INVESTIGACIÓN *Revista Mexicana de Física* **57** (2011) 421–425 OCTUBRE 2011

Soluciones exactas a la ecuación de Schrodinger para una fibra óptica quiral

A.H. Salas
*Grupo FIZMAKO, Universidad de Caldas, Departmento de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Nubia Campus, Manizales, Caldas,
email: asalash2002@yahoo.com*

J.E. Castillo
*Grupo FIZMAKO, Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
email: jairocastillo63@yahoo.es*

Recibido el 6 de enero de 2011; aceptado el 1 de agosto de 2011

Este artículo presenta soluciones exactas a la ecuación de Schrodinger asociada a una flbra óptica monomodo quiral dispersiva y no lineal. La quiralidad está caracterizada a través del formalismo planteado por Born-Fedorov. Este trabajo nos permite analizar el efecto de la quiralidad sobre la ecuación de propagación de los pulsos ópticos. Los resultados presentados en este manuscrito pueden ayudar en el estudio de la fibra óptica.

Descriptores: Ecuación de Schrödinger; quiralidad; fibra óptica.

This paper presents exact solutions to Maxwell's equations in a dispersive and nonlinear chiral singlemode optical fiber. The chirality is characterized through the Born-Fedorov formalism. This work allows us to analize the effect of chirality over the propagation equation of optical pulses. The results we present in this paper may help in the strudy of optical fiber.

Keywords: Schrödinger equation; chirality; optical flber.

PACS: 78.20.-e; 42.81.-i; 42.81.dp

1. Introducción

Consideremos la ecuación

$$i\left(\frac{\partial\phi}{\partial z^*}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}k''\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{i}{6}k'''\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}$$
$$+(1-\zeta k_0)\frac{i\omega\alpha}{2k_0}\phi-(1-\zeta k_0)\frac{\beta\omega_0^2}{(2k_0)^3}\left|\phi\right|^2\phi$$
$$+\left(1-\frac{\zeta k_0}{2}\right)\zeta k_0^2\phi=0, \tag{1}$$

en donde $i=\sqrt{-1}$. Esta ecuación se deduce en el trabajo de Zamorano [1]. La Ec. (1) describe la propagación de pulsos en una fibra óptica quiral, dispersiva y no lineal. El análisis de cada término es el siguiente [1]:

- El primer término representa la evolución del pulso con la distancia.
- El segundo, tercero y cuarto términos representan la dispersión de la fibra óptica. $k\prime=1/v_g$ y k" corresponden a la dispersión cromática; k' indica que el pulso se mueve con la velocidad de grupo (v_g), mientras que la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) está representada por k'', la cual altera las fases relativas de las componentes frecuenciales del pulso produciendo su ensanchamiento temporal. k" es nulo en la región de 1.3 μm. Para valores de λ inferiores a 1.3 μm, k'' es positivo (región de dispersión normal) y para valores superiores a 1.3 μm, k'' es negativo (región de dispersión anómala). k''' representa la pendiente de la GVD, también denominada dispersión cúbica y corresponde a una dispersión de alto orden; importante en pulsos ultra cortos y en la segunda ventana óptica donde k" es nulo (región de 1.3 μm). La dispersión cúbica, además, es importante en fibras con dispersión desplazada a la región de 1.5 μm.
- El quinto término está asociado con la atenuación de la fibra (α), en este caso siendo ponderadas esas pérdidas por la quiralidad de la fibra.
- $|\phi|^2\,\phi$ representa los efectos no lineales, y se deben al efecto Kerr, el cual se caracteriza por tener un índice de refracción dependiente de la intensidad del campo aplicado. Un índice de este tipo, para el caso de fibras ópticas, significa que se tiene un desplazamienlo de fase dependienle de la intensidad y como los cambios temporales de fase son también cambios temporales de frecuencia, se tiene que las no linealidades tipo Kerr pueden alterar y ensanchar el espectro de frecuencia de pulso. Este término también depende de la quiralidad de la fibra.
- El último término está asociado netamente a la quiralidad de la fibra.

