)}\partial_i\partial^j\Phi^{(1)} \\ &- \left(3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)} + 4\Phi^{(1)}\triangle\Phi^{(1)} + \left(\partial_\eta\Phi^{(1)}\right)^2 + 8\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_\eta\Phi^{(1)} + 4(2\partial_\eta\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)(\Phi^{(1)})^2\right)\delta_i{}^j\Bigg],\end{aligned} \tag{162d}$$

donde se usó $\Psi^{(1)} = \Phi^{(1)}$. Con las Ecs. (33) y (152) las ecuaciones de Einstein $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{H},\mathcal{H}] = 8\pi G\,\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_\eta{}^i$ y $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{H},\mathcal{H}] = 8\pi G\,\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_i{}^\eta$ se reducen a la ecuación

$$2\partial_\eta\partial_i\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(2)} - \frac{1}{2}\triangle\nu_i{}^{(2)} - 8\pi\,G\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\partial_\eta\varphi = \Gamma_i, \tag{163}$$

donde

$$\Gamma_i \equiv -4\partial_\eta\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} + 8\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} - 8\Phi^{(1)}\partial_\eta\partial_i\Phi^{(1)} + 16\pi\,G\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}. \tag{164}$$

De la misma manera usando (33) y (157) pero ahora con $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{H},\mathcal{H}] = 8\pi G\,\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_\eta{}^\eta$, obtenemos

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \triangle)\Psi^{(2)} + (-\partial_\eta\mathcal{H} - 2\mathcal{H}^2)\Phi^{(2)} - 4\pi\, G\left(\partial_\eta\varphi\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} + a^2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) = \Gamma_0, \tag{165}$$

donde Γ_0 es

$$\Gamma_0 \equiv -2\Phi^{(1)}\partial_\eta^2\Phi^{(1)} - 3\left(\partial_\eta\Phi^{(1)}\right)^2 - 3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)} - 10\Phi^{(1)}\triangle\Phi^{(1)} - 4(\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2)\left(\Phi^{(1)}\right)^2$$
$$+ 4\pi\, G\left(\left(\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\right)^2 + \partial_k\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial^k\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + a^2(\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right). \tag{166}$$

Por último con (33) y (157) pero ahora con $\boldsymbol{\delta}\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{L}] + \boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{H},\mathcal{H}] = 8\pi G\,\boldsymbol{\delta}^{(2)}\mathcal{T}_i{}^j$, llegamos a

$$\partial_i\partial_j\left(\Psi^{(2)} - \Phi^{(2)}\right) + \left\{(-\triangle + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(2)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 2\partial_\eta\mathcal{H} + 4\mathcal{H}^2 + \triangle)\Phi^{(2)}\right\}\delta_{ij}$$
$$- \frac{1}{a^2}\partial_\eta\left(a^2\partial_{(i}\nu_{j)}{}^{(2)}\right) + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \triangle)\chi_{ij}{}^{(2)} - 8\pi\, G\left(\partial_\eta\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - a^2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\delta_{ij} = \Gamma_{ij}, \tag{167}$$

donde

$$\Gamma_{ij} \equiv -4\partial_i\Phi^{(1)}\partial_j\Phi^{(1)}$$
$$-8\Phi^{(1)}\partial_i\partial_j\Phi^{(1)} + 16\pi\, G\partial_i\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial_j\boldsymbol{\varphi}^{(1)} + 2\Bigg(8\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_\eta\Phi^{(1)} - 2\Phi^{(1)}\partial_\eta^2\Phi^{(1)} + \left(\partial_\eta\Phi^{(1)}\right)^2 + 3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)}$$
$$+2\Phi^{(1)}\triangle\Phi^{(1)} + 4(\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2)\left(\Phi^{(1)}\right)^2 + 4\pi\, G\left((\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2 - \partial_k\boldsymbol{\varphi}^{(1)}\partial^k\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - a^2(\boldsymbol{\varphi}^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\right)\Bigg)\delta_{ij}. \tag{168}$$

