

Percolación discreta en redes tridimensionales

W. Lebrecht y M.I. González

Departamento de Física, Universidad de La Frontera,

Casilla 54-D, Temuco, Chile,

e-mails: lebrecht@ufro.cl; mgonz028@gmail.com

Recibido el 20 de enero de 2011; aceptado el 13 de junio de 2011

En este trabajo se estudia percolación de enlaces y sitios en una red tridimensional. Se considera p la probabilidad de que un enlace (sitio) esté ocupado y $1 - p$ si está desocupado para una celda cualquiera de tamaño N . Mediante un cálculo numérico exacto, se obtienen las diferentes trayectorias percolantes en términos de su longitud L para cada celda. Una función polinomial de percolación $f(p, N)$ se determina y caracteriza cada celda en ambos sistemas, permitiendo una descripción analítica al fenómeno de percolación. En el estudio, se utilizan celdas simétricas y asimétricas con el fin de calcular los umbrales de percolación y exponentes críticos ν , β y γ para cada celda. Posteriormente, mediante escalamiento de tamaño finito, éstas se describen en el límite termodinámico. Estos resultados, están en buena correspondencia con otros procedimientos y técnicas mostradas en la literatura para estas redes tridimensionales.

Descriptores: Percolación; umbral de percolación; exponente crítico.

Bond and site percolation on a three-dimensional lattice is studied. A bond (site) is occupied or empty with probability p or $1 - p$ respectively, for any size N . Through an exact numerical analysis, the different percolating trajectories are obtained as a function of its length L for each three-dimensional cell. A polynomial function $f(p, N)$ associated to bond and site percolation. On each cell is determined, where symmetrical and asymmetrical cells are included in order to calculate the percolation thresholds and the critical exponent ν , β and γ for each cell. Applying the finite size scaling techniques, these parameters are obtained in the thermodynamic limit. These results are in a good agreement with the similar ones obtained by means of other procedures and techniques described in literature for three-dimensional lattices.

Keywords: Percolation; percolation threshold; critical exponent.

PACS: 64.60.Ak; 64.60.Fr

1. Introducción y teoría

Mediante la teoría de percolación se puede estudiar una variedad de sistemas que presentan criticalidad [1-2]. Estos sistemas complejos y auto-organizados presentan inter-conectividad entre sus individuos (enlaces ó sitios) y pueden caracterizarse mediante modelos simples discretos [3-5]. Cuando se estudia percolación en una red de enlaces, la conectividad entre sus individuos está determinada por las aristas, en cambio, la conectividad en la red de sitios está determinada por sus caras. En nuestro caso, orientamos el trabajo a la red cúbica simple, que tiene una conectividad de 10 enlaces (ó aristas), en cambio, tan sólo 6 sitios (ó caras) de conexión. Para estudiar percolación en este sistema, consideramos que un estímulo efectuado en un extremo de la red, debe reproducirse íntegramente en el otro extremo. El traspaso de este estímulo (ó información) sólo es posible realizarlo por las aristas (percolación de enlaces) ó por las caras (percolación de sitios). Usualmente, el camino seguido por el cual fluye el estímulo a través de enlaces (ó sitios) se denomina trayectoria percolante. Siguiendo esta idea, es posible determinar trayectorias percolantes de distinta longitud y pueden ser calculadas exactamente para una celda pequeña. La totalidad de trayectorias percolantes en términos de la longitud, determina un polinomio característico asociada a ella. Se habla en este caso de la celda renormalizada [3,6]. Esta función polinomial, en términos de la concentración de enlaces (ó sitios) ocupados p permite determinar la transición de un estado no ligado de individuos a otro totalmente ligado por sus individuos [1,2].

Al aumentar en tamaño las celdas, el grado de los polinomios asociados es mayor, lo cual permite una mejor precisión en la caracterización de esta transición. Esta técnica analítica permite determinar además exponentes críticos que caracterizan la dimensionalidad del sistema [7-10,11]. Los resultados que se informan en el presente trabajo en celdas pequeñas, pueden ser comparados con otras técnicas analíticas [7-11] y con estudios numéricos para redes de tamaño mayor efectuadas mediante simulaciones [12,13].

