

## Identificador con comparación entre dos estimadores

J.J. Medel Juárez<sup>a</sup>, J.C. García Infante<sup>b</sup> y R. Urbieta Parrazales<sup>c</sup>

<sup>a,c</sup>Centro de Investigación en Computación,

Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo, 07738,

e-mail: jjmedelj@yahoo.com.mx

<sup>b</sup>Escuela Profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,

Av. Santa Ana No. 1000, Col. San Francisco Culhuacán, México D.F. México,

e-mail: jcnet21@yahoo.com

Recibido el 8 de marzo de 2011; aceptado el 10 de agosto de 2011

En este artículo se hace una descripción del proceso de identificación considerado como un filtro digital adaptivo en el que es necesario contar con: la función de transición estimada, el error de identificación y la función de ganancia. Lo que genera un problema con respecto a la evolución del sistema de referencia por el tiempo de procesamiento del filtrado al requerir cumplir con sus operaciones dentro del mismo intervalo de tiempo. En términos generales, la calidad de su respuesta se ve afectada por el parámetro usado en la función de transición estimada al intervenir éste de manera indirecta en las demás operaciones del filtrado. Esto dio origen a probar dos estimadores, el primero expresado de manera recursiva y el segundo seleccionando la ganancia dentro de una base de conocimiento de acuerdo con la lógica difusa. Los resultados muestran que ambos estimadores dentro del identificador cuentan con buena convergencia con diferencias de error mínimas que permiten su aproximación a las condiciones estocásticas del modelo en el tiempo para  $k$  muestreos, utilizando al MatLab<sup>®</sup> como software de simulación.

*Descriptores:* Modelación y simulación computacional; algoritmos para la aproximación de funcionales; procesos estocásticos; lógica difusa; inteligencia artificial.

This paper describes the identification process as an adaptive digital filter using the estimated transition matrix, identification error and gain functions. One problem that the filter has is the time process, affecting the quality response and agreeing with the estimated transition function, which is a condition to be accomplished with respect to the reference time evolution system. Thus, the time process required must be met in all operations within the same time interval. Generally, the identifier filter answer is affected by the parameter used in the estimated transition function indirectly used in the other filter operations. In this case, seeking a better time estimation response two estimators were considered: the first expressed in a recursive form and the second, selected within the knowledge base gain used in accordance to fuzzy logic. The results show the convergence observed in the error differences and their approximations to the stochastic time model conditions with  $k$  samples, using, MatLab<sup>®</sup> as a simulation software.

*Keywords:* Computer modeling and simulation; algorithms for functional approximation; stochastic processes; fuzzy logic; artificial intelligence.

PACS: 07.05Tp; 02.60 Gf; 02.50.Ey; 07.05.Mh

### 1. Introducción

La identificación de señales por medio del filtrado digital de un sistema tipo caja negra es utilizada para describir, reconstruir o predecir los estados internos  $\{x(k)\} \subseteq X$  o externos  $\{y(k)\} \subseteq Y$  del sistema de referencia a la excitación  $\{w(k)\} \subseteq N(\mu, \sigma^2 \leq \infty)$  [1], encontrándose  $X, Y, \subseteq \mathfrak{R}$ . Ilustrativamente puede verse en la Fig. 1. El índice  $k \in Z_+$  es un índice del número de evolución en el que se encuentra el sistema de referencia y del identificador.

Para que el identificador descrito simbólicamente como  $\hat{y}(k) \in \hat{Y}(k) \subseteq \mathfrak{R}$  de acuerdo con [2,7] opere dinámicamente, requiere de la función de transición  $\phi(k) = e^{-a(k-k_0)} \in X(k)$  donde el parámetro interno del sistema de referencia cumple con  $|a(k)| \leq 1$  de acuerdo con [2,9], del error de identificación  $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ ,  $\{e(k)\} \subseteq \mathfrak{R}$  [8] y, de una función objetivo  $K(k) = f(\phi(k), e(k), \hat{y}(k-1)) \in \mathfrak{R}$  en [3,5], como puede verse en el diagrama a bloques de la Fig. 2 de acuerdo con [12].

Dentro de la Fig. 2, en el sistema discreto  $z^{-1}$  es una función de retardo con respecto a  $y(k)$ .

La función de transición  $\phi(k)$  está descrita por el parámetro interno de sistema de referencia a identificar [7,14]. Lo que hace que el proceso de identificación sea complicado de desarrollar por no contar con más información que la señal de respuesta del sistema a un estímulo como se ve en la Fig. 1, entonces ¿cómo obtener a la función de transiciones requerida en el identificador?