Tomando la divergencia de (163) obtenemos su parte escalar

$$2\partial_\eta\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\Phi^{(2)} - 8\pi\, G\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\partial_\eta\varphi = \triangle^{-1}\partial^k\Gamma_k\,, \tag{169}$$

restándole esta ecuación a (163) obtenemos su parte vectorial

$$\nu_i{}^{(2)} = 2\triangle^{-1}\left\{\partial_i\triangle^{-1}\partial^k\Gamma_k - \Gamma_i\right\}. \tag{170}$$

Podemos dividir la ecuación (167) en la parte de traza (escalar), sin traza (escalar), vectorial y tensorial como sigue. Tomando la traza de (167) llegamos a

$$\left(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \frac{1}{3}\triangle\right)\Psi^{(2)} + \left(\mathcal{H}\partial_\eta + \partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \frac{1}{3}\triangle\right)\Phi^{(2)} - 4\pi\, G\left(\partial_\eta\varphi\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - a^2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{6}\Gamma_k{}^k, \tag{171}$$

donde $\Gamma_k{}^k \equiv \delta^{ij}\Gamma_{ij}$. La parte sin traza de (167) es

$$\Psi^{(2)} - \Phi^{(2)} = \frac{3}{2}\triangle^{-1}\left\{\triangle^{-1}\partial^i\partial_j\Gamma_i{}^j - \frac{1}{3}\Gamma_k{}^k\right\}, \tag{172}$$

con $\Gamma_i{}^j \equiv \delta^{kj}\Gamma_{ik}$. La parte vectorial de (167)

$$\partial_\eta(a^2\nu_i^{(2)}) = 2a^2\triangle^{-1}\left\{\partial_i\triangle^{-1}\partial^k\partial_l\Gamma_k{}^l - \partial_k\Gamma_i{}^k\right\}. \tag{173}$$

Nótese de las ecuaciones (173), (170) que aún estableciendo como las condiciones iniciales para las perturbaciones vectoriales iguales a cero, estas se generarán debido a las perturbaciones escalares a primer orden.

Finalmente, obtenemos la parte tensorial

$$(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \triangle)\chi_{ij}{}^{(2)} = 2\Gamma_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\Gamma_k{}^k - 3\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\triangle\right)$$
$$\times\triangle^{-1}\left(\triangle^{-1}\partial^k\partial_l\Gamma_k{}^l - \frac{1}{3}\Gamma_k{}^k\right) + 4\left\{\partial_{(i}\triangle^{-1}\partial_{j)}\triangle^{-1}\partial^l\partial_k\Gamma_l{}^k - \partial_{(i}\triangle^{-1}\partial^k\Gamma_{j)k}\right\}. \tag{174}$$

Es posible llegar a una *ecuación maestra* para el modo escalar de perturbación cosmológica de segundo orden para un universo lleno con un único campo escalar. Para lograrlo empezamos combinando (165) con (171), obteniendo

$$\left(\partial_\eta^2 - \mathcal{H}\partial_\eta + \frac{2}{3}\triangle\right)\Psi^{(2)} + \left(\mathcal{H}\partial_\eta + \frac{1}{3}\triangle\right)\Phi^{(2)} - 8\pi G\partial_\eta\varphi\partial_\eta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} = \Gamma_0 + \frac{1}{6}\Gamma_k{}^k, \tag{175}$$

y

$$\left(-\partial_\eta^2 - 5\mathcal{H}\partial_\eta + \frac{4}{3}\triangle\right)\Psi^{(2)} - \left(2\partial_\eta\mathcal{H} + \mathcal{H}\partial_\eta + 4\mathcal{H}^2 + \frac{1}{3}\triangle\right)\Phi^{(2)} - 8\pi G a^2\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \Gamma_0 - \frac{1}{6}\Gamma_k{}^k. \tag{176}$$