Usando la técnica propuesta en [3,6] desarrollada para redes bidimensionales de enlaces y sitios respectivamente, nosotros ahora consideramos una red cúbica simple compuesta por N enlaces (ó sitios) siendo la función de percolación de la forma:

$$f(p, N) = \sum_{L=L_x}^N g(L, N) p^L (1-p)^{N-L}, \quad (1)$$

donde p es la probabilidad de que un enlace (ó sitio) está ocupado y $1 - p$ si está desocupado. La suma se realiza iniciando desde L_x que identifica la longitud mínima de percolación y la dirección elegida para medir la percolación en la celda, eventualmente de un extremo de la celda al otro, por ejemplo de izquierda a derecha. El resto de las trayectorias de percolación está representada por los coeficientes $g(L, N)$ de longitud L . Se observa que si $L = N$ la celda está totalmente ocupada por sus individuos. Para determinar los coeficientes $g(L, N)$, se utiliza un algoritmo computacional que los calcula en forma exacta y en función de la longitud L para cel-

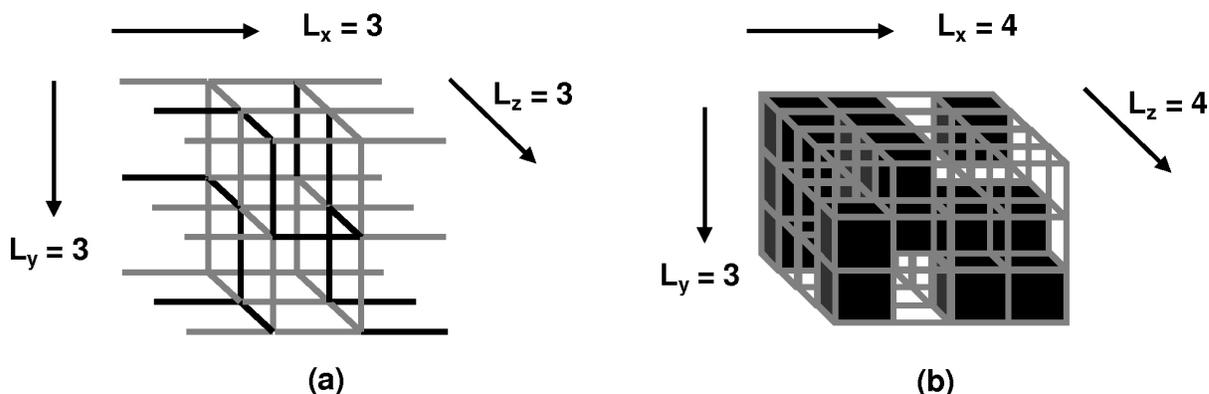


FIGURA 1. Celda percolante de una red cúbica simple de a) enlaces simétricos y b) sitios asimétricos.

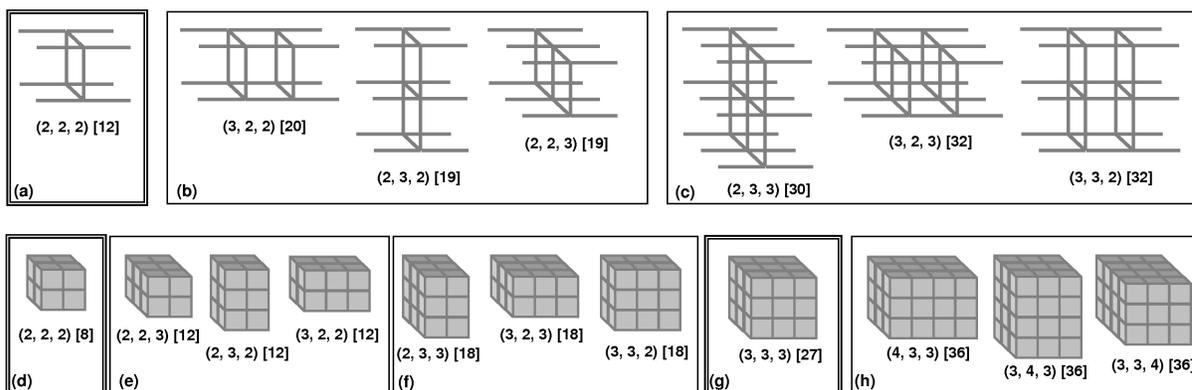


FIGURA 2. Tipos de celdas estudiadas en la red cúbica simple. a) Red simétrica de enlaces de $N_e = 12$, b) Familia de la celda asimétrica en torno a $N_e = 19$, c) Familia de la celda asimétrica en torno a $N_e = 32$, d) Red simétrica de sitios de $N_s = 8$, e) Familia de la celda asimétrica de $N_s = 12$, f) Familia de la celda asimétrica de $N_s = 18$, g) Red simétrica de sitios de $N_s = 27$, h) Familia de la celda asimétrica de $N_s = 36$.