Considerando que el proceso de estimación [7] de la función de transición estimada es  $\hat{\phi}(k) = e^{-\hat{a}(k-k_0)}$ , con parámetro  $|\hat{a}(k-k_0)| \leq 1$ , en donde  $\hat{a}(k-k_0) \in A \subseteq R_{[-1,1]}$  y  $k \in Z_+$ , es un índice del número de evolución en el que se encuentra el proceso de estimación [3].

El error de identificación  $e(k) \subseteq \mathfrak{R}$  está definido por la diferencia que existe entre la señal deseada del sistema de referencia y la señal identificada; permitiendo que esta diferencia dentro del intervalo de tiempo con índice  $k$ , sea un antecedente para que el filtro digital estocástico realice la estimación del parámetro de acuerdo con dos metodologías, una por medio del segundo momento de probabilidad y la otra por la inferencia donde se selecciona el parámetro correspondiente dentro de una clasificación en la base de conocimiento de

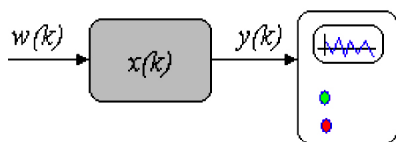


FIGURA 1. Sistema de referencia, con una pantalla para desplegar al estado externo  $y(k)$ .

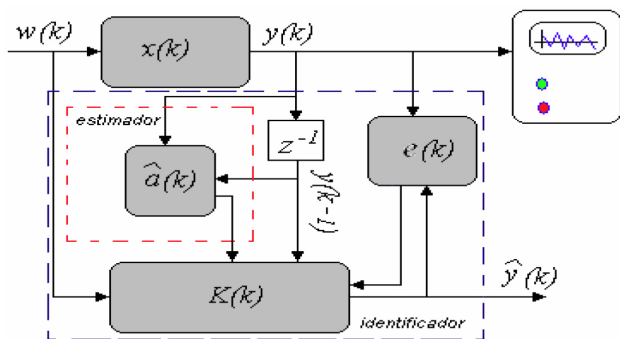


FIGURA 2. Diagrama a bloques del sistema de referencia con los filtros estimador e identificador.

acuerdo a la variable lingüística en la que el error se ubicó. En ambos casos, su acción ya sea de estimar o seleccionar, respectivamente, se ve reflejada en el error de identificación  $e(k)$  [9].

Los modelos de estimación considerados en este artículo, son adecuados para sistemas en donde se requiere emplear un mecanismo de adaptación para lograr una convergencia asintótica [8] y así dejar la posibilidad de ser usados dentro de una aplicación de control [9], ya que la identificación es un problema en el que se lleva a cabo la actualización de su estado con base en los estados del sistema de referencia y del error  $e(k)$ , del parámetro  $\hat{a}(k)$  y de la ganancia  $K(k)$  [11].

Los modelos de estimación considerados son el estocástico el estocástico que emplea el método de estimación de parámetro recursivo usando el segundo momento de probabilidad; y el difuso, en el que sus respuestas caen dentro de un conjunto de intervalos definidos dentro de la función de densidad, con una correspondencia a una variable lingüística del sistema de Ref. 3.

Ambos métodos consideran como uno de sus elementos al error cuadrático medio [2,6] y son adecuados para sistemas en donde se requiere emplear un mecanismo de adaptación para lograr una convergencia asintótica [8] y así dejar la posibilidad de ser usados dentro de una aplicación de control [9], ya que la identificación es un problema en el que se lleva a cabo la actualización de su estado con base en los estados del sistema de referencia y del error  $e(k)$ , del parámetro  $\hat{a}(k)$  y de la ganancia  $K(k)$  [11].

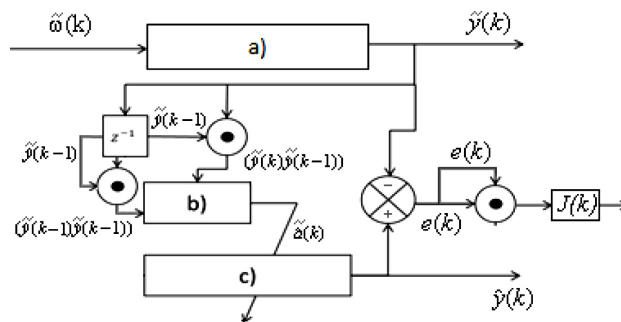


FIGURA 3. Estructura del filtro identificador con el estimador estocástico.

