

La abertura de una lente, su efecto en el espectro de difracción convolutivo, frecuencia espacial y viñeteado

E. Andrés-Zárate^{a,b} y A. Cornejo-Rodríguez^b

^aUniversidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB,

Carr. Cunduacán–Jalpa, Km. 1.5, Tabasco, 86680 México.

^bInstituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,

Apartado Postal 51 Y 216. Puebla, Pue. 72000 México,

email: speklelaser@yahoo.com.mx; acornejo@inaoep.mx

Recibido el 22 de noviembre de 2010; aceptado el 5 de octubre de 2011

El objetivo del trabajo presentado fue determinar los modelos matemáticos de difracción de frecuencia espacial, uno paraxial y el otro no paraxial. El estudio se realizó considerando el efecto que produce la abertura finita de una lente esférica sobre un haz de luz difractado que incide en ella, empleando conceptos de la óptica geométrica; y de la óptica física, como la propagación del espectro angular interpretado como un campo de *difracción convolutivo* de ondas monocromáticas. El análisis se centró en la propagación del campo eléctrico de ondas monocromáticas difractadas por un objeto extendido, desde el plano x_0y_0 hasta el plano de incidencia xy de la lente referida; el objeto fue iluminado con ondas planas, y se situó a una distancia finita de la lente esférica. Como resultados se obtuvieron los modelos matemáticos de espectros de difracción de frecuencia paraxial y de máxima frecuencia espacial; a partir de dicha formulación se determinaron las expresiones para las frecuencias espaciales máxima y paraxial, que debe aceptar la pupila de entrada con respecto a las dimensiones que debe poseer el objeto difractor extendido, para minimizar el efecto de viñeteado.

Descriptor: Lente; espectro angular; difracción; viñeteado; pupila.

We present two diffraction models considering spatial frequencies, one paraxial and the other non-paraxial, to study the effect of the finite aperture of a lens used as transformer of the diffracted light. We use concepts of both geometrical and physical optics as the propagation of the angular spectrum as a *convolved diffracted* field of monochromatic waves. The analysis is based on the propagation of a diffracted monochromatic electric field produced by an object, located in a perpendicular plane to the propagation path, and placed at a finite distance of a transformer lens. We obtained a set of equations for the paraxial and maximum spatial frequencies accepted by the entrance pupil, associated to the lens, with respect to the size of the diffracting object, in order to reduced the vignetting.

Keywords: Lens; angular spectrum; diffraction; vignetting; pupil.

PACS: 42.30.Ms; 46.40.-f; 47.11.Fg; 62.30.+d

1. Introducción

Cuando un objeto difractor extendido se sitúa a una distancia d_o de una lente esférica convergente, como se ilustra en la Fig. 1, uno de los principales problemas que surge en la propagación del campo de difracción producido por el objeto extendido y que incide sobre la lente referida es el efecto de viñeteado y la captación de una frecuencia espacial máxima asociada al espectro de difracción [1,2]. Esto se debe tanto a las dimensiones lineales del objeto extendido, como a las limitaciones que impone la abertura finita de la pupila asociada a la lente esférica. Goodman [1] publicó en su libro tres modelos de difracción con el uso de lentes delgadas para generar distribuciones de la transformada de Fourier en amplitud e intensidad. En el primer modelo, propuso que el objeto debe colocarse a la distancia d_o de una lente delgada usada como transformadora, conocido como plano objeto, que se define de acuerdo como se produce la iluminación del objeto referido. Mediante la propagación del espectro angular determinó el modelo de difracción de transformada de Fourier de frecuencias paraxiales e hizo mención del efecto de viñeteado que se produce, más no presenta un modelo matemático que confirme las frecuencias espaciales máximas que debe acep-

tar la pupila de salida asociada a la lente delgada, pero estableció que la función de pupila debe escalar para obtener resultados más apropiados. Hecht y Zajac [2] documentaron que debido a las dimensiones finitas de la lente delgada, la pupila asociada a ella debe de producir un patrón de difracción de frecuencia espacial de valor máximo, pero tampoco proponen la creación de un modelo matemático que permita determinar dicho valor.