das pequeñas. A medida que crece el tamaño de las celdas, aumenta considerablemente el tiempo de cálculo computacional para determinar todas las trayectorias percolantes. Una celda simétrica cumple con la condición $L_x = L_y = L_z$ y hemos incorporado el concepto de celda asimétrica, de modo que se privilegia levemente en una dirección. En este sentido, los parámetros obtenidos para las celdas asimétricas son promediados para hacerlos comparables a los obtenidos directamente en las celdas simétricas.

La Fig. 1 ilustra dos celdas percolantes de una red cúbica simple. La parte (a) de la figura corresponde a una configuración de enlaces simétricos de tamaño $N = 51$ y la parte (b) de la figura una configuración de sitios asimétricos de tamaño $N = 48$. En cada una de estas configuraciones se observa una trayectoria mínima de percolación de longitud $L_x = 3$ para enlaces y $L_x = 4$ para sitios. De igual modo, se destaca una trayectoria percolante intermedia de longitud $L = 15$ para enlaces y $L = 14$ para sitios. Cuando todos los enlaces (sitios) están ocupados, la trayectoria de percolación es máxima, en este caso, la longitud es $L = N = 51$ para enlaces y $L = N = 48$ para sitios. Se puede establecer además, que para una trayectoria mínima de percolación, el número posibles de configuraciones es $g(3, 51) = 9$ pa-

ra enlaces y $g(4, 48) = 12$ para sitios. Cuando la trayectoria percolante es máxima, se observa en ambos casos (enlaces y sitios) una sola configuración $g(51, 51) = g(48, 48) = 1$. El número de trayectorias percolantes intermedias se obtiene numéricamente [3,6] y corresponde a los coeficientes polinomiales $g(L, N)$ de la Ec. (1).

En este trabajo se consideran celdas de la red cúbica simple que siguen un patrón de crecimiento para el estudio de percolación de enlaces y sitios. Considerando que $N = N_e$ ($N = N_s$) es el número total de enlaces (sitios) por la cual se compone una celda, entonces se tiene la siguiente regla de crecimiento:

$$N_e = (L_x L_y + (L_x - 1)(L_y - 1))L_z + L_y(L_x - 1)(L_z - 1)$$

$$N_s = L_x L_y L_z. \tag{2}$$

De este modo, las celdas simétricas más pequeñas son de tamaño 12 para una distribución de enlaces y 8 para sitios respectivamente.

La Fig. 2, muestra las celdas simétricas y asimétricas consideradas en el presente trabajo. Las celdas simétricas se han enmarcado con línea doble, en cambio las asimétricas en línea simple (se usará el concepto de familia en este caso).

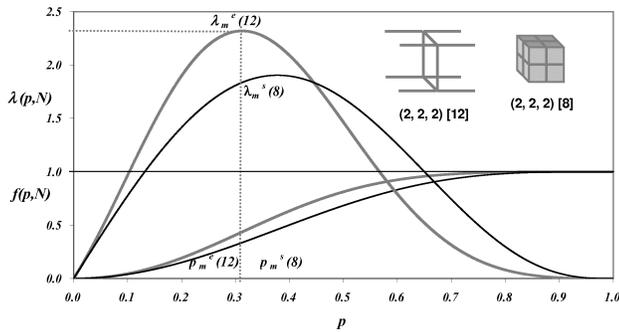


FIGURA 3. Función y umbral de percolación para una celda pequeña de la red cúbica simple de enlaces y sitios.

En cada celda se ha puesto un trío de números que corresponden a los enlaces (sitios) en la dirección (L_x, L_y, L_z) y entre paréntesis cuadrado el tamaño de la celda. Se observa en la Fig. 2, que las celdas asimétricas que componen una familia poseen un tamaño similar cuando se distribuyen enlaces, siendo exactamente igual cuando se distribuyen sitios. Por otro lado, cada familia presenta una celda equivalente o simétrica, del mismo tamaño N y que tiene el mismo valor de L_x , dirección elegida para medir la percolación en este trabajo. Para hacer comparables los resultados de los parámetros asociados a la criticalidad entre celdas simétricas y una familia de celdas asimétricas, se consideran los promedios de cada familia. Así por ejemplo, la longitud mínima de percolación L_x de la familia representada por (b) es $\langle L_x \rangle = 2.33$.