## 2. Filtrado estocástico recursivo

Los filtros digitales del tipo estocástico eliminan, extraen o resaltan alguna propiedad del sistema de referencia emitida por su estado observable con el conjunto de perturbaciones [4].

En este artículo se considera como el modelo de referencia la descripción auto-regresiva con promedios móviles AR-MA (1, 1), como se ve en (1) y (2).

$$x(k + 1) = ax(k) + bw(k) \tag{1}$$

$$y(k) = cx(k) + dv(k) \tag{2}$$

Donde  $x(k + 1) \in \mathfrak{R}$  es el vector de transición del estado,  $x(k)$  es el vector estado,  $\{w(k)\} \subseteq N(\mu_w, \sigma^2 < \infty)$  es la señal de ruido adherida al estado  $x(k)$ ,  $y(k)$  es el estado de salida observada,  $\{v(k)\} \subseteq N(\mu_v, \sigma^2 < \infty)$  es la señal de ruido agregada al estado de salida;  $a, b, c, d \in \mathfrak{R}_{[-1,1]}$  son los parámetros del sistema (1) y (2) de acuerdo con [2].

El sistema ARMA (1,1) descrito en (1) es estacionario y lo que permite que sea sustituida en (2) considerándola retardada. De (2) se obtiene al estado interno en función del estado observable. Resultado que permite obtener la forma recursiva (3) contenida en  $Y(k)$  de acuerdo con [14].

$$\tilde{y}(k) = \tilde{a}\tilde{y}(k - 1) + \tilde{\omega}(k) \tag{3}$$

En donde el proceso de innovación y el parámetro están definidos como  $\tilde{\omega}(k) = (cac^+)v(k-1) + cw(k-1) + dv(k)$ ,  $\tilde{a} = cac^+$ , respectivamente.

La estructura general del modelo estocástico de estimación recursiva en diferencias finitas está basada en el segundo momento de probabilidad [9], como puede observarse en la Fig. 3.

En donde  $z^{-1}$  es una función de retardo,  $\otimes$  es el operador algebraico de producto y  $\odot$  es el operador de suma, dentro de la teoría de bloques [8,10].

De la Fig. 3, se tiene:

- a) Modelo de caja negra del sistema estocástico,
- b) Modelo estocástico para la estimación de parámetros [9],

c) Modelo del identificador estocástico basado en el estimador.

Las formas recursivas de la covarianza  $P(k)$  la varianza  $Q(k)$ , y la media del estado observable permiten el desarrollo del estimador del parámetro del modelo tipo caja negra  $\tilde{a}(k)$ , quedando acotado dentro de un espacio de probabilidad filtrado [10].

El sistema de estimación es del tipo adaptivo [9], cuyo límite a converger se logra en el infinito; pero que en forma práctica [11,12] una vez que el parámetro a estimar se encuentra en una región en la que ya no se requiere mayor precisión, el proceso de adaptación concluye, siendo la respuesta del identificador las más adecuada en un sentido de probabilidad.

Las señales tanto de entrada como de salida de la caja negra se encuentran normalizadas y dentro del espacio filtrado [5].

**Teorema 1.** Sea el modelo ARMA (1,1) definido en (3) y visto ilustrativamente en la figura 3, con  $\tilde{y}(k) \in \mathbb{R}$ ,  $|\tilde{a}| \in \mathbb{R}_{+[0,1]}$ ,  $\{\tilde{\omega}(k)\} \subseteq N(\mu_x \approx 0, \sigma^2 < \infty)$ , cuenta con estimador en forma recursiva dado por (4).

$$\hat{a}(k) = \frac{1}{k} \left[ \begin{array}{l} \tilde{y}(k)\tilde{y}(k-1) + \\ (k-1)Q(k-1)\tilde{a}(k-1) \end{array} \right] Q(k)^+ \quad (4)$$

**Prueba.** (Ver Anexo).

### 3. Filtrado difuso

De acuerdo con [13], el criterio de adaptación, es el primer elemento requerido en el filtrado difuso, seleccionando al mejor parámetro  $\hat{a}(k)$  de acuerdo a una base de conocimiento (BC) a través del conjunto de reglas de inferencia establecidas en el punto c) de la Fig. 4. Para que el valor de la señal identificada  $\hat{y}(k)$  sea lo más aproximada a la señal deseada se requiere ajustar los parámetros del filtro dinámicamente en relación a BC, tal que el valor del error  $e(k)$  tiene una convergencia a un  $\delta$  dentro de un radio de aceptación  $\gamma > 0$ , de acuerdo a la calidad de filtro considerada como buena desde un punto de vista lingüístico, valor previamente definido donde  $\gamma$  es una vecindad respecto del valor real emitido por el sistema de referencia que corresponde al intervalo de la variable lingüística [6,15].

