

Formas de equilibrio de gotas que emergen lentamente de cilindros de pared gruesa

A. López-Villa

Coordinación del Posgrado, Instituto Mexicano del Petróleo,
Eje Central Lázaro Cárdenas No. 152, Col. Atepehuacan, 07730, México, D.F., México.

A. Pérez-Terrazo y G.J. Gutierrez

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica-Sección de Estudios de Posgrado e Investigación,
Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional,
Av. de las Granjas 682, Col. Santa Catarina, Azcapotzalco D.F., 02250, México

C.A. Vargas

Laboratorio de Sistemas Complejos, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, México D.F., 02200, Mexico.

Recibido el 7 de diciembre de 2010; aceptado el 24 de mayo de 2011

Se calculan las formas de equilibrio de gotas que emergen lentamente hacia el exterior de tubos verticales de pared gruesa justo antes de su ruptura. A bajos gastos es posible calcular las formas de las gotas a partir del balance entre las presiones hidrostática y de inyección y la presión capilar. Se encuentran varias soluciones analíticas de las formas de las gotas correspondientes a diversos límites asintóticos de la ecuación de balance. Otras formas de equilibrio también son calculadas a través de la solución numérica de la ecuación de Young-Laplace. El acuerdo entre los experimentos cualitativos y los resultados teóricos validan este trabajo. Se muestra que la formación de gotas depende finalmente del número de Bond, de la presión de inyección y del valor del ángulo de contacto.

Descriptores: Gotas; efectos capilares; interacción con superficies.

The equilibrium shapes of the drops that emerge slowly outside of vertical, thick-walled tubes were calculated. For low flow rates it is possible to calculate the shape of drops by using the balance equation between the hydrostatic and the capillary pressure. Asymptotic solutions of the balance equation were found in terms the drop shapes just before of their rupture. Other equilibrium shapes are also calculated through the numerical solution of the Young-Laplace equation. The qualitative agreement between experiments and theoretical results validate this work. As a result, it is found that the sizes and shapes of drops depend on the Bond number, the injection pressure and the value of the contact angle.

Keywords: Drops; capillary effects; interaction with surfaces.

PACS: 47.55.D-; 47.55.nb; 47.55.dr

1. Introducción

La formación de gotas es un fenómeno muy común el cual, cuando se realiza de forma controlada, tiene enormes consecuencias prácticas [1, 2]. Una de ellas es que la caracterización de la forma de una gota puede ser muy útil para cuantificar propiedades importantes como la tensión superficial, σ [2-4], o el ángulo de contacto estático, θ , que se forma entre la zona interior del líquido y la superficie del sustrato [1, 5]. Se dice que el líquido moja bien a una superficie sólida cuando $\theta < \pi/2$ y se tiene un mal mojado sí $\theta \geq \pi/2$ (ver Fig. 1) [1, 2, 6].

En este trabajo se presenta un estudio teórico y experimental de las formas de equilibrio de gotas de líquido que emergen de forma axisimétrica, a muy bajo gasto, Q , de tubos cilíndricos verticales de pared gruesa. Este método nos permite un cálculo exacto de las características de las gotas durante su formación de manera cuasiestática y en condiciones ideales. En consecuencia, las superficies de las gotas son suaves y no presentan inhomogeneidades, y no hay histéresis en el ángulo de contacto, porque el gasto se considera tan bajo que una nueva forma de gota formada a un ángulo θ no

depende de la forma de otra formada bajo el ángulo $\theta + \Delta\theta$ o $\theta - \Delta\theta$. Formalmente, para un líquido viscoso la condición de bajo gasto puede expresarse como el caso en el que el número capilar $Ca \rightarrow 0$. El número capilar es una medida de la

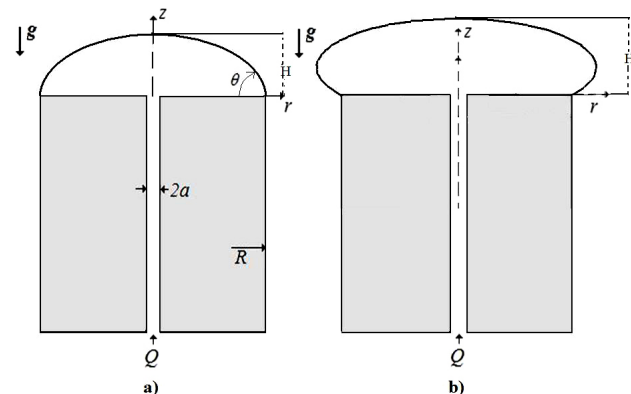


FIGURA 1. Esquema de la forma de una gota emergiendo hacia arriba en un tubo de pared gruesa: (a) gota con buen mojado (ángulo de contacto menor que $\pi/2$) y (b) gota con mal mojado (ángulo de contacto mayor que $\pi/2$).

magnitud de las fuerzas viscosas respecto a las fuerzas de tensión superficial y está dado por $Ca = \mu Q / \sigma a^2$, donde μ es la viscosidad dinámica del líquido y a es el radio interior del tubo a través del cual se realiza la inyección del líquido. Cuando el líquido, de densidad ρ , se considera como no viscoso el gasto adimensional se expresa en función del número de Weber, $We = \rho Q^2 / \sigma a^3$, el número de Weber es el cociente de las energía cinética a la energía superficial. En este caso la condición de bajo gasto se da cuando $We \rightarrow 0$.