En este trabajo, se obtienen los umbrales de percolación para la red cúbica simple de enlaces y sitios y los exponentes críticos ν, β y γ mediante la técnica de hacer crecer pequeñas celdas simétricas y asimétricas como muestra la Fig. 2. Nuestro objetivo es mostrar que a través de la Ec. (1), es posible obtener resultados comparativos respecto de la criticalidad de un sistema percolante. Estos resultados están de acuerdo con los informados en la literatura, especialmente con aquellos obtenidos por simulaciones numéricas en redes de tamaño mayor. Se incorpora en el trabajo, correcciones a la leyes asintóticas de escala [4,14-16] en cada uno de los parámetros informados.

2. Resultados

Cada celda definida en la Fig. 2 puede ser caracterizada por una función de percolación a través de la Ec. (1). Esta ecuación es un polinomio cuyo grado mínimo corresponde a la longitud mínima de percolación y cuyo grado máximo es el tamaño de la celda. Los coeficientes polinomiales son las diferentes trayectorias percolantes en la celda. En cada una de estas funciones de percolación se calculan los parámetros asociados a la criticalidad y universalidad en la red cúbica simple, para enlaces y sitios.

2.1. Curva de percolación y umbral de percolación

La resolución de la Ec. (1) para cada celda determina la curva de percolación. Es una función continua acotada entre 0

y 1 y tiene una transición en el punto crítico llamado umbral de percolación. Este punto determina cuando el sistema se ha vuelto percolante y por lo tanto sus individuos ocupan mayoritariamente la red, se habla que sus individuos están conectados, o bien, que la información dada en un extremo de la red, fluye a través de ella hasta el otro extremo a partir de este punto. El umbral de percolación se puede calcular mediante dos procedimientos.

- I) Realizando la derivada de $f(p, N)$ definida como $\lambda(p, N)$ y calculando el valor de p para el cual esta función es máxima, definida como $\lambda_m(N)$. Este punto de inflexión se representa por $p_m(N)$.
- II) Calculando la probabilidad de que un enlace (sitio) ocupado cualquiera pertenece a un aglomerado, lo que significa resolver la ecuación $f(p_g, N) = p_g$ y calcular $p_g(N)$. (Teoría de renormalización)

La Fig. 3 ilustra el comportamiento de la Ec. (1) y su primera derivada cuando se calcula percolación de enlaces y sitios para las celdas pequeñas de la cúbica simple. Se ha denotado el máximo de la derivada como $\lambda_m^e(12)$ para el problema de enlaces y $\lambda_m^s(8)$ para sitios. Los valores que se encuentran mediante esta técnica (procedimiento I) para estas celdas son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 p_m^e(12) &= 0.3122, & \lambda_m^e(12) &= 2.3197 \\
 p_m^s(8) &= 0.3781, & \lambda_m^s(8) &= 1.9041.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

El resultado anterior indica que el umbral de percolación de enlaces es menor que el de sitios, lo cual concuerda con la idea que a mayor conectividad más rápidamente se llega al punto crítico. Por otro lado, estos valores están por encima del valor informado en la literatura, 0.2488 [9,12] para enlaces y 0.3116 [11,16] para sitios. Se espera que con el crecimiento de celdas y por lo tanto con un polinomio de grado mayor se logre un acercamiento al valor esperado. Calculando el umbral de percolación mediante el procedimiento II descrito más arriba, se tienen los siguientes resultados para estas celdas:

$$p_g^e(12) = 0.2084, \quad p_g^s(8) = 0.2818. \tag{4}$$

Nuevamente el valor del umbral de percolación de enlaces es menor que en sitios para la red cúbica simple, pero los valores están por debajo de los informados en la literatura. Esto permite concluir que por si solos, estos resultados no son válidos.

El umbral de percolación determina dos fases, la primera donde no hay percolación y la red se manifiesta por enlaces (ó sitios) ocupados formando aglomerados aislados. La segunda fase, los aglomerados se conectan cuando se han agregado mas enlaces (ó sitios) ocupados en la red. Esta fase se caracteriza por una función escalón ($L_x \rightarrow \infty$) y un parámetro de orden como lo muestra la Fig. 4. La expresión utilizada en ésta figura, corresponde al desarrollo de los polinomios de las celdas más pequeñas de enlaces (sitios) y se ilustra con el fin de comparar entre sí ambas curvas.