De la Fig. 4, se tiene:

- a) Modelo de caja negra de referencia.
- b) Mecanismo de inferencia difusa, donde se realiza la clasificación y selección del parámetro del filtro.
- c) Modelo de filtrado para la identificación del sistema.

Cada función de pertenencia se encuentra en la BC, la cual se ajusta dinámicamente, conforme a la función objetivo y a los intervalos en donde se tiene la descripción por  $n$ -iles,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , para cada índice de tiempo  $k$ , respecto a la densidad de la información [8,10].

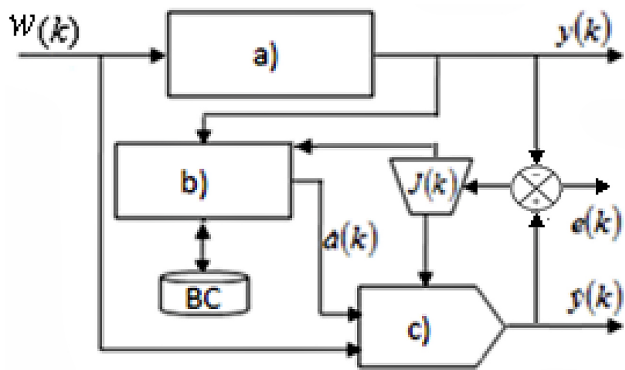


FIGURA 4. Estructura del Filtro Difuso.

El criterio más utilizado en la literatura como función objetivo es el de minimización del segundo momento de probabilidad del error, el cual es expresado de forma recursiva en (5) considerando propiedades estacionarias de manera rígida, i.e., sus dos primeros momentos de probabilidad son constantes a través del tiempo [6].

$$J(k) = \left[ \frac{1}{k} \left( (k-1)J(k-1) + e(k)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_{+[0,1]} \quad (5)$$

con  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $J(k) \in \mathbb{R}_{+[0,1]}$ .

El filtrado difuso da una respuesta que se considera natural al estar acotada con respecto de la señal deseada y a la función de distribución del funcional de error  $J(k)$ , de acuerdo con [15]. Es así como los mecanismos de inferencia y el conjunto de reglas base permiten determinar la acción del filtro difuso con respecto al funcional del error, para seleccionar dentro de la BC al mejor parámetro que afectará al identificador en su calidad de respuesta [8,15].

La BC  $T_M$ , está formada por el conjunto de parejas establecidas por  $Y \times \hat{Y} \in \mathbb{R}^2$ , donde el conjunto deseado  $Y := \{y(k)\}$  y el conjunto de identificación  $\hat{Y} := \{\hat{y}(k)\}$  de acuerdo con [10]. Esto es,  $T_M = Y \times \hat{Y} \subseteq \mathbb{R}_{2[1,M]}^2$ ,  $M \in \mathbb{Z}_+$  que en forma explícita se tiene un conjunto de parejas ordenadas, descrita en (6).

$$T_M = \{(y(k), \hat{y}(k))\}_{k=1}^{2 \times M} \subseteq \mathbb{R}_{2[1,M]}^2 \quad (6)$$

En la función de pertenencia se establece el valor de correspondencia máximo que hay entre la salida identificada  $\hat{y}(k)$  y la señal deseada  $y(k)$ , teniendo como objetivo encontrar a través del costo ínfimo del error de filtrado

$$\left( \lim_{k \rightarrow m} J(k) = \inf \{ \delta(k) \} \right)$$

dentro del intervalo  $[0, 1)$ , al mejor parámetro.