Por su parte Herman [3] en su trabajo sobre el efecto de viñeteado en la respuesta al impulso por una lente delgada como sistema lineal, demostró que en general para un procesador óptico coherente, la integral de convolución siguiente

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, u) f(u) du$$

no puede aplicarse, porque la respuesta al impulso sería sensible a la posición de entrada; también estableció que lo más deseable es que la respuesta de entrada debería ser invariante a la posición del impulso, esto implica que el ancho de banda en el plano de la transformada de Fourier debe ser limitado y habrá un equilibrio entre el tamaño de entrada y el ancho de banda. Por su parte McCutchen [4] demostró que cuando una

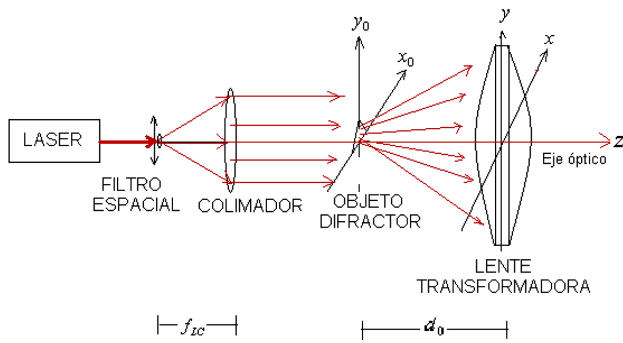


FIGURA 1. Arreglo para producir los campos de difracción usando una lente convergente o transformadora. f_{LC} : distancia focal de la lente colimadora; d_0 : distancia objeto difractor – lente transformadora.

lente produce una imagen de una fuente puntual el patrón de difracción tridimensional resultante es la transformada de Fourier tridimensional de una generalización de la abertura de una lente delgada. Otros autores como Gaskill [5], Yu [6] y Ersoy [7] en sus libros, también hicieron referencia a la creación de modelos de difracción, mediante el uso de lentes delgadas como transformadoras; más no realizan un análisis ni proponen modelos matemáticos para analizar el efecto de viñeteado y la frecuencia espacial máxima.

Kelly *et al.*, [8] en su trabajo sobre efectos de la abertura finita para sistemas de transformada de Fourier con iluminación coherente, analizaron el efecto de iluminación de un objeto extendido, situado en el plano de salida y a la distancia d_0 de una lente esférica delgada, con ondas no perfectamente esféricas producidas por dicha lente. El análisis lo centran en la transformada de Fourier escalada. Brainis *et al.*, [9] mostraron que la distribución de intensidad era distorsionada cuando la imagen producida por una lente convergente delgada era la de un objeto extendido. Mientras que Kehar *et al.*, [10] propusieron un análisis de la influencia del astigmatismo y desenfocamiento sobre el efecto de un haz singular, haciendo uso de la ecuación integral de Fresnel-Kirchhoff y una lente esférica delgada como transformadora.

Como se ve el estudio del fenómeno de difracción y su propagación se ha hecho sólo a través de lentes delgadas. Sin embargo la información sobre los modelos matemáticos de difracción, que permitan el estudio del efecto de viñeteado y la máxima frecuencia que acepta y debe propagar una lente esférica, solo se ha localizado en lo publicado por Herman [3] en cuyo trabajo no se presenta un análisis como el que se documenta a través de este artículo. Por lo que, el objetivo de esta publicación es reportar dos modelos matemáticos, mediante el estudio teórico sobre el efecto de la abertura finita de una lente esférica convergente, en la evolución del espectro angular interpretado como un campo de difracción convolutivo de ondas monocromáticas. En este trabajo se presentan resultados respecto a la disminución significativa del efecto de viñeteado y de la propagación de una máxima frecuencia espacial.