Es importante mencionar qué aspectos importantes como la formación de gotas a gastos altos y la formación de chorros [1, 7, 8], no serán considerados en este trabajo, aunque los resultados aquí obtenidos pueden ser considerados como límites asintóticos de tales procesos en los casos viscoso y no viscoso cuando $Ca = 0$ o $We = 0$, respectivamente. También es importante decir que el análisis de la singularidad de contracción o rompimiento de la gota, queda fuera del alcance de este trabajo debido a su complejidad.

Aquí se discuten diversas peculiaridades de las formas de las gotas en función del número de Bond, $Bo = \rho g a^2 / \sigma$, donde g es la aceleración de la gravedad y a es el radio interior del tubo, del ángulo de contacto estático θ y de la presión de inyección. El número de Bond es el cociente de la presión hidrostática a la presión capilar. Si $Bo > 1$ dominan los efectos gravitacionales sobre los capilares, mientras que si $Bo < 1$, ocurre lo inverso. Al ser ambas superficies libres, en el régimen cuasiestático de bajos gastos el estudio de las gotas es muy similar al de las burbujas [5, 9–14], por eso se espera que θ juegue un papel muy importante en el proceso de formación de gotas, como es bien sabido que ocurre en la formación de burbujas [15].

Hay poco trabajo relacionado con el problema de la forma de la gota cuando ésta emerge de tubos de pared gruesa [16]. El ángulo que adquiere la gota cuando emerge de la parte superior de un tubo y alcanza el borde de éste es el ángulo de contacto estático. Sin embargo, incrementos de la presión de inyección lleva a que este ángulo aumente hasta un valor máximo $\theta + \pi/2$ justo antes de romperse, esto no pasa en el caso de una gota que emerge en dirección a favor de la fuerza de gravedad. Cuando la gota emerge desde abajo los valores de los ángulos no cambian, ésto será discutido con cuidado más adelante.

Para lograr el propósito de determinar las formas de equilibrio de gotas bajo estas condiciones la división de este trabajo es como sigue: en la siguiente sección se plantea el problema y se formulan las ecuaciones para la superficie libre de la gota. Después, en la Sec. 3 se escriben las ecuaciones de forma adimensional y en la Sec. 4 se resuelven varios casos asintóticos interesantes. En la Sec. 5 se calculan numéricamente varios perfiles de gotas y en la Sec. 6 se comparan estos perfiles con perfiles obtenidos en experimentos cualitativos. Finalmente, en la Sec. 7 se dan las principales conclusiones y resultados de este estudio.

2. Formulación del problema

Considérese una gota que emerge, ya sea en la parte superior o en la parte inferior de un tubo vertical de pared gruesa. La gota se genera a un gasto muy bajo de manera que, en primera aproximación, la forma de la gota se puede describir a través de una ecuación de balance entre las presiones hidrostática y de inyección y la presión capilar, es decir, en estas condiciones la gota permanecerá en equilibrio y con la misma forma. En este caso la descripción de la forma de la gota puede hacerse a partir de la ecuación de Young-Laplace [1, 2, 6, 9, 10]. En el análisis aquí presentado, se consideran los casos donde el mojado puede ser bueno ($\theta < \pi/2$) o malo ($\theta \geq \pi/2$).

Un esquema del problema de la inyección lenta de un líquido en un cilindro de pared gruesa de radio exterior $R = a + d$ se da en la Fig. 1. En la superficie de la gota la presión capilar, p_c , debe de ser igual a la suma de la presión de inyección del líquido, p_0 , la presión hidrostática, $\rho g z$, y la presión atmosférica, p_a [1], es decir,

$$p_c = p_0 - \rho g z - p_a. \tag{1}$$

Nótese que la presión de inyección del líquido, debe ser mayor que la presión hidrostática, *i.e.*, $p_0 > \rho g z$. El uso de esta condición permitirá que la gota crezca.

Recordando que $p_c = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n}$ [17, 18], donde \mathbf{n} es un vector unitario normal a la superficie exterior de la gota, y haciendo $P = p_0 - p_a$, se tiene que la ecuación diferencial para la superficie libre, en coordenadas cilíndricas (ver Fig. 1), es

$$\sigma \left(\frac{\frac{d^2 z}{dr^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\frac{dz}{dr}}{r \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{1/2}} \right) = P - \rho g z, \tag{2}$$

la cual debe de resolverse bajo las condiciones de frontera

$$\text{en } r = 0 : z = H \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dr} = 0, \tag{3}$$

$$\text{en } r = R : z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dr} = \frac{1}{\tan \theta}, \tag{4}$$

H es la altura máxima que alcanza la gota antes de su ruptura.

La formulación de este problema es válida para los casos de buen y mal mojado. En la Fig. 1(b) se aprecia el caso de una gota que emerge en la parte superior de un tubo de pared gruesa, justo antes de su ruptura.