Manipulando (169), (171), (172), (175) y (176), se puede llegar a la *ecuación maestra* a segundo orden:

$$\begin{aligned}\left\{\partial_\eta^2 + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\right)\partial_\eta - \triangle + 2\left(\partial_\eta\mathcal{H} - \frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\mathcal{H}\right)\right\}\Phi^{(2)} &= -\Gamma_0 - \frac{1}{2}\Gamma_k{}^k + \triangle^{-1}\partial^i\partial_j\Gamma_i{}^j \\ + \left(\partial_\eta - \frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\right)\triangle^{-1}\partial^k\Gamma_k - \frac{3}{2}&\left\{\partial_\eta^2 - \left(2\frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi} - \mathcal{H}\right)\partial_\eta\right\}\triangle^{-1}\left\{\triangle^{-1}\partial^i\partial_j\Gamma_i{}^j - \frac{1}{3}\Gamma_k{}^k\right\}.\end{aligned} \tag{177}$$

El sistema final de 10 ecuaciones para la perturbación de segundo orden cosmológica para un Universo FLRW con campo escalar está compuesto por (169), (170), (172), (173), (174), (176) y (177). Se puede observar en este conjunto de ecuaciones que a pesar de que a primer orden las diferentes ecuaciones para los modos escalares, vectoriales y tensoriales no están acoplados, se acoplarán a segundo orden; además, a pesar de hacer las perturbaciones vectoriales y tensoriales a primer orden iguales a cero, el acople entre diferentes generará estas perturbaciones.

7. Conclusiones

En este artículo se discutieron las dificultades que aparecen en el análisis perturbativo de Relatividad General. En la discusión se identificó la raíz de este problema: el principio de covariancia general. Debido al principio de covariancia, es posible perturbar los ejes coordenados sin perturbar las variables físicas, y esta "perturbación coordenada" nublará los efectos físicos que se están buscando. Por lo tanto, un buen método perturbativo en Relatividad General elimina completamente estos grados de libertad espurios.

Una vez identificado el problema se presentó un lenguaje geométrico que permite plantear de una manera correcta el análisis perturbativo. Se mostraron tres métodos diferentes para eliminar los grados de libertad ficticios de la teoría perturbativa de Relatividad General: (a) eligiendo o fijando una norma, (b) el formalismo 1+3 covariante-invariante y (c) el formalismo invariante de norma. De los tres enfoques mostrados, se desarrolló en detalle el formalismo invariante de norma [51,53,54]. Se eligió desarrollar este formalismo por ser el más general de los tres ya que puede aplicar en espacios-tiempos generales y a teorías covariantes sin restringirse a Relatividad General si se cuenta con un procedimiento para extraer la parte invariante de la perturbación de la métrica a primer orden. Además, el formalismo invariante de norma cuenta con un algoritmo para generar perturbaciones invariantes de norma a cualquier orden superior al primero. Este formalismo fue aplicado como ejemplo al espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW) con un campo escalar.

Se incluye una hoja de cálculo en Maple para calcular las ECE invariantes de norma a primer y segundo orden para la métrica de FLRW usando el formalismo invariante de norma. Debido a la generalidad del formalismo invariante de norma, con pequeñas modificaciones se espera que pueda generar ecuaciones invariantes en otras métricas, suponiendo claro, que se tiene la descomposición de la perturbación de orden lineal de la métrica de fondo.

Agradecimientos

El autor desea agradecer al Profesor Marcelo Salgado, a César Merlín y a Francisco Nettel por sus esclarecedoras discusiones y sugerencias para presentar mejor este trabajo. También quisiera agradecer al Profesor Daniel Sudarsky por su apoyo, discusiones y guía. Este trabajo fue apoyado mediante una beca dada a través del proyecto PAPIIT DGAPA-UNAM IN119808 y por las Redes temáticas de investigación CONACyT "Red complejidad, Ciencia y Sociedad".