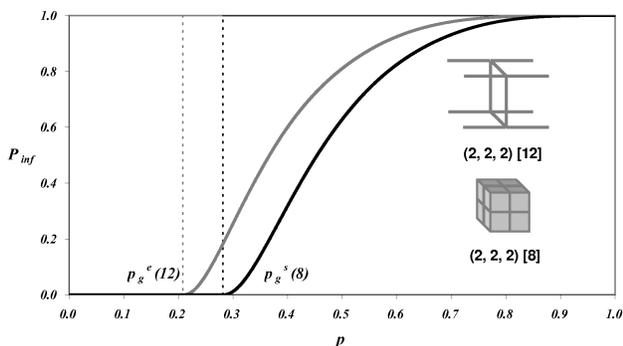


FIGURA 4. Función escalón y parámetro de orden P_{inf} de percolación para una celda pequeña de la red cúbica simple de enlaces y sitios.

La forma de determinar el escalón observado, es calcular la función compuesta de la Ec. (1). El número de iteraciones n efectuadas en la Fig. 4 fue 50, con esto se aprecia en forma clara el salto en el punto crítico. Este resultado se ilustra con línea discontinua de color gris y negro para enlaces y sitios respectivamente. Se observa que el umbral de percolación se produce exactamente en el valor obtenido mediante el procedimiento II descrito anteriormente. Una forma de escribir analíticamente este resultado es:

$$f^{(n)} = (f \circ f)(p, N) = f(f(f \dots n \text{ veces } (p, N))). \quad (5)$$

Alternativamente, el parámetro de orden, puede establecerse de la misma forma, suavizando la función escalón con una productoria [3], la cual no altera el umbral de percolación, pero ajusta la descripción a la representación de la celda de tamaño finito. En la Fig. 4, se ilustra con línea continua de color plomo y negro para enlaces y sitios respectivamente. Una forma de escribir analíticamente este resultado es:

$$P_{inf}(p, N) = \prod_{k=1}^{(n)} f^{(k)}. \quad (6)$$

Para determinar como varía el umbral de la percolación en términos del tamaño de la celda, se calcula cada función de percolación en las celdas mostradas de la Fig. 2. Para ello se utilizan los procedimientos I y II. Los resultados están ilustrados en la Fig. 5. Se ha usado las letras (a), (b), ..., (h) para mostrar el umbral de percolación particular que representa cada familia de celdas simétricas y asimétricas. Además, por símbolos llenos (abiertos) y en forma alternativa por líneas de tendencia en color gris (negro), los umbrales de percolación de cada familia para indicar el procedimiento utilizado. En el eje vertical se mide el umbral de percolación ($p_c^e(N)$ sitios, $p_c^s(N)$ enlaces) y el eje horizontal corresponde a un escalamiento de tamaño finito x el cual ha sido corregido de acuerdo a la referencia [15]. En esta referencia se propone que el umbral de percolación varía de la forma.

$$p_{m(g)}(N) \sim p_c + L_x^{-1/\nu} (a + bL_x^{-1} + cL_x^{-2} + \dots), \quad (7)$$

donde las constantes, a, b, c son parámetros de ajuste y hemos definido a $x = L_x^{-1/\nu} (a + bL_x^{-1})$, como una aproximación

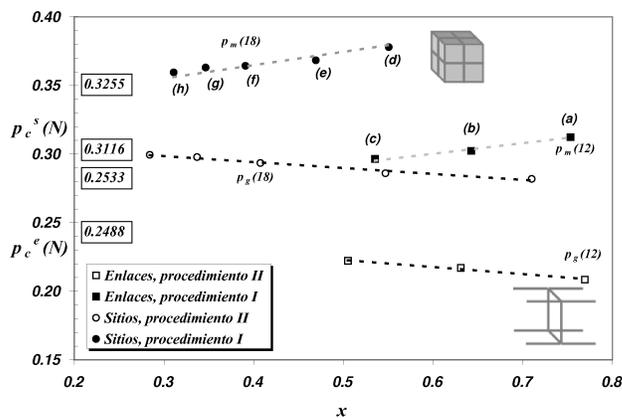


FIGURA 5. Umbral de percolación para la red cúbica simple de enlaces y sitios.

de segundo orden. L_x representa la longitud mínima de percolación y ν el exponente crítico correspondiente a 0.88 [2].