A partir de la Fig. 1(b) es fácil notar que el perfil de la gota, $z(r)$, puede no ser una función, es decir, que para una misma posición (r, θ) pueden existir dos valores de z en el caso de mal mojado. Así, la descripción del perfil de la gota debe hacerse en términos de $r(z)$ en donde aún en el caso de mal mojado esta función es unívoca. Más aún, recordando que $dz/dr = 1/(dr/dz)$ y que $d^2 z/dr^2 = -(d^2 r/dz^2)(dr/dz)^3$, se encuentra que la Ec. (2) y sus condiciones de frontera (3) y (4) se transforman, respectivamente, en

$$\sigma \left(-\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{r \left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{1/2}} \right) = P - \rho g z, \quad (5)$$

en $z = H : r = 0$ y $\frac{dr}{dz} \rightarrow \infty,$ (6)

en $z = 0 : r = R$ y $\frac{dr}{dz} = \tan \theta.$ (7)

De manera general, el volumen de líquido contenido en la gota, V , se determina mediante la integral

$$\int_0^H \pi r^2(z) dz = V. \quad (8)$$

3. Ecuaciones adimensionales

La adimensionalización de las ecuaciones se hace usando el radio exterior del tubo, R , y la altura máxima de la gota, H , de manera que $\xi = r/R$ y $\zeta = z/H$, esto lleva a la ecuación diferencial adimensional

$$-\frac{\frac{d^2\xi}{d\zeta^2}}{Bo \left[\left(\frac{H}{R}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{Bo\xi \left[\left(\frac{H}{R}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)^2 \right]^{1/2}} = p - \zeta, \quad (9)$$

donde $p = P/\rho g H$. Las condiciones de frontera adimensionales son ahora

en $\zeta = 1 : \xi = 0$ y $\frac{d\xi}{d\zeta} \rightarrow \infty,$ (10)

en $\zeta = 0 : \xi = 1$ y $\frac{d\xi}{d\zeta} = \tan \theta,$ (11)

y el volumen adimensional dado por la Ec. (8), toma la forma

$$\int_0^1 \xi^2(\zeta) d\zeta = \frac{V}{\pi R^3}. \quad (12)$$

Se debe notar que los valores del ángulo de contacto pueden variar en el intervalo $[\theta, \pi/2 + \theta]$ [16], el ángulo máximo es originado por la presión de inyección y adquiere este valor justo antes del derrame de la gota.

Nótese que la Ec. (9) es una ecuación diferencial altamente no lineal. En la siguiente sección se presentan soluciones en algunos límites asintóticos de interés.

4. Soluciones asintóticas

4.1. Solución asintótica para $Bo \ll 1$

Un caso importante de la formación de gotas, y posible de analizar de forma analítica a través de la Ec. (9), ocurre cuan-

do $Bo \ll 1$, *i.e.*, los efectos capilares dominan sobre los gravitatorios. En este caso la ecuación diferencial resultante, obtenida a partir de la Ec. (9), es

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} = \frac{1}{\xi} \left[\left(\frac{H}{R}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)^2 \right], \quad (13)$$

la soluciones de esta última ecuación, que obedecen las condiciones de frontera (10) y (11), son esferas de la forma

$$\xi = \sqrt{\left(\frac{H}{R} - \tan \alpha\right)^2 - (\zeta - \tan \alpha)^2}, \quad (14)$$

donde $\alpha = \theta - \pi/2$.

En la Fig. 2 se muestran los perfiles de estas gotas para casos de mal y buen mojado, respectivamente, y la condición de que emerjan desde arriba o desde abajo no juega un papel importante ya que el número de Bond no aparece explícitamente en la solución. Esto físicamente es correcto ya que cuando la gota es muy pequeña o la gravedad es muy débil, las gotas siempre son secciones de esferas, en lado superior izquierdo de la Fig. 2 aparece la altura máxima H que alcanza la gota, aquí $R = 1$ aunque las ecuaciones son para cualquier valor de R .

Dada una condición de mojado de la gota sobre el tubo, es decir, dado el ángulo de contacto, se obtiene la ecuación del perfil de la gota y, consecuentemente, su volumen. La sustitución de la Ec. (14) en la (12) permite calcular la integral numéricamente y así conocer el volumen en función del ángulo de contacto. En la Fig. 3 se aprecia que el volumen adimensional V/R^3 de la gota crece de manera importante cuando el ángulo de contacto crece.

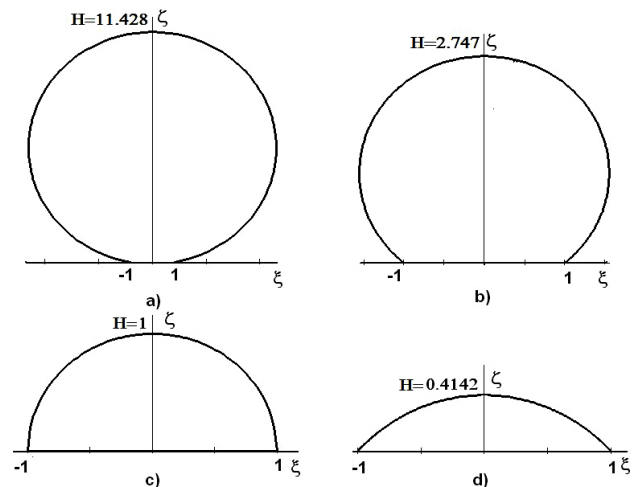


FIGURA 2. Perfiles adimensionales de gotas con forma esférica: los casos son $\theta=170^\circ$, 140° , 90° y 45° que corresponden a a), b), c) y d).

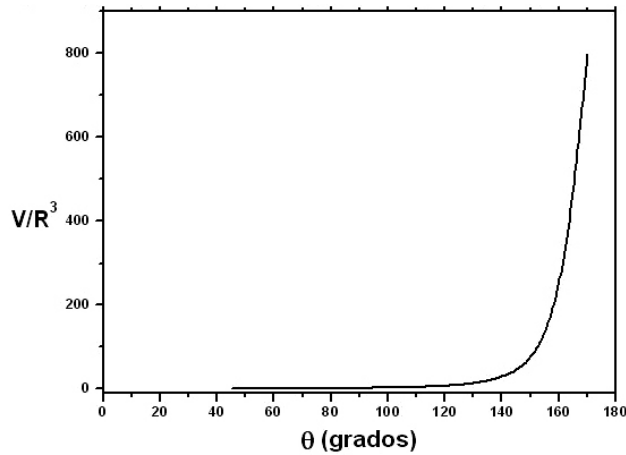


FIGURA 3. Volumen máximo adimensional V/R^3 de una gota esférica como función del ángulo de contacto.