Ese error mínimo corresponde al conjunto de los pares definido por (7).

$$J_{\min} = \inf_N \{ J(y_0, \hat{y}) \}_N \quad (7)$$

El proceso de filtrado difuso busca que

$$\lim_{k \rightarrow N} J(k) \rightarrow J_{\min}$$

al seleccionar dentro de una BC el parámetro adecuado  $\tilde{a}(k)$  para cada caso, lo que permite que

$$\lim_{k \rightarrow N} \hat{y}(k) \rightarrow y(N).$$

Para que el proceso de selección de parámetros no fuera tan exhaustivo, se requirió establecer rangos de selección de parámetros dados por el funcional del error; es decir,  $J(k) \subseteq [0, 1)$ , tal que  $J(k)_{\text{bajo}} \subseteq [0, 0.33)$ ,  $J(k)_{\text{medio}} \subseteq [0.34, 0.66)$ ,  $J(k)_{\text{alto}} \subseteq [0.67, 1)$ .

En el caso de que el proceso de filtrado permita contar con una condición menor al máximo valor de  $J(k)_{\text{bajo}}$ , la BC del funcional del error se ajusta al valor máximo obtenido, quedando descrita en tres nuevas secciones  $\tilde{J}(k)_{\text{bajo}} \subseteq [0.01, 0.10)$ ,  $\tilde{J}(k)_{\text{medio}} \subseteq [0.11, 0.21)$ ,  $\tilde{J}(k)_{\text{alto}} \subseteq [0.22, < 0.33)$ . Lo que permite en el caso de caer en la nueva condición para  $\tilde{J}(k)_{\text{bajo}}$  y encontrar al parámetro  $\tilde{a}(k)^*$ , logrando que  $\hat{y}(k \rightarrow N) \cong y(N)$ .

El cómo seleccionar en cada ocasión al mejor parámetro dentro de la BC de acuerdo con el valor del  $J(k)$ , requiere de varias consideraciones: 1) que el proceso de experimentación permanezca fijo (excitación y respuesta, 2) elegir por primera vez en forma aleatoria un parámetro dentro de la BC de parámetros, 3) observar la respuesta del funcional del error, 4) seleccionar dentro de la región de estabilidad descrita para el sistema los valores extremos en relación al parámetro previamente seleccionado (valores que se encuentran dentro del círculo unitario, 5) probar en el sistema de identificación  $\hat{y}(k)$  las ganancias difusas y se observa cuál de ellas da el menor error y, 6) seleccionar al parámetro que minimizó el funcional de error dando la primera respuesta correcta del identificador, lo cual debe ocurrir en el intervalo de tiempo en el que el sistema de referencia evolucionó a un nuevo estado [6], 7) ahora el parámetro de referencia que se busca dada la evolución del sistema toma como referencia el parámetro seleccionado anteriormente, realizando la misma búsqueda que minimice al error de identificación, solo que ahora alrededor de una vecindad del primer parámetro seleccionado, hasta llegar en el caso de sistemas invariantes en el tiempo, a una condición estacionaria [10,15].

#### 4. Resultados

La simulación de los filtros descritos en este artículo tiene la finalidad de hacer una comparación de su comportamiento basado en a) la identificación de la señal deseada, b) la convergencia del error y, c) la aproximación probabilística al modelo de referencia ARMA (1,1) de forma dinámica [14].

Para este caso se emplea el modelo descrito en (1) y (2) como modelo de referencia y es visto en forma recursiva en (3).

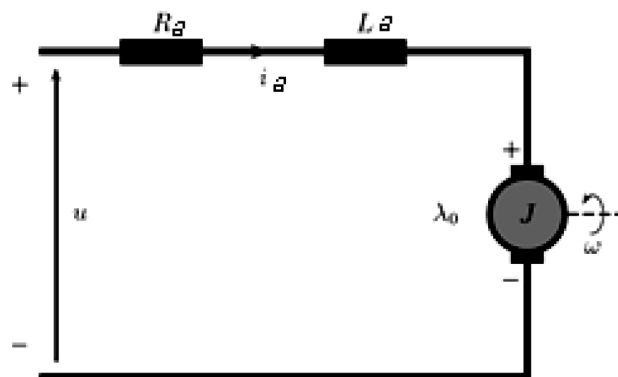


FIGURA 5. Diagrama del motor de CD.

La ventaja de emplear filtros digitales para identificar al sistema de referencia, es dar una respuesta adaptiva en tiempo y de acuerdo a la dinámica del modelo de Ref. 7. En el filtrado en general la realimentación es usada para ajustar los parámetros del filtro y actualizar el siguiente estado de evolución [9,14].

Ambos estimadores emplean una adaptación dinámica frente a los cambios del modelo de referencia (3); la diferencia entre ellos es que el filtro difuso utiliza un mecanismo de inferencia para deducir el valor del parámetro deseado de acuerdo a la magnitud del funcional de error.