Los umbrales de percolación para ambos procedimientos y para cada tipo de individuos, se han unido mediante una recta para mostrar la tendencia al límite termodinámico, los cuales se indican mediante un recuadro en la figura.

Comparando estos resultados, con aquellos que informa la literatura 0.2488 [2,9,12] y 0.3116 [2,11,16] para enlaces y sitios respectivamente, se puede observar que esta técnica permite describir este comportamiento con un margen de error mínimo con el procedimiento II. Respecto de los valores que resultan a través del procedimiento I, se establece un margen de error en alrededor de un 3%. Cabe señalar, que estos valores son obtenidos calculando directamente sobre el polinomio descrito por la Ec. (1) para cada una de las celdas simétricas y asimétricas descritas anteriormente. Mientras mayor es el tamaño del polinomio, mejor es el ajuste. La corrección propuesta por la Ec. (7) complementa este cálculo, lo cual permite inferir que la aproximación es necesaria para este tipo de pequeñas celdas.

2.2. Exponentes críticos ν, β y γ

La criticalidad de un sistema percolante está asociado a un parámetro de orden. La forma como se comporta este parámetro de orden en la vecindad del punto crítico, está representado por una función que depende de un exponente crítico. El exponente crítico a su vez, caracteriza la universalidad del problema, desde un punto de vista dimensional por un lado, como también, desde el punto de vista del tipo de individuos. Los exponentes críticos tienen los mismos valores para redes en dos dimensiones, tanto en percolación de enlaces, como sitios. Lo mismo ocurre para redes tridimensionales que ha sido menos estudiado. De esta forma, a partir de la técnica propuesta representada por la Ec. (1) y las familias de celdas, se procede a obtener los exponentes críticos que han sido declarados y que se definen a continuación.

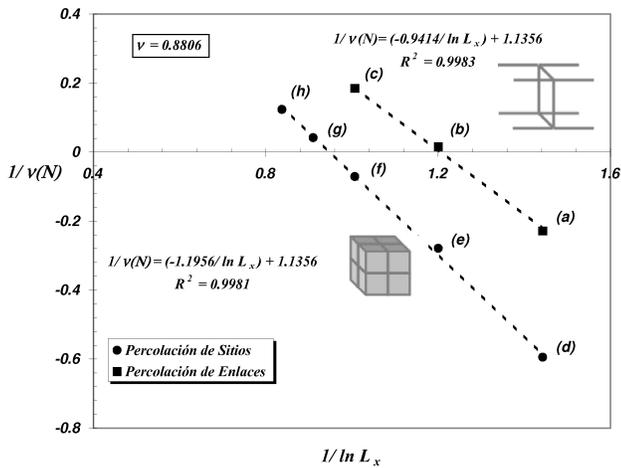


FIGURA 6. Exponente crítico ν para la red cúbica simple de enlaces y sitios.

2.2.1. ν

El exponente crítico ν está asociado al parámetro de orden denominado longitud de correlación ξ , el cual diverge en el umbral de percolación. La definición formal corresponde a:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad p = p_c. \tag{8}$$

Por otro lado, mediante técnicas de renormalización, la Ec. (8) puede reescribirse en forma aproximada como:

$$\ln L_x = \nu \ln \lambda_m, \tag{9}$$

donde se ha igualado

$$\frac{f(p) - f(p_c)}{(p - p_c)} = \lambda_m$$

y se ha considerado una aproximación de primer orden en el desarrollo en serie de Taylor de la Ec. (1) en $p = p_c$. De esta forma, λ_m es la primera derivada de la función $f(p)$. Se asume que mientras mayor es el grado del polinomio, mayor es la cúspide de λ_m y tiende a diverger en ese punto. Sin embargo, en nuestro caso, dado que las celdas son finitas, se observa un máximo y que depende del tamaño de la celda y que hemos representado por $\lambda_m^{e(s)}(N)$ (para enlaces y sitios) como lo muestra la Fig. 3.

Reynolds *et al.* [17] proponen una corrección a la Ec. (9), específicamente al máximo representado por λ_m . Ellos suponen que para pequeños arreglos, la cúspide en el umbral de percolación, puede ser corregida incorporando un escalamiento con los valores particulares de cada arreglo, que pueden expresarse en nuestro caso como $\lambda_m^{e(s)}(N)$. De este modo, la corrección sugerida está dada por:

$$\lambda_m = A(N)\lambda_m^{e(s)}(N). \tag{10}$$

Donde $A(N)$ es una constante correctiva que depende del tamaño y $\lambda_m^{e(s)}(N)$ es el valor particular del máximo que representa cada familia en ese punto. Reemplazando la Ec. (10) en la Ec. (9), se encuentra.