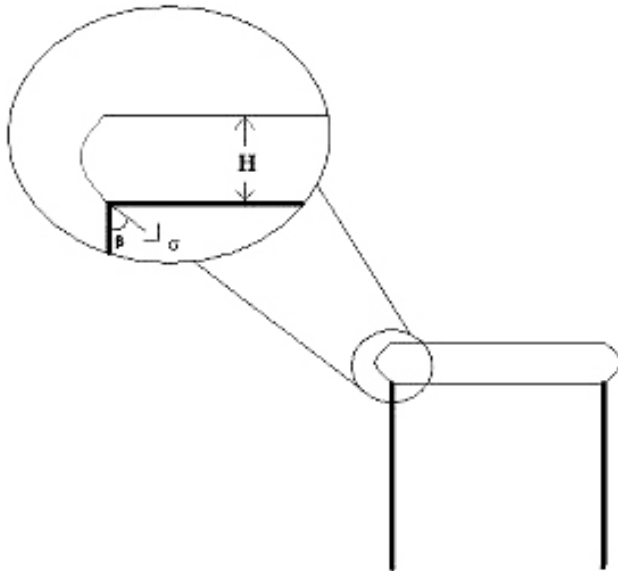


FIGURA 4. La figura muestra una ampliación de una gota saliendo en la parte superior del tubo y con un $Bo \gg 1$.

4.2. Solución asintótica para $Bo \gg 1$ y $H/R \ll 1$

El segundo caso de interés aparece cuando $Bo \gg 1$, es decir, los efectos gravitatorios dominan sobre los capilares y además, debido a esto, $H/R \ll 1$ (la gota se aplasta mucho). En este caso todo el lado izquierdo de la Ec. (9) se puede despreciar y esto lleva a la ecuación

$$\zeta = p. \tag{15}$$

La Ec. (15) describe el perfil de una gota muy plana de altura adimensional igual a la presión adimensional p , la Fig. 4 muestra esquemáticamente la forma que debe tomar la gota bajo estas condiciones. El acercamiento a la orilla del perfil de la gota permite definir los parámetros importantes en el análisis de las fuerzas que actúan y deforman la gota hasta llegar a la forma que se describe.

A partir de la Fig. 4 se observa que una fuerza por unidad de longitud que actúa sobre la gota es causada por la presión hidrostática que tiende a expandirla lateralmente. Integrando esta fuerza desde la base de la boquilla hasta la altura máxima de la gota H , se tiene que

$$\int_0^H \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g H^2. \tag{16}$$

Para que el perfil de la gota esté en equilibrio, esta fuerza debe ser igual a una fuerza por unidad de longitud que limita la expansión de la gota. Tal fuerza es de la forma $\sigma \cos \beta + \sigma$ (ver Fig. 4). Cabe mencionar que $\beta = \pi - \theta$ o bien $\beta = \theta$, dependiendo, respectivamente, de si la gota no moja o moja. Finalmente el balance de fuerzas lleva a una ecuación de la forma

$$\frac{1}{2} \rho g H^2 = \sigma \cos \beta + \sigma, \tag{17}$$

y reorganizando términos se llega a la ecuación adimensional para la altura de la gota cuya forma es

$$\frac{H}{R} \sim 2 \sqrt{\frac{\cos \beta + 1}{Bo}}. \tag{18}$$

De la Ec. (18) se puede ver que la altura máxima H es función del ángulo θ y del número de Bond. Dado que $Bo \gg 1$ y $\cos \beta \leq 1$ se tiene $H/R \ll 1$. Lo anterior se puede comprobar con valores altos del número Bond y diferentes ángulos de contacto. Los resultados experimentales se van a mostrar en las secciones que siguen.

4.3. Solución asintótica para buen mojado ($d\zeta/d\xi \ll 1$)

En el caso de buen mojado, es decir, cuando la pendiente de la función $\zeta(\xi)$ es muy pequeña, ocurre que $d\zeta/d\xi \ll 1$ y consecuentemente $(d\zeta/d\xi)^2 \ll 1$.

Para simplificar el cálculo, se reescribe la Ec. (2) bajo estas nuevas condiciones, ello conduce a la ecuación adimensional

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\zeta}{d\xi} = Bo(p - \zeta), \tag{19}$$

en donde las condiciones de frontera son ahora

$$\text{en } \xi = 0 : \zeta = H/R \text{ y } \frac{d\zeta}{d\xi} = 0, \tag{20}$$

$$\text{en } \xi = 1 : \zeta = 0 \text{ y } \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1}{\tan \theta}. \tag{21}$$

La solución de la Ec. (19) es

$$\zeta(\xi) = pBo - \frac{1}{I_1(1) \tan \theta} (1 - I_0(\xi)), \tag{22}$$

donde I_0, I_1 son, respectivamente, funciones de Bessel modificadas de orden cero. Ésta solución corresponde a una gota que emerge de la parte superior del tubo.