Apéndices

A. Fórmulas útiles

1.Derivada de Lie

$$\pounds_{t+u}W^a = \pounds_t w^a + \pounds_u w^a. \tag{A1a}$$

$$\pounds_{[v,w]}w^a = -\pounds_v^2 w^a. \tag{A1b}$$

$$\pounds_{v+w}^2 u^a = \left\{\pounds_v^2 + 2\pounds_v\pounds_w + \pounds_w^2\right\}u^a. \tag{A1c}$$

$$\begin{aligned}\pounds_X T_{abc}{}^d &= X^e\nabla_e T_{abc}{}^d + \nabla_a X^e T_{ebc}{}^d + \nabla_b X^e T_{aec}{}^d \\ &\quad + \nabla_c X^e T_{abe}{}^d - \nabla_e X^d T_{abc}{}^e.\end{aligned} \tag{A1d}$$

2. Conmutación entre la derivada covariente y la derivada de Lie

$$\nabla_a \pounds_X t_b = \pounds_X \nabla_a t_b + X^c R_{acb}{}^d t_d + t_c \nabla_a \nabla_b X^c. \tag{A2a}$$

$$\nabla_a \pounds_X t_{bc} = \pounds_X \nabla_a t_{bc} + X^d R_{adb}{}^e t_{ec} + X^d R_{adc}{}^e t_{be} + t_{dc} \nabla_a \nabla_b X^d + t_{bd} \nabla_a \nabla_c X^d. \tag{A2b}$$

$$\nabla_a \pounds_X t_b{}^c = \pounds_X \nabla_a t_b{}^c + X^d R_{adb}{}^e t_e{}^c - X^d R_{ade}{}^c t_b{}^e + t_d{}^c \nabla_a \nabla_b X^d - t_b{}^d \nabla_a \nabla_d X^c. \tag{A2c}$$

$$\begin{aligned}\nabla_a \pounds_X t_{bcd} &= \pounds_X \nabla_a t_{bcd} \\ &\quad + X^e R_{aeb}{}^f t_{fcd} + X^e R_{aec}{}^f t_{bfd} + X^e R_{aed}{}^f t_{bcf} + t_{ecd} \nabla_a \nabla_b X^e + t_{bed} \nabla_a \nabla_c X^e + t_{bce} \nabla_a \nabla_d X^e.\end{aligned} \tag{A2d}$$

$$\begin{aligned}\nabla_a \pounds_X t_{bc}{}^d &= \pounds_X \nabla_a t_{bc}{}^d \\ &\quad + X^e R_{aeb}{}^f t_{fc}{}^d + X^e R_{aec}{}^f t_{bf}{}^d - X^e R_{aef}{}^f t_{bc}{}^f + t_{ec}{}^d \nabla_a \nabla_b X^e + t_{be}{}^d \nabla_a \nabla_c X^e + t_{bc}{}^e \nabla_a \nabla_e X^d.\end{aligned} \tag{A2e}$$

B. Series de Taylor de Campos Tensoriales

Este apéndice y el siguiente están basados en el trabajo de Marco Bruni et al. [34].

Para funciones en $\mathbb{R}^m$, una expansión en series de Taylor es esencialmente una manera conveniente de expresar el valor de la función en un punto dado en términos de su valor y el valor de todas sus derivadas en otro punto. Por supuesto esta definición, tomada al pie de la letra, es imposible de llevar a cabo para un campo tensorial $\mathcal{T}$ en una variedad $\mathcal{M}$, simplemente por que $\mathcal{T}(p)$ y $\mathcal{T}(q)$ en $p, q \in \mathcal{M}$, con $p \neq q$ pertenecen a diferentes espacios y no pueden ser comparados directamente.

Una expansión de Taylor, por lo tanto, sólo puede ser escrita si se es dado un mapeo entre dos campos tensoriales en diferentes puntos de $\mathcal{M}$. El mapeo $\phi_\lambda : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es en general una *familia* uniparamétrica de difeomorfismos generados por el campo vectorial v^a. Un caso especial se da cuando el mapeo es un *grupo* uniparamétrico de difeomorfismos. En este apéndice consideremos la expansión de Taylor del *pull-back* de un tensor debido a un *grupo* uniparamétrico de difeomorfismos, como podría ser por ejemplo el mapeo exponencial. En el siguiente apéndice se tratará el caso más general de una familia uniparamétrica.

Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable y sea ξ un campo vectorial en $\mathcal{M}$, que genera un flujo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ donde $\phi(0,p) = p$, $\forall p \in \mathcal{M}$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ escribiremos $\phi_\lambda(p) \equiv \phi(\lambda, p) \quad \forall p \in \mathcal{M}$. Sea $\mathcal{T}$ un campo vectorial en $\mathcal{M}$. El mapeo ϕ^*_λ define un nuevo campo $\phi^*_\lambda \mathcal{T}$ llamado *pull-back* de $\mathcal{T}$, que es función de λ. Entonces en Ref. 34 se demuestra que

Lema B.1 *El campo $\phi^*_\lambda \mathcal{T}$ admite la expansión alrededor de $\lambda = 0$*

$$\phi^*_\lambda \mathcal{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \pounds^k_\xi \mathcal{T}. \tag{B1}$$

C. Difeomorfismos de caballo

Supóngase $\xi_{(1)}$ y $\xi_{(2)}$ en $\mathcal{M}$. Cada uno de ellos generan los flujos $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$. Al combinarlos podemos formar la familia uniparamétrica de difeomorfismos $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, cuya acción está dada mediante

$$\Psi_\lambda \equiv \phi^{(2)}_{\lambda^2/2} \circ \phi^{(1)}_\lambda \tag{C1}$$

Es decir, Ψ_λ desplaza un punto en $\mathcal{M}$ un intervalo λ a lo largo de las curva integral $\xi_{(1)}$ y un intervalo $\lambda^2/2$ a lo largo de la curva integral $\xi_{(2)}$. Por su similitud con el movimiento de la pieza de ajedrez se le llama *difeomorfismo de caballo*.

Esta definición se puede generalizar a n campos vectoriales $\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)}$ en $\mathcal{M}$, con flujos $\phi^{(1)}, ..., \phi^{(n)}$, de la siguiente manera

$$\Psi_\lambda \equiv \phi^{(n)}_{\lambda^n/n!} \circ ... \circ \phi^{(2)}_{\lambda^2/2} \circ \phi^{(1)}_\lambda. \tag{C2}$$

A los campos vectoriales $\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)}$ se les denominan como los *generadores* de Ψ.

Una cosa muy importante de notar es que $\Psi_\sigma \circ \Psi_\lambda \neq \Psi_{\sigma+\lambda}$, ya que los generadores no forman un grupo. Esto impide que podamos aplicar el lema B.1,, *i.e.* no podemos expandir el *pull-back* $\Psi^*_\lambda \mathcal{T}$ del tensor $\mathcal{M}$ definido $\mathcal{T}$. Pero como veremos en el siguiente lema, el resultado B.1 puede ser generalizado.

Lema C.1 El **pull-back** $\Psi^*_\lambda \mathcal{T}$ del campo tensorial $\mathcal{T}$ de la familia uniparamétrica de difeomorfismos de caballo Ψ con generadores $\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)}$ se puede expandir alrededor de $\lambda = 0$ como

$$\Psi^*_\lambda \mathcal{T} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{l_k=0}^{\infty} \cdots \frac{\lambda^{l_1+2l_2+\ldots+kl_k+\ldots}}{2^{l_2} \cdots (k!)^{l_k} \cdots l_1! l_2! \cdots l_k! \cdots} \pounds^{l_1}_{\xi_{(1)}} \pounds^{l_2}_{\xi_{(2)}} \cdots \pounds^{l_k}_{\xi_{(k)}} \cdots \mathcal{T}. \tag{C3}$$

Los difeomorfismos de caballo parecen ser ejemplos muy artificiales y de poca utilidad, pero como mostraremos en el siguiente teorema, cualquier familia uniparamétrica de difeomorfismos, puede siempre ser transformada o considerada como una familia uniparamétrica de difeomorfismos de caballo, de rango infinito en el caso general.