Como ejemplo se consideró el modelo en diferencia finitas un motor de CD tipo serie descrito en la Fig. 5 y es visto como caja negra, en donde es necesario estimar las ganancias internas e identificar su respuesta a través del proceso de filtrado.

Dónde en la Tabla I, se indican las variables y las constantes con respecto a la Fig. 5.

TABLA I.

	Variables		Constantes
$i_a$	Corriente de la armadura	$R_a$	Resistencia de armadura
$u$	Voltaje entre terminales	$L_a$	Inductancia de armadura
$w$	Velocidad del eje del rotor	$\lambda_0$	Constante de fuerza electromotriz
$T_L$	Par de carga	$J_m$	Momento de inercia del rotor y la carga

El modelo eléctrico del comportamiento dinámico del motor de CD de acuerdo con [13], se describe en (7).

$$u(t) = R i_a(t) + L_a \frac{d i_a(t)}{dt} + \lambda_0 w(t) \quad (8)$$

La mecánica del motor se presenta en (8).

$$J_m w(t) = T_m(t) - T_L(t). \quad (9)$$

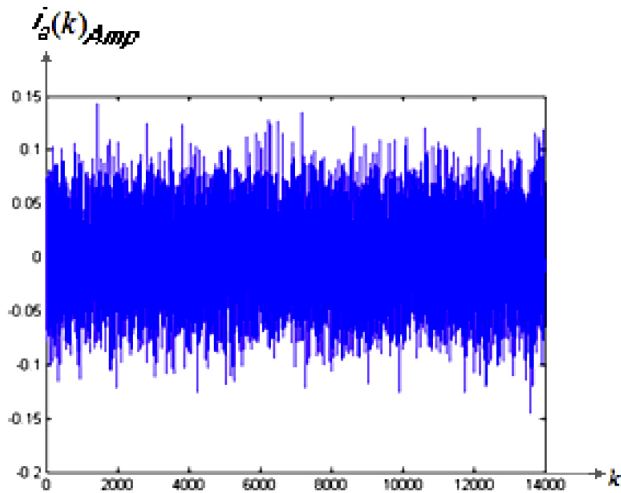


FIGURA 6. Señal deseada del modelo ARMA (1,1) a identificar en Amp.

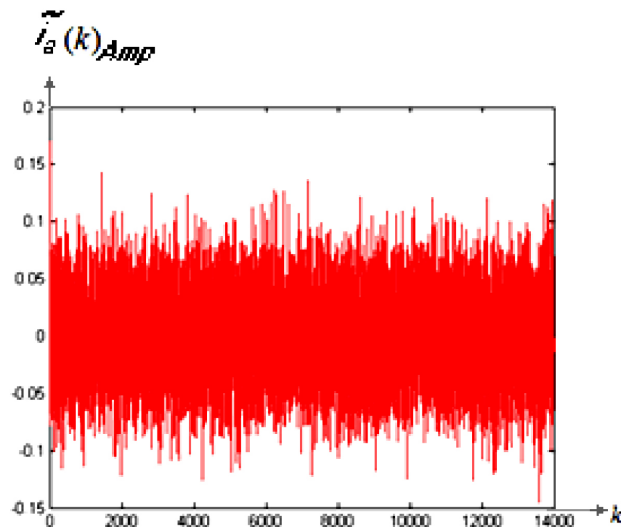


FIGURA 7. Señal identificada por el filtro recursivo en Amp.

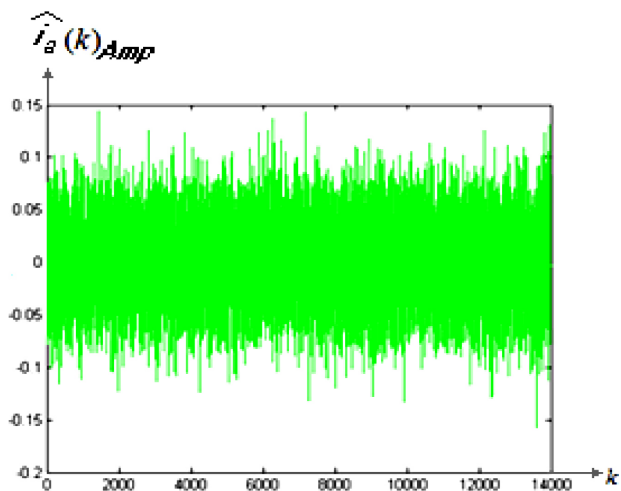


FIGURA 8. Señal identificada por el filtro difuso en Amp.