Para el caso en el que la gota emerge a favor de la gravedad, la solución es

$$\zeta(\xi) = pBo - \frac{\tan \theta (J_0(\xi) - 1)}{J_1(1)}, \tag{23}$$

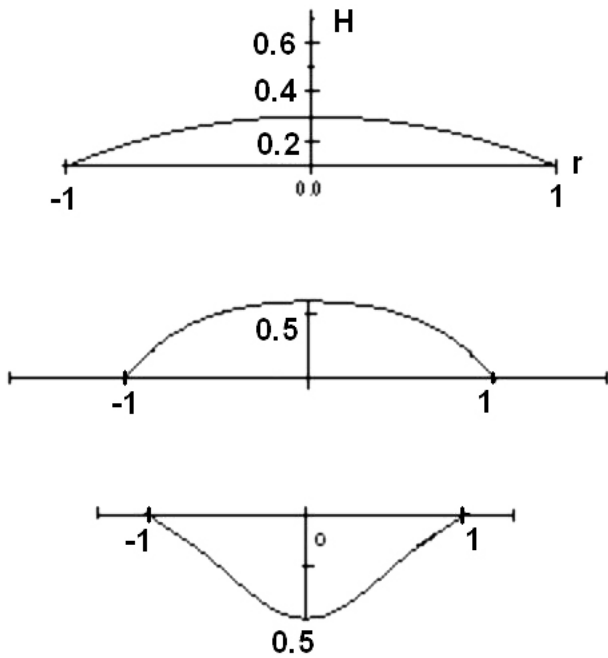


FIGURA 5. Perfiles de gotas emergiendo de un tubo, graficadas a partir de las soluciones de Bessel.

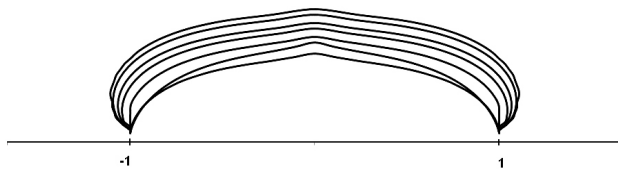


FIGURA 6. Perfiles de una gota emergiendo de un tubo hacia arriba, mostrando sus diferentes puntos de equilibrio.

donde J_0 y J_1 son funciones de Bessel de orden cero y 1, respectivamente.

En la Fig. 5, se muestran dos perfiles de gotas que emergen de la parte superior (Ec. (22)) y otro perfil de una gota que emerge desde el fondo del tubo (Ec. (23)).

5. Soluciones numéricas

Las soluciones asintóticas permiten encontrar los perfiles axi-simétricos de gotas en casos particulares, para completar este trabajo, en esta sección se presentan los resultados obtenidos de resolver la Ec. (9) de forma numérica. Se utilizaron algunas variaciones del método de Runge-Kutta de segundo orden programado en Fortran. Se encuentran como resultado perfiles de las gotas que cualitativamente son una buena aproximación a los experimentos, esto se discute más adelante.

Los parámetros que se pueden controlar son el ángulo de contacto y el número de Bond, también se puede modificar la presión de inyección que se ve reflejada en el cociente $P/\rho g H$ que en este caso se fijó en 1.0001. Para conseguir los perfiles desde que la gota alcanza la orilla del tubo hasta que se rompe, se modifica el valor de la altura de la gota. Por ejemplo, en la Fig. 6 se muestran los perfiles bidimensionales

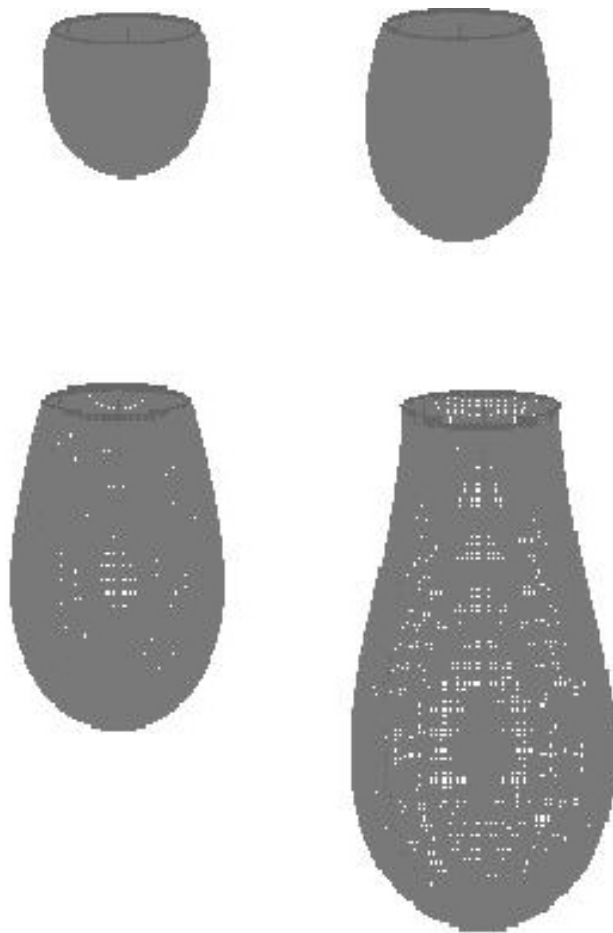


FIGURA 7. Serie que muestra las gráficas en tres dimensiones de los resultados obtenidos numéricamente, en un caso de mal mojado. Aquí $Bo = 12$, $\theta=95.7^\circ$ y $H/R = 1.7, 2.5, 3.8$ y 6.2 , respectivamente.