Con el fin de facilitar la solución de la ecuación de propagación, se introduce el siguiente cambio de variables

$$t'=t-\frac{z^*}{v_g},\quad z'=z^*, \tag{2}$$

de modo que el sistema referencial original será

$$t = t' + \frac{z^*}{v_g}, \quad z^* = z' \tag{3}$$

y tendremos que la Ec. (1) toma la forma

$$i\frac{\partial \phi}{\partial z'} + \frac{1}{2}k''\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - i\frac{1}{6}k'''\frac{\partial^3 \phi}{\partial t'^3} + i\frac{\alpha\omega_0}{2k_0}(1-\zeta k_0)\phi - \frac{\beta\omega_0^2}{(2k_0)^3}(1-\zeta k_0)\left|\phi\right|^2\phi + \zeta k_0^2\left(1 - \frac{\zeta k_0}{2}\right)\phi = 0. \tag{4}$$

Nuestra ecuación se puede simplificar aún más definiendo las nuevas variables

$$q = \frac{\omega_0}{2k_0}\sqrt[3]{\beta}\phi, \xi = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{2k_0}z', \qquad \tau = \sqrt{\frac{1}{2k_0k''}}\sqrt[6]{\beta}t', \tag{5}$$

$$\partial\tau^2 = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{2k_0k''}\partial t'^2, \qquad \partial\tau^3 = \frac{\sqrt{\beta}}{(2k_0k'')^{3/2}}\partial t'^3.$$

Sustituyendo (5) en (4) obtenemos :

$$i\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - i\frac{1}{6}\frac{2k_0k'''}{\sqrt[3]{\beta}}\frac{\sqrt{\beta}}{(2k_0k'')^{3/2}}\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} + i\frac{\alpha\omega_0}{\sqrt[3]{\beta}}(1-\zeta k_0)q - (1-\zeta k_0)\left|q\right|^2 q + \frac{\zeta k_0^2}{\sqrt[3]{\beta}}\left(1 + [1-\zeta k_0]\right)q = 0. \tag{6}$$

Finalmente, sea

$$\gamma = \frac{\sqrt[6]{\beta}k'''}{6k''}\frac{1}{\sqrt{2k_0k''}}, \quad C = 1 - \zeta k_0, \ \Gamma = \frac{\omega\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}. \tag{7}$$

Reemplazando (7) en (6) resulta la ecuación

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - i\gamma\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} + i\Gamma Cq - C\left|q\right|^2 q + k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)q = 0. \tag{8}$$

La Ec. (8) representa el modelamiento básico de la propagación de pulsos en una fibra óplica quiral, dispersiva y no lineal. Es aplicable tanto en la segunda como en la tercera ventana óptica, ya que están incluídas las dispersiones lineal y cuadrática, respectivamente. Nuestro objetivo es resolver esta ecuación en forma exacta. Veremos que esto siempre es posible en el caso en que $C\Gamma = 0$.

2. Solución de la ecuación de propagación de pulsos en una fibra óptica dispersiva y no lineal

Buscamos soluciones exactas de la Ec. (8) en la forma

$$q = q(\xi,\tau) = K\exp(i(r\tau + s\xi)), \tag{9}$$

en donde $K \neq 0$, r y s son constantes reales por determinar. Sustituyendo (9) en (8) resulta :

$$CK^2 + \gamma r^3 + s - k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)r^2 + iC\Gamma K = 0. \tag{10}$$

Igualando a cero parte real e imaginaria en (10) se llega al sistema

$$\begin{cases} 2CK^2 + r^2 + 2s + 2\gamma r^3 + s - 2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)r^2 = 0. \\ C\Gamma K = 0. \end{cases} \tag{11}$$

De la segunda ecuación de (11) se sigue que $C\Gamma = 0$. Por lo tanto, si $C\Gamma \neq 0$, no es posible encontrar una solución de la Ec. (8) en la forma (9) a menos que $K = 0$, lo cual nos da la solución trivial $q = 0$.