Al desarrollar en diferencias finitas a (7) y reduciendo términos se tiene (9).

$$i_a(k) = a(k)i_a(k - 1) + w(k) \tag{10}$$

En donde

$$a(k) = \frac{L_a}{(R_a k + L_a)}$$

y

$$w(k) = \frac{u(t)k - \lambda_0 \left( \frac{T_m(t) - T_L(t)}{J_m} \right) k}{(R_a k + L_a)} \tag{11}$$

Cuyos resultados se describen en las Figs. 6, 7 y 8.

La Fig. 9, muestra el funcional de error descrito con respecto a cada filtro. En ambos casos representa la convergencia de filtrado a una región donde se encuentra acotada y es constante [9].

Las salidas identificadas en los filtros tienen un alto nivel de convergencia entre sí por lo que la magnitud del funcional del error en cada filtro llega a valores muy pequeños y la velocidad de convergencia es prácticamente igual en ambos caos. La Fig. 9, muestra la diferencia del error en los filtros, teniendo un error menor en el filtro recursivo.

En la Fig. 10 se muestra la validación dinámica y probabilística del sistema (3) descrito por ambos filtros.

En el caso de la aproximación a la función probabilística, el filtro recursivo presenta variaciones con respecto al sistema de referencia; en cambio, en el filtro difuso se observa una mayor convergencia a la respuesta del sistema de referencia. Siendo así que el filtro recursivo tiene menor error de convergencia en un sentido e probabilidad, y el filtro difuso cuenta con mayor precisión.

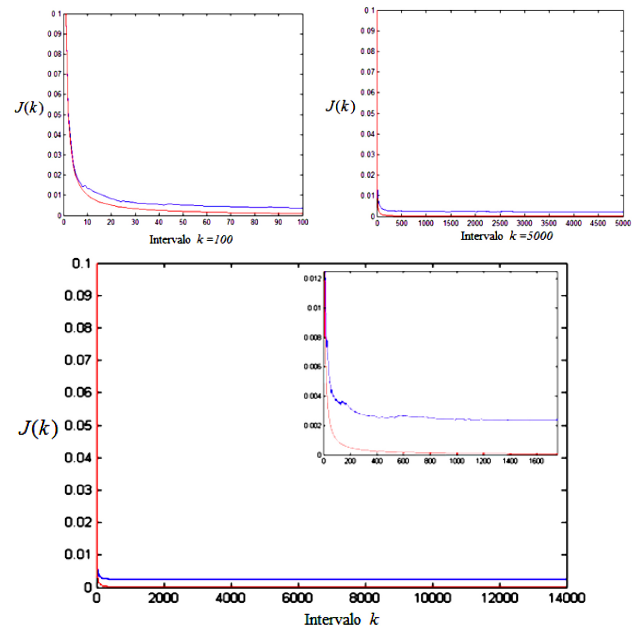


FIGURA 9. Funcionales de error de los filtros (rojo-recursivo, azul-difuso).

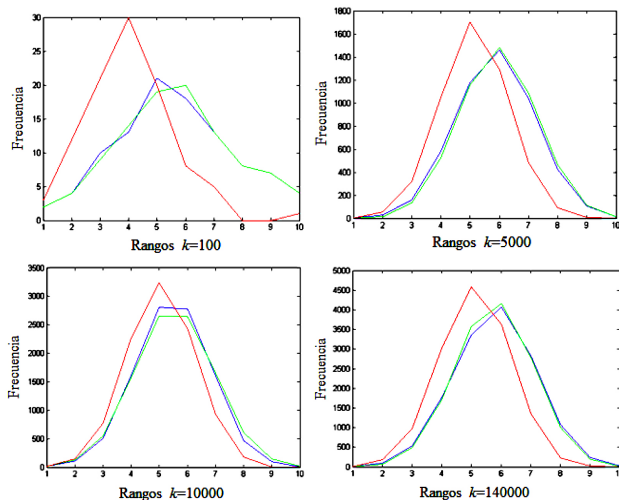


FIGURA 10. Resultados de la función probabilística de los filtros en diferentes intervalos  $k$  (azul-sistema, rojo-recursivo, verde-difuso), observando que van convergiendo entre sí cuando el número de evoluciones crece.

Con respecto a la aproximación de la función de densidad deseada, el filtro difuso tiene más precisión al describirla que el filtro recursivo.