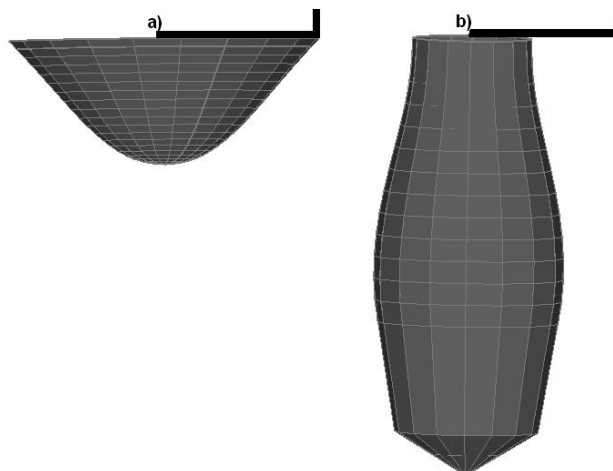


FIGURA 8. Vista tridimensional de gotas saliendo de un tubo a favor de la gravedad, con dos condiciones diferentes de mojado; a) buen mojado; b) mal mojado.

de equilibrio de una gota con buen mojado, a diferentes valores de la altura, hasta que alcanza una altura máxima H y en todos los casos $R = 1$. De dichos perfiles se observa que

el ángulo θ varía en cada uno de los perfiles de equilibrio. En este caso se supuso $\theta=84.3^\circ$ como primer valor y el número de Bond $Bo = 12$. En la misma figura también se puede observar que hay una protuberancia en la parte superior de la gota, esta es originada por la presión de inyección impuesta en su formación, es decir, si la presión se incrementa el pico y la gota crecen, se ha observado que esto también se puede apreciar en los experimentos cuando se someten a sobrepresiones.

También se hace el caso de la gota que emerge hacia abajo y se utilizó el mismo número de Bond $Bo = 12$ y un valor de $\theta=95.7^\circ$, aquí los valores de H/R son 1.7, 2.5, 3.8 y 6.2, ver (Fig. 7). Aquí se puede observar que para igual número de Bond la forma de la gota es muy diferente si emerge desde arriba o desde abajo, en este caso el ángulo de contacto no cambia a diferencia del resultado para la gota emergiendo en la parte superior del tubo.

Se realizaron también cálculos con otros valores de gotas que emergen hacia abajo. Por ejemplo en la Fig. 8(a), se muestra una gota con $\theta=45^\circ$ y $Bo = 0.2$ y en la Fig. 8(b) se usó un valor de $\theta=101.3^\circ$ y $Bo = 0.8$, se muestra más adelante que los resultados numéricos son buenas aproximaciones a la solución de este problema aún cuando no se está comparando directamente, por ejemplo en este caso al variar θ y Bo cambian las condiciones, de hecho con solo cambiar el ángulo el cambio ya es notorio, esto se observa más cuando los ángulos de contacto son cercanos 90° .

En este caso se aprecia el efecto del mojado y el valor del número de Bond, es decir, cuando hay buen mojado la gota se extiende hasta el borde externo del tubo mientras que en el caso de mal mojado la gota sólo toca el radio interior del tubo.

6. Experimentos

Los experimentos se realizaron utilizando tubos de acero inoxidable, plata y plástico, así como líquidos agua, aceite de silicón de diferentes viscosidades y mercurio como fluidos de trabajo.

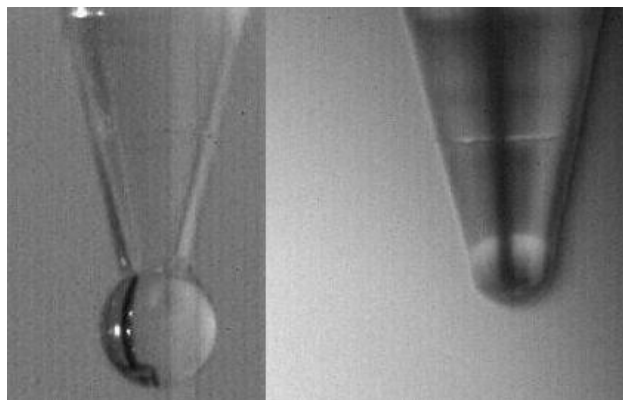


FIGURA 9. Fotografía de dos gotas que son secciones esféricas, en el caso de mal mojado y buen mojado.

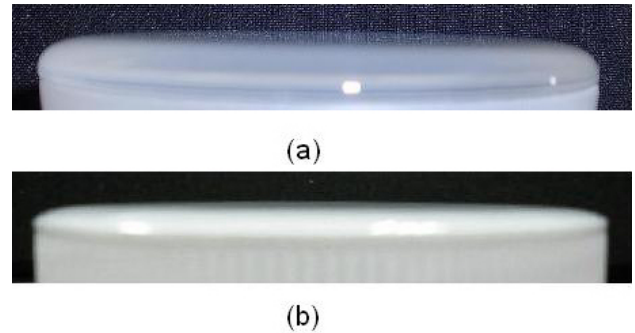


FIGURA 10. Fotografía de dos gotas que es prácticamente plana dado que $Bo \gg 1$ y con dos diferentes ángulos de contacto.