2. Teoría

Con el fin de producir el modelo matemático de difracción, cuya distribución se realiza en el plano xy justo a la entrada a la lente esférica convergente, como se ilustra en la Fig. 1. El análisis se centra en las ondas difractadas por una transparencia rectangular de ancho l_1 y de altura l_2 , a la que se le asocia la función de transmitancia $t_0(x_0, y_0)$, situada en el plano x_0y_0 , además suponemos que dicho objeto se encuentra a la distancia focal frontal de la lente esférica, es decir, cumple la condición $d_0 = f_{df}$ y es iluminado con ondas planas monocromáticas de amplitud constante E_0 . La distribución del campo difractado por el objeto será $E_1(x_0, y_0)$ y es definido mediante la siguiente expresión,

$$E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0). \tag{1}$$

El campo propagado del plano x_0y_0 hasta el plano xy , que incide sobre la lente, posee la distribución de amplitud compleja siguiente [1]:

$$E_{d_0}(x, y) = \frac{e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} E_1(x_0, y_0) \otimes e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2+y^2)}, \tag{2}$$

donde el símbolo \otimes significa convolución y puede ser escrita como una doble integral [5,11], por lo que la Ec. (2) se transforma en

$$E_{d_0}(x, y) = \frac{e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_0, y_0) \times e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi(\frac{x}{\lambda d_0}x_0 + \frac{y}{\lambda d_0}y_0)} dx_0 dy_0. \tag{3}$$

Una mejor interpretación del campo difractado dado por la Ec. (3), se obtiene al definir las frecuencias espaciales paraxiales en la forma siguiente:

$$u_1 = \frac{x}{\lambda d_0}; \quad v_1 = \frac{y}{\lambda d_0}. \tag{4}$$

De manera que al sustituir la Ec. (4) y la Ec. (1) en la Ec. (3) se obtiene,

$$G_l(u_1, v_1) = \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik\lambda d_0}{2}(u_1^2+v_1^2)} \times \mathfrak{S} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} \right\}_{u_1=\frac{x}{\lambda d_0} \quad v_1=\frac{y}{\lambda d_0}}. \tag{5}$$

La Ec. (5) se interpreta como el espectro de difracción de frecuencias espaciales paraxiales (u_1, v_1) o la transformada de Fourier del producto de dos funciones, de las ondas propagadas una distancia d_0 desde el plano objeto x_0, y_0 hasta el plano x, y justo a la entrada de la lente; adicionalmente está desfasado en $\pi/2$, información que se obtiene del factor i^{-1} . Mientras que el factor $\exp\{i(k\lambda d_0/2)(u_1^2 + v_1^2)\}$ determina la fase del espectro que se distribuye en una esfera más no en el plano u_1, v_1 .