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln A(N)}{\ln L_x} + \frac{\ln \lambda_m^{e(s)}(N)}{\ln L_x}, \tag{11}$$

o bien,

$$\frac{\ln \lambda_m^{e(s)}(N)}{\ln L_x} = \frac{1}{\nu(N)} = \frac{1}{\nu} - \frac{B}{\ln L_x}. \tag{12}$$

En la Fig. 6, los símbolos cuadrados (circulares) representan el cálculo del exponente crítico para celdas simétricas y asimétricas de la red cúbica de enlaces (sitios), obtenida mediante la Ec. (12). Las letras (a), (b),..., (h) indican los valores para este, en cada una de las celdas de acuerdo con la Fig. 2. El eje vertical representa el recíproco del exponente $\nu(N)$ y el eje horizontal, el recíproco del logaritmo de la longitud mínima de percolación. De esta forma, el exponente crítico ν en el límite termodinámico está determinado por el recíproco del punto de cruce de la recta en el eje vertical. Se observa, en ambos casos (sitios y enlaces) que el valor es 1.1356, obteniéndose a partir de la Ec. (12) el valor de 0.8806 para el exponente ν . El valor de este exponente crítico considerado universal en la red cúbica simple e informado en la literatura es 0.88 [1], 0.89 [10], 0.875 [11]. Se puede observar que nuestro valor corresponde al esperado. Cabe señalar, que la corrección propuesta en la Ec. (12) permite describir este comportamiento para redes de tamaño finito, especialmente en estas celdas caracterizadas por un polinomio que surge a partir de la Ec. (1).

2.2.2. β y γ

El exponente β tiene asociado el parámetro de orden P_{inf} representado por el gráfico 4 ó Ec. (6), cuando la probabilidad de ocupación p está por sobre el umbral de percolación p_c . El exponente γ tiene asociado el parámetro de orden S , que caracteriza el tamaño promedio de aglomerados, medido para la probabilidad de ocupación p , antes del umbral de percolación p_c . Las definiciones formales están dadas por:

$$P_{inf} \sim (p - p_c)^\beta \quad p > p_c$$

$$S \sim |p - p_c|^{-\gamma} \quad p < p_c. \tag{13}$$

Para determinar estos exponentes críticos que representan cada familia de celdas simétricas y asimétricas, se considera que los parámetros de orden P_{inf} y S están directamente relacionados con la función $f(p, N)$ en el intervalo $p > p_c$ y $p < p_c$ respectivamente. Esto permite predecir que cada uno de estos exponentes críticos, es en promedio la pendiente de un gráfico $\ln - \ln$ de cada función polinomial que representa cada celda y en tramos bien determinados de esta curva. Usando el mismo procedimiento correctivo descrito anteriormente para el exponente ν , la Fig. 7 ilustra el comportamiento de cada una de estas pendientes para cada familia. En el eje vertical de esta figura, se representa por un lado el recíproco de $\beta(N)$ y $\gamma(N)$ y por otro lado, en el eje horizontal, el recíproco del logaritmo de la longitud mínima de percolación.

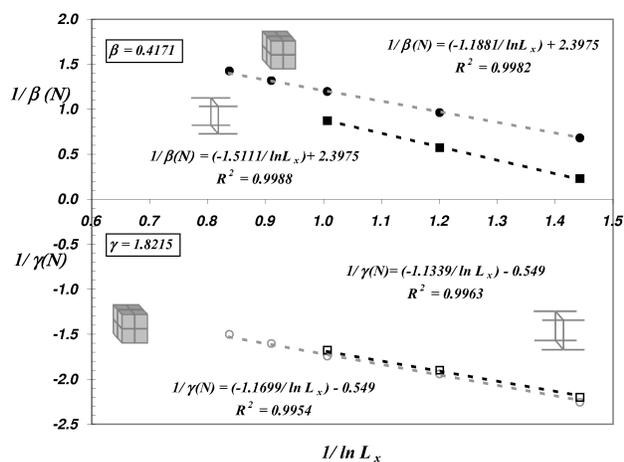


FIGURA 7. Exponente crítico β y γ para la red cúbica simple de enlaces y sitios.