2.1. Primer caso: $C = 0$

La primera ecuación de (11) se reduce a

$$r^2 + 2s + 2\gamma r^3 + s - 2k_0\beta^{-1/3}r^2 = 0, \tag{12}$$

de donde

$$s = k_0\beta^{-1/3} - \frac{1}{2}r^2(1 + 2r\gamma). \tag{13}$$

La Ec. (8) toma la forma

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - i\gamma\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} + k_0\beta^{-1/3}q = 0. \tag{14}$$

y una solución exacta de la misma viene dada por

$$q = q(\xi,\tau) = K \times \exp\left(i(r\tau + \left[k_0\beta^{-1/3} - \frac{1}{2}r^2(1 + 2r\gamma)\right]\xi)\right). \tag{15}$$

Los valores de K y r son arbitrarios.

2.2. Segundo caso: $C \neq 0$

Se debe tener $\Gamma = 0$. Despejando K en la primera ecuación de (11) resulta :

$$K = \pm\sqrt{\frac{2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2) - r^2 - 2s - 2\gamma r^3}{2C}}. \tag{16}$$

Escogemos r y s sujetos a la condición

$$\frac{2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2) - r^2 - 2s - 2\gamma r^3}{2C} > 0. \tag{17}$$

De esta manera, si $C \neq 0$ y $\Gamma = 0$, la Ec. (8) se convierte en

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - i\gamma\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} - C\left|q\right|^2 q + k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)q = 0. \tag{18}$$

y una de sus soluciones exactas es

$$q = q(\xi,\tau) = \pm\sqrt{\frac{2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2) - r^2 - 2s - 2\gamma r^3}{2C}} \times \exp(i(r\tau + s\xi)), \quad (19)$$

en donde r y s son arbitrarios, pero se escogen de modo que se satisgaga la condicion (17).

Hemos encontrado soluciones con amplitud constante para el caso en que $C\Gamma = 0$. Ahora buscaremos soluciones de la Ec. (8) en la forma

$$q = q(\xi,\tau) = u(k(\tau + \lambda\xi))\exp(i(r\tau + s\xi)), \quad (20)$$

en donde $u = u(x)$, $x = k(\tau + \lambda\xi)$ es una función no constante desconocida de valor real y $k \neq 0$, λ, r y s son constantes reales por determinar. Sustituyendo (20) en (8) resulta:

$$k^2(1+6r\gamma)u''(x) - \left(r^2 + 2\gamma r^3 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)\right)u(x) - 2Cu^3(x) - i\left[2\gamma k^3 u'''(x) - 2k(r + 3r^2\gamma + \lambda u'(x) - 2C\Gamma u(x)\right] = 0. \quad (21)$$

Igualando a cero parte real e imaginaria en (10) se llega al sistema

$$\begin{cases} k^2(1+6r\gamma)u''(x) - \left(r^2 + 2\gamma r^3 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)\right)u(x) - 2Cu^3(x) = 0. \\ 2\gamma k^3 u'''(x) - 2k(r + 3r^2\gamma + \lambda)u'(x) - 2C\Gamma u(x) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

De la segunda Ec. de (22) se sigue que $u(x)$ satisface la ecuación lineal

$$2\gamma k^3 u'''(x) - 2k(r + 3r^2\gamma + \lambda)u'(x) - 2C\Gamma u(x) = 0. \quad (23)$$

Si en la Ec. (23) hacemos $\gamma = 0$, $\lambda = -r$ y $C\Gamma = 0$, vemos que ella se satisface *independientemente* de $u(x)$. Para hallar $u(x)$ debemos resolver la primera ecuación del sistema (22), es decir,

$$k^2 u''(x) - \left(r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)\right)u(x) - 2Cu^3(x) = 0. \quad (24)$$

Dado que $C\Gamma = 0$, consideraremos dos casos.

2.3. Caso I: $C = 0$

La Ec. (24) toma la forma

$$k^2 u''(x) - \left(r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}\right)u(x) = 0. \quad (25)$$

Esta ecuación es lineal. Su solución general viene dada por

$$u(x) = c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}}}{k}x\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}}}{k}x\right), \quad (26)$$

en donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitarraias y r y s se escogen de forma que

$$r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3} > 0. \quad (27)$$

Al ser $\gamma = C = 0$, la Ec. (8) toma la forma

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + k_0\beta^{-1/3}q = 0. \quad (28)$$

y una solución exacta de la misma viene dada por

$$q = q(\xi,\tau) = [c_1\exp(\eta) + c_2\exp(-\eta)]\exp(i(r\tau + s\xi)), \quad (29)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}}}{k}(k(\tau - r\xi)), \quad (30)$$

en donde r y s son arbitrarios, pero se escogen de modo que se satisfaga la condicion (27).