## 5. Conclusiones

El sistema de referencia descrito en (1) y (2) quedo expresado de manera recursiva en (3) como se observa en la figura 1, donde el parámetro interno y desconocido queda expuesto.

Para encontrar el parámetro del sistema (3) y llegar a la aproximación al sistema de referencia se presentaron dos algoritmos de estimación, a) basado en el segundo momento de probabilidad y, b) usando los conjuntos de lógica difusa; cuyas estructuras de los filtros se muestran en las figs. 3 y 4, respectivamente.

La respuesta del identificador al considerar cada uno de los estimadores en su adaptación de acuerdo con la Fig. 2, se observa en las Figs. 7, 8. En la Fig. 9, se presenta el resultado del funcional del error del identificador (14) con cada uno de los estimadores, teniendo una diferencia de 0.003 unidades.

Siendo el mejor de ellos en convergencia el identificador considerando en (4). Pero en la Fig. 10, debido a que el filtro recursivo tiene una distribución Gaussiana puntual y el filtro difuso es descrito por conjuntos o regiones Gaussianas difusas, mostrando una mejor aproximación en el caso del filtro difuso a la distribución del sistema de referencia (3).

## Anexo

**Prueba (Teorema 1).** El parámetro  $a$  a estimar de acuerdo al modelo (3) está descrito en (4) considerando el segundo momento de probabilidad (10).

$$\hat{a}(k) = P(k)Q(k)^+, \quad (12)$$

Considerando

$$P(k) := E \{ \tilde{y}(k)\tilde{y}(k-1) \},$$

$$Q(k) = E \{ y(k-1)^2 \} - dE \{ \tilde{\vartheta}(k-1)\tilde{y}(k-1) \}$$

Se obtiene (11) retardando (10) en el tiempo.

$$\hat{a}(k-1) = P(k-1)Q(k-1)^+. \quad (13)$$

La forma recursiva de  $y$  y se presentan en (12) y (13):

$$P(k) = \frac{1}{k} [\tilde{y}(k)\tilde{y}(k-1) + (k-1)P(k-1)] \quad (14)$$

$$Q(k) = \frac{1}{k} [\tilde{y}(k)\tilde{y}(k-1) + (k-1)Q(k-1)] \quad (15)$$

Al sustituir en (11) a (12) y (13) así como ese resultado en (10), el parámetro es descrito en (4), en forma recursiva.

1. J. Abonyi, *Fuzzy Model Identification for Control* (Birkhauser Boston 2003) pp. 1-16.
2. J. C. Berstein y R. Cesch, *Discrete Stochastic Processes and Optimal Filtering* (Great Britain and the United States in 2007 by ISTE 2007) USA, pp. 218-222.
3. N. Boccarda, *Modeling Complex Systems* (Springer-Verlag, 2004).
4. G. H. Dehling, T. Gottschalk y A. C. Hoffmann, *Stochastic Modeling in Process Technology* (Elsevier 2007) p. 2.
5. J. R. Elliott, J. B. Moore y L. Aggoun, *Hidden Markov Models: Estimation and Control* (Springer 2008) pp. 74-75.
6. J. C. García, J. Medél y P. Guevara, *WSEAS Transactions on Systems and Control* p. 133 (2008) Canada.
7. M. Gerdin, *Identification and Estimation for Models Described by Differential-Algebraic Equations* (LiU-Tryck 2006) Sweden, pp. 12-13.
8. S. Haykin, *Adaptive Filtering* (Prentice Hall, U.S.A. 2001)
9. G. Hendeby, *Fundamental Estimation and Detection Limits in Linear Non-Gaussian Systems* (LiU-Tryck 2005) Sweden, pp. 29-30.
10. J. J. Medel, J. C. García y P. Guevara, *Automatic Control and Computer Sciences AVT* 42 (2008) 26-34, Rusia.
11. J. F. Rojas, M. A. Morales, A. Rangel y I. Torres, *Rev. Mex. Fis.* 55 (2009) 1.

12. I. Sánchez, *Filtrado Adaptivo para Sistemas AR de 1er Orden*, Tesis, (Centro de Investigación en Computación 2011) pp. 55-59.
13. T. Takagi, y M. Sugeno, *IEEE Transaction and Systems, man, and cybernetics* 15 (1986) 116-132.
14. P. P. Vaidyanathan, *The Theory of Linear Prediction, Autoregressive Modeling* (Morgan & Claypool publishers 2008) p. 5.
15. L. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and control* **8** (1965) 338-353.