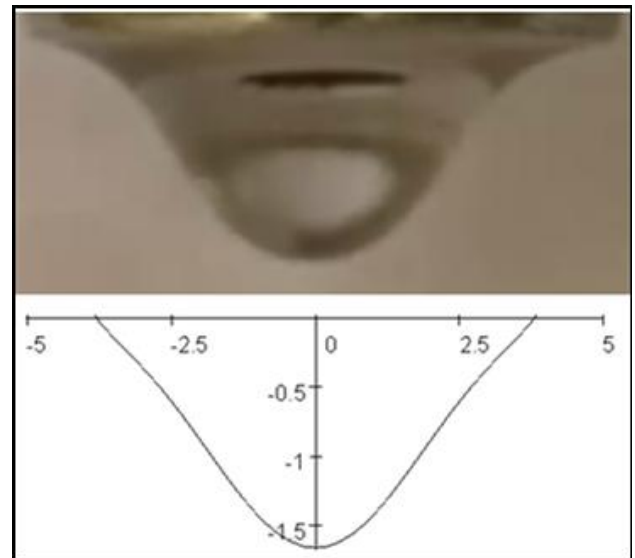


FIGURA 11. Perfil de la gota amergiendo desde abajo formada bajo condiciones de buen mojado ($d\zeta/d\xi \ll 1$). Se muestra una comparación con una imagen de una gota con condiciones semejantes de formación.

En la Fig. 9 se muestran fotos de dos gotas que son secciones de esfera, es el caso de un mal mojado con agua y plástico y buen mojado con aceite de silicón y plástico, en estos casos los valores del número de Bond son pequeños. En el caso de mal mojado $Bo = 0.0053$ y para el caso de buen mojado $Bo = 0.018$.

Los valores del Bond usados dan como resultado esferas, donde los volúmenes están determinados por el ángulo de contacto de los materiales, en este caso $\theta = 130^\circ$ en el mal mojado y $\theta = 30^\circ$ en el caso de buen mojado.

En la Fig. 10 se muestran una foto con dos casos de una gota emergiendo de un cilindro de radio grande con buen y mal mojado, para el caso de mal mojado, el tubo es de plástico y el líquido es agua con $Bo = 215.4$, para el buen mojado se utilizó un tubo de plástico y aceite de silicona con $Bo = 258.5$.

Se aprecia que cuando el número de Bond es grande la gota es plana y su altura máxima H es pequeña, comparada con el radio del cilindro.

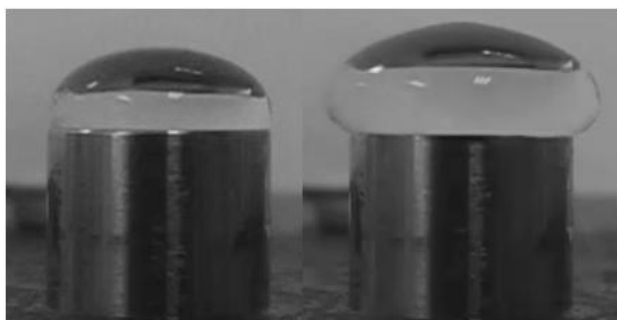


FIGURA 12. Fotografía de una gota en dos casos de equilibrio, en donde el ángulo entre el líquido y el tubo varían desde θ hasta $\theta + \pi/2$.

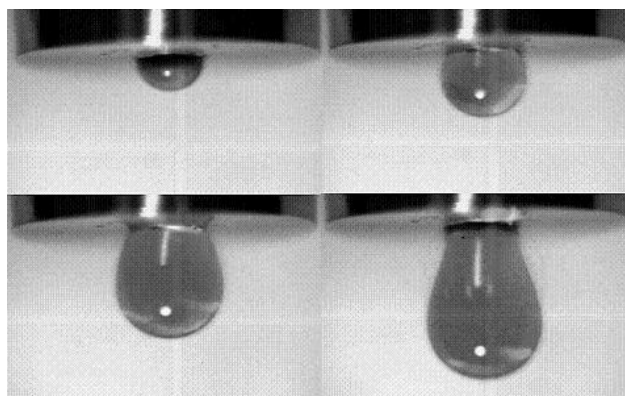


FIGURA 13. Serie que muestra los diferentes momentos de equilibrio de una gota con mal mojado, creciendo desde un tubo hacia abajo, el máximo valor alcanzado es $H/R = 3.5$.

La Fig. 11 corresponde al caso de una gota de aceite de silicón emergiendo hacia abajo desde un tubo de acero, con $Bo = 0.4085$ y un $\theta = 45^\circ$. Se observa un gran parecido al caso de las soluciones para pendientes pequeñas, Sec. IV.C.

La Fig. 12 muestra el caso de una gota de agua emergiendo en un tubo de acero y se puede ver que el ángulo del líquido con el acero es de 90° al inicio y luego crece hasta casi los 180° , aquí $Bo = 0.1216$. La contraparte de la gota de agua emergiendo hacia abajo con las mismas condiciones se puede ver en la Fig. 13 y en este caso se observa que el valor del ángulo de contacto no cambia al variar la presión de inyección, el máximo valor alcanzado en la Fig. 13 es $H/R = 3.5$. Por último, se hizo un experimento con mercurio y un tubo de cobre donde el mojado es malo y en uno de plata, en este caso el mojado es bueno y $Bo = 0.77$ en ambos casos esto es mostrado en la Fig. 14a) y Fig. 14b).

Los experimentos se hicieron con la intención de validar de manera cualitativa los resultados expuestos de forma analítica y numérica, por lo que se llevaron a cabo con valores que fueran cercanos a los usados en la parte numérica.