Teorema C.2 *Sea* $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ *una familia de difeomorfismos. Entonces* $\exists \phi^{(1)}, \ldots \phi^{(k)}, \ldots$, *grupos uniparamétricos de difeomorfismos en* $\mathcal{M}$, *tales que*

$$\Psi_\lambda = \cdots \circ \phi^{(k)}_{\lambda^2/k!} \circ \cdots \circ \phi^{(2)}_{\lambda^2/2} \circ \phi^{(1)}_\lambda .$$

La demostración de este teorema se encuentra en Ref. 34.

D. Código

El código que acompaña a este artículo ayuda a recuperar todos las expresiones presentadas en el caso de FLRW. Se proveen dos versiones ambas basadas en el lenguaje Maple, una es directa, *i.e.* sin utilizar ninguna paquetería extra y la segunda utilizando el paquete GRTensor II [56]. El código en ambas versiones se pueden encontrar en http://code.google.com/p/perturbacionesrelatividadgeneral/.

1. L. Lehner, Numerical relativity: a review. *Classical and Quantum Gravity* **18** (2001) R25. gr-qc/0106072.
2. M. Alcubierre, *Rev. Mex. Fis.* **53** (2007) 5.
3. L. Rezolla, A.M. Abrahams, R.A. Matzner, M.E. Rupright, and S.L. Shapiro, *Phys. Rev. D* (1999).
4. R.M. Wald. *General Relativity* (Chicago University Press, 1984).
5. B. Preston and E. Poisson, *Phys. Rev.* **D74** (2006) 064010. gr-qc/0606094.
6. K. Martel and E. Poisson, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 104003. gr-qc/0502028.
7. E. Poisson, *The Gravitational* (self-force. 2004). gr-qc/0410127.
8. E. Poisson, *Living Rev. Rel.* **7** (2004) 6. gr-qc/0306052.
9. M.J. Pfenning and E. Poisson, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 084001. gr-qc/0012057.
10. F.J. Burnell, R.B. Mann, and T. Ohta, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 134101. gr-qc/0208044.
11. T. Imai, T. Chiba, and H. Asada, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 201102. gr-qc/0702076.
12. G.F.R. Ellis and T. Buchert, *Phys. Lett.* **A347** (2005) 38. gr-qc/0506106.
13. J.P. Boersma, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 798. gr-qc/9711057.
14. R.M. Zalaletdinov, *BULL.ASTRON.SOC.INDIA* **25** (1997) 401. gr-qc/9703016v1.
15. V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215** (1992) 203.
16. R. Durrer, *J. Phys. Stud.* **5** (2001) 177. astro-ph/0109522.
17. R. Durrer, *Cosmological perturbation theory* (Technical report Université de Genéve, Département de Physique Théorique, Feb 2005).
18. N. Straumann, *Annalen Phys.* **15** (2006) 701. hep-ph/0505249.
19. E. Bertschinger, *Cosmological Perturbation Theory and Structure Formation* (2001) astro-ph/0101009.
20. K. Nakamura, *Second-order gauge invariant cosmological perturbation theory -einstein equations in terms of gauge invariant variables-* (May 2006). arXiv:gr-qc 0605108 v1
21. M.R. Nolta *et al.*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **180** (2009) 296.
22. X. Dupac, *Cosmology from Cosmic Microwave Background fluctuations with Planck* (2007). astro-ph/0701523.
23. C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman & Company, 1973).
24. R. d'Iverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, 1992).
25. J.D. Norton, *Rep. Prog. Phys.* **56** (1993) 791.
26. A. Macdonald, *American Journal of Physics* **69** (2001) 223.
27. M. Iftime and J. Stachel, *Gen. Rel. Grav.* **38** (2005) 1241.grqc/0512021v2.
28. M. Iftime, *Gauge and the hole argument* (2006). gr-qc/0612141.
29. J. Norton, *The hole argument* (In Edward N. Zalta, editor, The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Winter 2008).
30. A. Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory* (Methuen, 1952).
31. G.F.R. Ellis and D.R. Matravers, *General Relativity and Gravitation* **27** (1995) 777.
32. J.M. Stewart and M. Walker, *Proc. Roy. Soc. Series A* **341** (1974) 49.
33. S. Carroll, *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity.* (Addison Wesley, 2004).
34. M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach, and S. Sonego, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997) 2585.
35. N. Straumann, *Proof of a decomposition theorem for symmetric tensors on spaces with constant curvature* (2008). 0805.4500v1.
36. E. Lifshitz, *J. Phys. (USSR)* **10** (1946) 116.
37. E. Bertschinger, *Cosmological dynamics: Course 1* (1993). astro-ph/9503125.
38. J.M. Bardeen, *Physical Review D* **22** (1980) 1882.
39. P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1993).