2.4. Caso II: $C \neq 0$

Debemos resolver la Ec. (24). Multipliquémosla por $u'(x)$ e integrémosla:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{C}{k^2}u^4(x) + \frac{r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)}{k^2}u^2(x) + c_1, \quad (31)$$

en donde c_1 es la constante de integración. Esta es una ecuación en variables separables. Su solución general se puede expresar en términos de la función elíptica sn(x,m) de Jacobi. Para obtener una solución en términos de funciones elementales, hacemos $c_1 = 0$. Al integrar la ecuación resultante obtenemos la siguiente solución

$$u(x) = \pm\frac{4kD}{\exp(D(x-E)) - 4C\exp(-D(x-E))}, \quad (32)$$

en donde E es la constante de integración y

$$D = \frac{1}{k}\sqrt{r^2 + 2s - 2k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)}. \quad (33)$$

Al ser $\gamma = \Gamma = 0$, la Ec. (8) toma la forma

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - C|q|^2 q + k_0\beta^{-1/3}(1-C^2)q = 0. \quad (34)$$

y una solución exacta de la misma viene dada por

$$q = q(\xi,\tau) = \pm\frac{4kD}{\exp(D\left[k(\tau - r\xi) - E\right]) - 4C\exp(-D\left[k(\tau - r\xi) - E\right])}\exp\left(i(r\tau + s\xi)\right). \tag{35}$$

En particular, para $C = 1$, $E = k\xi_0$ la función

$$q = q(\xi,\tau) = \pm\frac{4\sqrt{r^2+2s}}{\exp(\sqrt{r^2+2s}(\tau - r\xi - \xi_0)) - 4\exp(-\sqrt{r^2+2s}(\tau - r\xi - \xi_0))}\exp\left(i(r\tau + s\xi)\right). \tag{36}$$

es una solución de la ecuación

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - |q|^2 q = 0. \tag{37}$$

y para $C = -1$, $E = k\xi_0$ la función

$$q = q(\xi,\tau) = \pm\frac{4\sqrt{r^2+2s}}{\exp(\sqrt{r^2+2s}(\tau - r\xi - \xi_0)) + 4\exp(-\sqrt{r^2+2s}(\tau - r\xi - \xi_0))}\exp\left(i(r\tau + s\xi)\right). \tag{38}$$

es una solución de la ecuación

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = 0. \tag{39}$$

3. Análisis de los resultados

Hemos obtenido soluciones exactas de la Ec. (8) por medio de una transformación de onda en el caso en que $C\Gamma = 0$, es decir, hemos resuelto la siguiente ecuación :

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - i\gamma\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} - C|q|^2 q + k_0\beta^{-1/3}(1 - C^2)q = 0. \tag{40}$$

En nuestro análisis, en el caso en que $C \neq 0$, tomamos $\Gamma = 0$, es decir $\alpha = 0$, de modo que la atenuación de la fibra es nula o bien ésta puede ser controlada vía amplificación fotónica mediante el uso de amplificadores EDFA. Esto ocurre en el caso de trabajar en 1.55 μm. Vimos que es posible encontrar soluciones con amplitud constante en la forma $q = q(\xi,\tau) = K\exp(i(r\tau + s\xi))$ para cualquier valor de γ independientemente de si C es o no igual a cero.