En la Fig. 7, se representa mediante símbolos cuadrados y circulares, percolación de enlaces y percolación de sitios respectivamente. Si el símbolo está lleno, indica exponente $\beta(N)$ y si está vacío, exponente $\gamma(N)$. Tal como antes, la tendencia al límite termodinámico está representada por el cruce de la recta en el eje vertical. Este valor asociado al exponente β es 2.3975 en percolación de enlaces y sitios, obteniéndose el valor de 0.417 para el exponente. Los valores informados en la literatura están en el rango 0.41 – 0.43 [1,11]. Para el caso del exponente γ , el valor de cruce es 0.549 en percolación de enlaces y sitios, obteniéndose el valor de 1.822 para este exponente. El valor informado en la literatura es 1.8 [1]. Nuestro resultado (en ambas tipos de individuos) está dentro del rango que informa la literatura para la red cúbica simple. Nuevamente, la corrección propuesta por la Ec. (12) en las celdas pequeñas, caracterizadas por un polinomio, permite determinar satisfactoriamente los exponentes β y γ con una aproximación de tres dígitos.

3. Conclusiones

Se puede concluir que la técnica de hacer crecer pequeñas celdas simétricas y asimétricas, permite determinar algunos parámetros asociados a la criticalidad en percolación de enlaces (sitios) en la red cúbica simple. La función polinomial $f(p, N)$ que caracteriza cada celda en términos de la ocupación y tamaño, permite calcular el parámetro de orden P_{inf} que caracteriza la fase (Fig. 4), el umbral de percolación p_c y los exponentes críticos ν , β y γ . La inclusión de celdas asimétricas, a través de una familia, aporta resultados promediables y comparables con sus similares simétricas, mejorando la tendencia al límite termodinámico. El uso de la corrección a los parámetros que determinan la criticalidad del problema de percolación, especialmente en celdas pequeñas es inevitable, puesto que permite una mejor descripción de los valores en ese punto, lo que valida la técnica en la red real. El umbral de percolación obtenido a través del procedimiento II es claramente más exacto para esta red que el procedimiento I. Los valores para el umbral de percolación de enlaces en este trabajo es 0.2488 y para sitios 0.3116 (Fig. 5). En cuanto a los exponentes críticos los valores son $\nu = 0.8806$ (Fig. 6), $\beta = 0.417$ y $\gamma = 1.822$ (Fig. 7), caracterizando la universalidad del fenómeno. Finalmente y considerando los resultados, esta técnica puede ser aplicada a otras redes 3D, tales como redes cúbicas centradas en la cara y centradas en el cuerpo y eventualmente caracterizar los diagramas de fase de percolación de sitio-enlace, $S \cup E$ y $S \cap E$.

Agradecimientos

WL agradece a la Universidad de la Frontera a través del proyecto DIDUFRO DI11-0031 por el apoyo parcial en el desarrollo de este trabajo. M. I. González agradece a los Drs. E. E. Vogel, F. Nieto, J. A. Ramirez - Pastor y J. F. Valdés por su constante apoyo.

1. J.W. Essam, *Rep. Prog. Phys.* **43** (1980) 834.
2. D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1985).
3. E.E. Vogel, W. Lebrecht y J.F. Valdés, *Physica A* **389** (2010) 1512.
4. R.M. Ziff y M.E.J. Newman, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 016129
5. W. Lebrecht, *Rev. Mex. Fís. E* **56** (2010) 190.
6. W. Lebrecht y J.F. Valdés, *Rev. Mex. Fís.* **54** (2008) 349.
7. P. Grassberger, *J. Phys. A* **25** (1992) 5867.
8. Jan N., D. Stauffer, *Int. J. Mod. Phys. C* **9** (1998) 341.
9. C.D. Lorenz y R.M. Ziff, *Phys. Rev. E* **57** (1998) 230.
10. C. Thomsen, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 065104(R).
11. F.O. Pfeiffer y H. Rieger, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 056113.
12. P.H.L. Martins y J.A. Plascak, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 046119.
13. T. Harter, *Phys. Rev. E* **72** (2005) 026120.
14. H.J. Hermann y D. Stauffer, *Phys. Letters* **100A** (1984) 366.
15. P.M.C. de Oliveira, R.A. Nobrega y D. Stauffer, *Brazilian Journal of Physics* **33** (2003) 616.
16. Naeem Jan, *Physica A* **266** (1999) 72.
17. P.J. Reynolds, H. Eugene Stanley y W. Klein, *Phys. Rev. B* **21** (1980) 1223.