40. U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469** (1996) 437. astro-ph/9603033.

41. V.F. Mukhanov, *Zhurnal Eksperimental noi i Teoreti- cheskoi Fiziki* **94** (1988) 1.

42. K.A. Malik and D. Wands, *Cosmological perturbations* 0809 (2008) 4944.

43. G.F.R. Ellis, *General relativity and cosmology. In R.K. Sachs, editor,General Relativity and Cosmology* (Academic Press, 1971).

44. M. Bruni, P.K.S. Dunsby, and G.F.R. Ellis, *ApJ.* **395** (1992) 32.

45. G.F.R. Ellis and H. van Elst, *Cosmological models* 1 (1999) 116. arXiv:gr-qc/9812046v4.

46. K. Enqvist, J. Hogdahl, S. Nurmi, and F. Vernizzi, *Phys. Rev. D75* (2007) 023515. gr-qc/0611020.

47. J. Wainwright and G.F. Rayner Ellis, *Dynamical Systems in Cosmology* (Cambridge University Press, 1997).

48. G.F.R. Ellis, and M. Bruni, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 1804.

49. G.F.R. Ellis, J. Hwang, and M. Bruni, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 1819.

50. M. Bruni, L. Gualtieri, and C.F. Sopuerta, *Class. Quantum Grav.* **20** (2003) 535.

51. K. Nakamura, *Prog. of Theo. Phys.* **110** (2003) 723. arXiv:gr-qc/0303090v4.

52. K. Nakamura, *Prog. of Theo. Phys.* **113** (2005) 481.

53. K. Nakamura, *Short note on second-order gauge-invariant cosmological perturbation theory* (2006). gr-qc/0612040.

54. K. Nakamura, *Consistency relations between the source terms in the second-order Einstein equations for cosmological perturbations* (2009) 0901.3638.

55. Kouji Nakamura, *Inclusion of the first-order vector- and tensor-modes in the second-order gauge-invariant cosmological perturbation theory* (2009) 0901.3635.

56. GRTensor II. http://grtensor.phy.queensu.ca/.

57. I. Ciufolini and J.A. Wheeler, *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press, 1995).

58. En el idioma original: “Space acts on matter, telling it how to move. In turn, matter reacts back on space, telling it how to curve” [23], pag. 5.

59. En realidad de las *partículas de prueba*, definidas como aquellas partículas que sienten el efecto del campo gravitacional pero no lo afectan de manera alguna.

60. Para ser más precisos, esta enunciación es conocida como el *principio de equivalencia débil o Galileano*. Existen otras dos formas conocidas del este principio, una de ellas la Einsteniana o semi-fuerte es: “Para cada evento del espacio-tiempo, existe una vecindad lo suficientemente pequeña tal que, en cualquier marco local, en caída libre en esa vecindad, todas las leyes no gravitacionales de la física, obedecen las leyes de la relatividad especial”. Si cambiamos en esta última expresión “todas las leyes no gravitacionales” por “todas las leyes de la física” obtenemos el *principio de equivalencia fuerte*. Ver Ref. 57.

61. Este principio es identificado en la literatura con la regla heurística “*comma-goes-to-semicolon*”, es decir, de las ecuaciones no relativistas sustituir las derivadas (representadas con comas) por derivadas covariantes (representadas por puntos y comas) para obtener la versión relativista, además de sustituir $\eta_{\mu\nu}$ con $g_{\mu\nu}$.