Existen soluciones con amplitud no constante en la forma $q = q(\xi,\tau) = u(k(\tau + \lambda\xi))\exp(i(r\tau + s\xi))$ siempre y cuando $\gamma = 0$, lo cual ocurre en el caso en que el término de dispersión cúbica sea insignificante, lo cual es válido en la tercera ventana óptica. La ecuación correspondiente es

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - C|q|^2 q + k_0\beta^{-1/3}(1 - C^2)q = 0. \tag{41}$$

El efecto de la quiralidad viene dado a través del coeficiente $C = 1 - \zeta k_0$, siendo ζ el parámetro quiral. Cuando $C \neq 0$ dos casos particularmente interesantes son $C = +1$ y $C = -1$, lo cual corresponde a anular el último término en la Ec. (40).

Si $C = +1$ se obtiene la ecuación de Schrodinger para una fibra convencional y sin quiralidad. La ecuación correspondiente es

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - |q|^2 q = 0. \tag{42}$$

Esta ecuación es válida en la tercera ventana óptica donde una fibra óptica convencional tiene mínimas pérdidas y donde la dispersión de tercer orden es muy pequeña. La Ec. (42) muestra que a través de una adecuada comhinación entre el formato del pulso, su intensidad máxima y su anchura, las no linealidades tipo Kerr, $|q|^2 q$ (ensanchamiento espectral) pueden compensar exactamente la dispersión de la velocidad de grupo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}T$$

(ensanchamiento temporal), lo cual signilica que el pulso se propagará por la fibra sin ningún cambio (distorsión). Estos pulsos son conocidos como ondas solitarias solitones (ver Ec. (36)).

Ahora bien, si $C = -1$ la Ec. (41) se transforma en

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = 0, \tag{43}$$

la cual es equivalente a la de propagación solitónica (42), pero con cambio de signo para el término no lineal (ver Ec. (38)). Esto significa que para obtener propagación solitónica en una fibra con quiralidad será necesario que la fibra óptica trabaje en la zona de dispersión normal ($\lambda < 1.3$ μm), al contrario de lo que sucede en una fibra no quiral, donde el fenómeno se produce en la región de dispersión anómala ($\lambda > 1.3$ μm).

Finalmente, cuando $C = 0$ (lo que equivale a anular el coeficiente de quiral, de modo que $\zeta = 1/k_0$) la Ec. (40) toma la forma

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - i\gamma\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} + k_0\beta^{-1/3}q = 0, \tag{44}$$

la cual es una ecuación lineal. Esto significa que un canal óptico conformado por fibra quiral dispersiva, no lineal y con pérdidas, puede transformarse en un canal sólo dispersivo anulándose por lo tanto las pérdidas y las no linealidades gracias al efecto de la quiralidad.

Otras consideraciones acerca de la ecuación de Schrodinger y sus aplicaciones en óptica se pueden consultar en [2-10].

4. Conclusiones

Mediante el uso de una transformación de onda logramos obtener soluciones exactas para la ecuación de Schrödinger asociada a la fibra óptica quiral en el caso en que $C\Gamma = 0$, lo cual corresponde a la Ec. (40). En el caso en que $C\Gamma \neq 0$, la única solución en forma de onda viajera es la trivial. Pensamos que algunas de las soluciones presentadas son nuevas en la literatura y que las mismas pueden ayudar a entender los procesos físicos asociados a una fibra óptica con quiralidad.

1. M. Zamorano L., H. Torres S., and C. Villarroel G, *Ecuación de Schrödinger para una fibra óptica quiral Rev. Mex. Fís.* **46** (1) (2000) 62-66.
2. L. Poladian *et al., Pure charal optical fibers*, Optics Express **19**(2) (2011) 968-980.
3. Y. Cao *et al., Guided modes in chiral fibers* Josa B., **28** (2011) 319-324.
4. Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal, *Optical Solitons-From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press 2003).
5. J.K. Shaw, *Mathematical principles of Optical Fiber Communications* (SIAM 2004).
6. G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Third Edition Academic Press 2001).
7. P.B. Banerjee, *Nonlinear Optics-Theory, Numerical Mod3eling and Applications* (Marcel Dekker Inc. 2004).
8. A.L. Maimistov, A.M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves* (Kluwer, 1999).
9. L.F. Mollenauer, J.P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers* (Elsevier Academic Press 2006).
10. G.P. Agrawal, *Applications of Nonlinear Optics,* Associated Press(2007).