El lento crecimiento de las gotas se logró inyectando el líquido de prueba al tubo con una manguera conectado a éste y con un nivel de líquido apenas superior al nivel de salida

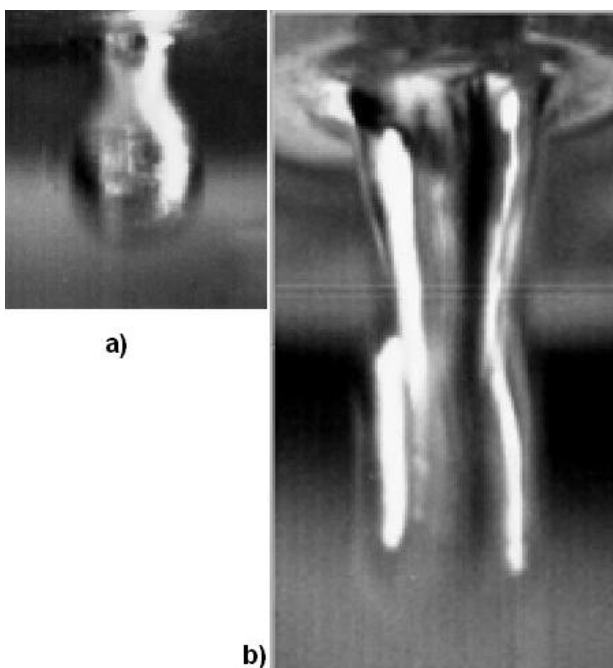


FIGURA 14. Fotografía de una gota de mercurio emergiendo en un tubo de plata.

del líquido en el tubo. Este método resultó adecuado para goteo hacia arriba o hacia abajo.

Los experimentos se filmaron con una cámara de video de alta velocidad modelo REDLAKE MotionXtra HG-100K, a partir del video es posible también tener imágenes de la evolución de la gota, desde su formación hasta su desprendimiento, aún cuando interesa sólo la forma de equilibrio.

7. Conclusiones

En este trabajo se estudió teórica y experimentalmente, la forma de gotas que emergen lentamente de tubos de pared gruesa. En primera instancia, fué posible obtener de manera analítica las formas asintóticas de equilibrio de gotas que emergen lentamente de cilindros de pared gruesa. Esto arrojó resultados con buenas aproximaciones a los experimentos cualitativos. En segundo lugar se resolvió la ecuación de Young-Laplace usando métodos conocidos de la programación numérica (Runge-Kutta modificado). Ello permitió una completa descripción de las formas de las gotas. A través de las diversas soluciones asintóticas y de los experimentos es posible establecer que las formas de las gotas dependen fuertemente de la presión inicial, del ángulo de contacto y del número de Bond. Los experimentos cualitativos realizados muestran que los resultados aquí encontrados son correctos. Finalmente, cabe destacar que en los experimentos no fue posible obtener de forma precisa la forma de las gotas ya que no contamos con una buena iluminación ni con cámaras con lentes más potentes (filtros, macros y polarizadores) y alto pixelaje, lo cual es necesario para minimizar los errores de medición.

Agradecimientos

A. L-V. y A. P-T. agradecen al COMECYT por las becas de Doctorado y Maestría, respectivamente, que ayudaron a la realización de este trabajo. Los autores también agradecen a los Profs. A. Medina, F.J. Higuera y P.D. Weidman por sus comentarios sobre la formulación teórica del problema. Los

autores agradecen al IPN el apoyo para la realización de este trabajo mediante el proyecto SIP 20100890 y al CONACYT-IPN mediante el proyecto de equipamiento “Laboratorio de experimentación en termofluidos”. Finalmente, agradecemos a los árbitros anónimos sus valiosos comentarios los cuales mejoraron sustancialmente este trabajo.

-
1. S. Middleman, *Modeling Axisymmetric Flows: Dynamics of Films, Jets, and Drops* (Academic Press, San Diego, 1995).
 2. P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart y D. Quéré, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (Springer, Berlin, 2004)
 3. J. M. Andreas, S.E.A. Hauser y W.B. Tucker, *J. Phys. Chem.* **42** (1938) 1001.
 4. S. Fordham, *Proc. Roy. Soc. London, Series A* **194** (1948) 1.
 5. P.D. Weidman, S. Krumdieck y P. Rouse, *J. Fluid Mech.* **219** (1990) 25.
 6. G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
 7. M.R. Davidson, y J.J. Cooper-White, *Proceedings of the Third International Conference on CFD in Minerals and Process Industries* (CSIRO, Melbourne, Australia 2003).
 8. P. Doshi *et al.*, *Science* **302** (2003) 1185.
 9. M.S. Longuet-Higgins, B.R. Kerman y K. Lunde, *J. Fluid Mech.* **230** (1990) 365.
 10. D. Gerlach, G. Biswas, F. Durst y V. Kolobaric, *Int. J. Heat and Mass Transfer* **48** (2005) 425.
 11. N. Dietrich, S. Poncin, N. Midoux y H.Z. Li, *Langmuir* **24** (2008) 13904.
 12. M. Hino, T. Nagasaka, A. Katsumata, K-I. Higuchi, K. Yamaguchi, y N. Kon-No, *Metall. Mater. Trans. B* **30** (1999) 671.
 13. C. Clanet y J.C. Lasheras, *J. Fluid Mech.* **383** (1999) 307.
 14. J. Chatterjee, *J. Colloid Interface Scie.* **314** (2007) 199.
 15. G. Corchero, A. Medina y F.J. Higuera, *Colloids and Surfaces A* **290** (2006) 41.
 16. J.F. Oliver, C. Huh y S.G. Mason, *J. Colloid Interface Scie.* **59** (1977) 568.
 17. A. Liñan Martínez, M. Rodríguez Fernández, y F.J. Higuera Antón, *Mecánica de Fluidos Lecciones 1 a 22, tercer curso* (Madrid, Septiembre 2003).
 18. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Londres, 1987).