62. Por ejemplo, en Ref 24 menciona el *principio de Mach* –en realidad el principio de Mach está determinado por tres enunciados: (1) La distribución de materia determina la geometría, (2) Si no hay materia no hay geometría y (3) Un cuerpo en un universo vacío, no posee propiedades inerciales– dentro de los principios fundamentales, aunque reconoce que quizá sólo sirva como principio guía para la formulación de Relatividad General.

63. Como ejemplo, la expresión del *principio de equivalencia* es diferente en Refs. 4, 23 y 24; en [57 pags. 13-15] se mencionan tres variantes distintas de este principio.

64. Originalmente, Einstein expresó este argumento usando sistemas de coordenadas, de la siguiente manera, Sea $G(x)$ el tensor métrico que satisface las ECE en el sistema de coordenadas x y $G'(x')$ representa el mismo campo gravitacional en el sist. coordenado x'. Si suponemos covariancia general, entonces $G(x')$ (piénsese este cambio de coordenadas, únicamente en el sentido matemático, *i.e.* el cambio de $x \to x'$ no cambia el significado funcional de G, pero podríamos interpretarlo como un nuevo campo en x'). A partir de esto, se puede demostrar que no hay manera de especificar la métrica afuera y en la frontera de un “agujero” pude determinar el campo dentro del agujero. Invalidando así, la utilidad de las ECE. Aunque Einstein planteó este argumento, como un problema de frontera, Hilbert lo planteó, como un problema de valores iniciales [25], relacionándolo así con el *Problema de Cauchy* de Relatividad General [4].

65. El problema de valores iniciales en Relatividad General es un tema de alta complejidad matemática, el lector interesado puede introducirse al tema en [4, cap. 10].

66. Einstein se defendió diciendo que el argumento de Kretschmann era falso, poniendo como ejemplo la teoría gravitacional de Newton ya que no podía escribirse de manera covariante. Poco tiempo después Cartan, escribió la teoría newtoniana en forma covariante [23].

67. Esta restricción no afectará las ecuaciones importantes del formalismo invariante de norma, ver Sec. 7

68. Nótese que $\delta^{(0)}\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}_0$ y $\delta^{(1)}\mathcal{Q} = \delta\mathcal{Q}$

69. El nombre –claramente inapropiado– de *constante de Hubble* se reserva para el valor del parámetro de Hubble evaluado en este evento espacio-temporal (hoy, ahora), $H_0 \equiv H(t)$.

70. A veces en la literatura se denominan como variables de espín-0, espín-1 y espín-2, respectivamente.

71. Se agregó el factor de a^2 para simplificar cálculos más adelante.

72. Es conveniente decir en este punto que la *nomenclatura* de los símbolos con los cuales identificamos las perturbaciones dista de ser la estándar (salvo en el caso del $3-$tensor, h^{TT}), de hecho no hay acuerdo en la literatura sobre como nombrar a las variables. En este artículo sigue las de [53].

73. Para mayor claridad sobre este punto y las condiciones de frontera apropiadas véase la discusión abajo de la Ec. (77).

74. Esta característica *es cierta solo a primer orden* ya que a segundo orden todas las cantidades estarán acopladas, ver más adelante.

75. El que los observadores comóviles sigan geodésicas se puede comprobar usando la ecuación geodésica [la fórmula está en 4, pags. 46-47] con las condiciones de esta norma, llegando a que $u^i = 0$ es una geodésica.

76. Ignorar las perturbaciones vectoriales y tensoriales a segundo orden es inconsistente ya que, aún haciendo las perturbaciones vectoriales y tensoriales iniciales iguales a cero a primer orden, las perturbaciones a segundo orden servirán como fuente de estas perturbaciones lineales.

77. Esta situación es análoga a hacer en electrodinámica $\vec{A} = 0$.

78. Es importante mencionar que la expansión armónica depende fuertemente no solamente de las simetrías locales del espacio-tiempo de fondo, si no también en la topología global de la subvariedad en la cual los armónicos escalares, vectoriales y tensoriales son definidos [51].