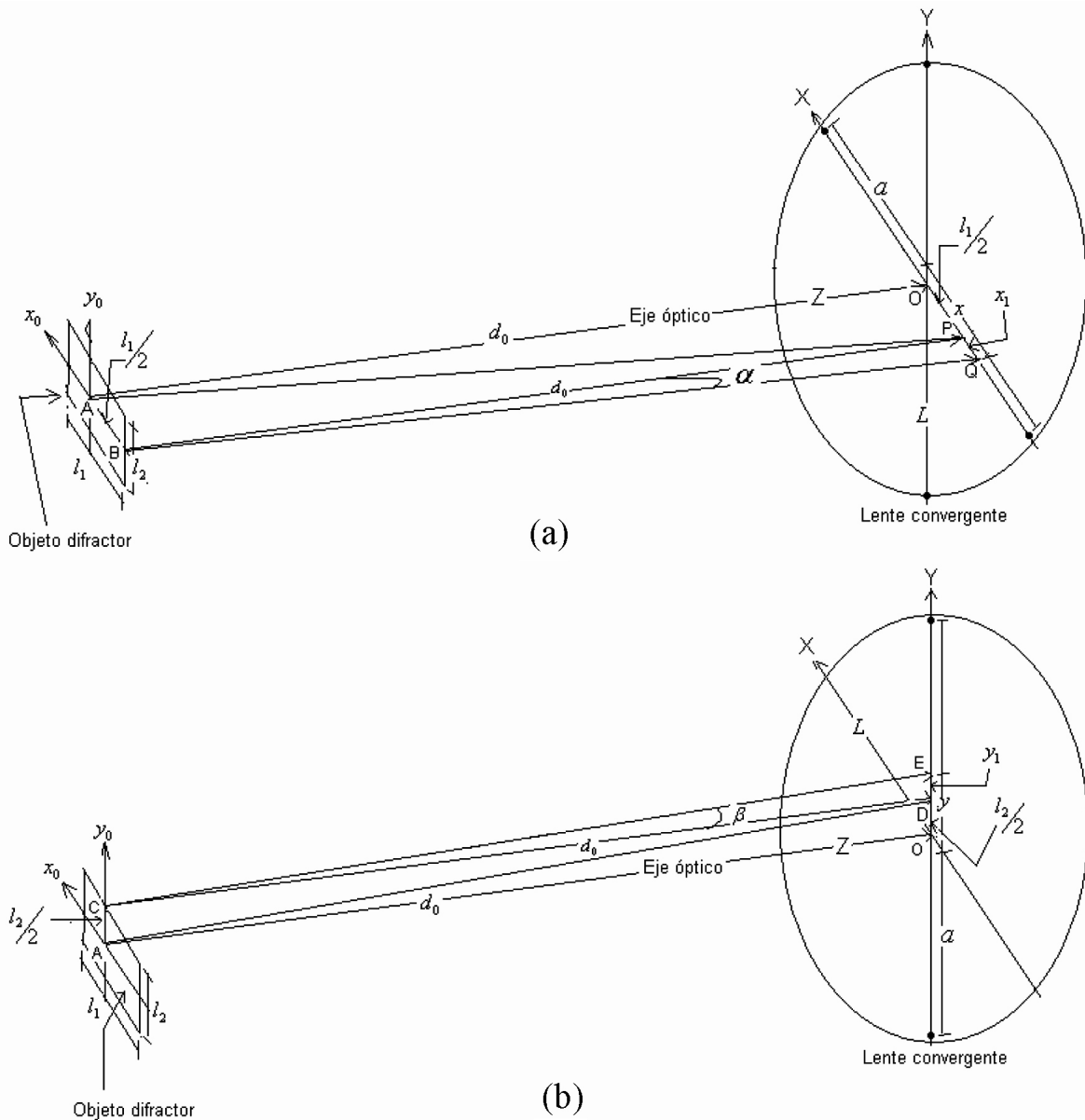


FIGURA 2. Geometría para determinar las frecuencias u_1 y v_1 espaciales paraxiales, (a) en el eje X y (b) en el eje Y.

Como ya se comentó, tanto Goodman [1], Hecht y Zajac [2] y Herman [3] argumentaron que el viñeteado y la aceptación de una máxima frecuencia espacial es el efecto que produce la limitación de la sección eficaz impuesta por la apertura finita de una lente esférica. Esto lleva a realizar un análisis de la relación que existe entre la frecuencia espacial máxima, el ancho l_1 , el largo l_2 del objeto difractor y el radio a de la pupila asociada a la lente esférica convergente. Para investigar esta relación, las frecuencias espaciales u_1 y v_1 de las Ecs. 4, se redefinirán de la manera siguiente. Considerando los triángulos AOQ y AOE de las Fig. 2a y 2b, respectivamente, se obtienen las fórmulas

$$u_1 = \frac{\theta_1}{\lambda} \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{\theta_2}{\lambda}; \quad (6)$$

cuyas unidades son lin/mm . Pero además si los parámetros x_1, y_1, l_1 y l_2 son de pequeña magnitud con respecto a la distancia d_0 del objeto a la lente, entonces

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 \approx \theta_1 &= \frac{x}{d_0} = \frac{x_1 + l_1/2}{d_0}; \quad \text{y} \\ \tan \theta_2 \approx \theta_2 &= \frac{y}{d_0} = \frac{y_1 + l_2/2}{d_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora, si definimos las frecuencias espaciales máximas o no paraxiales, en términos de los cosenos directores [1], esto es:

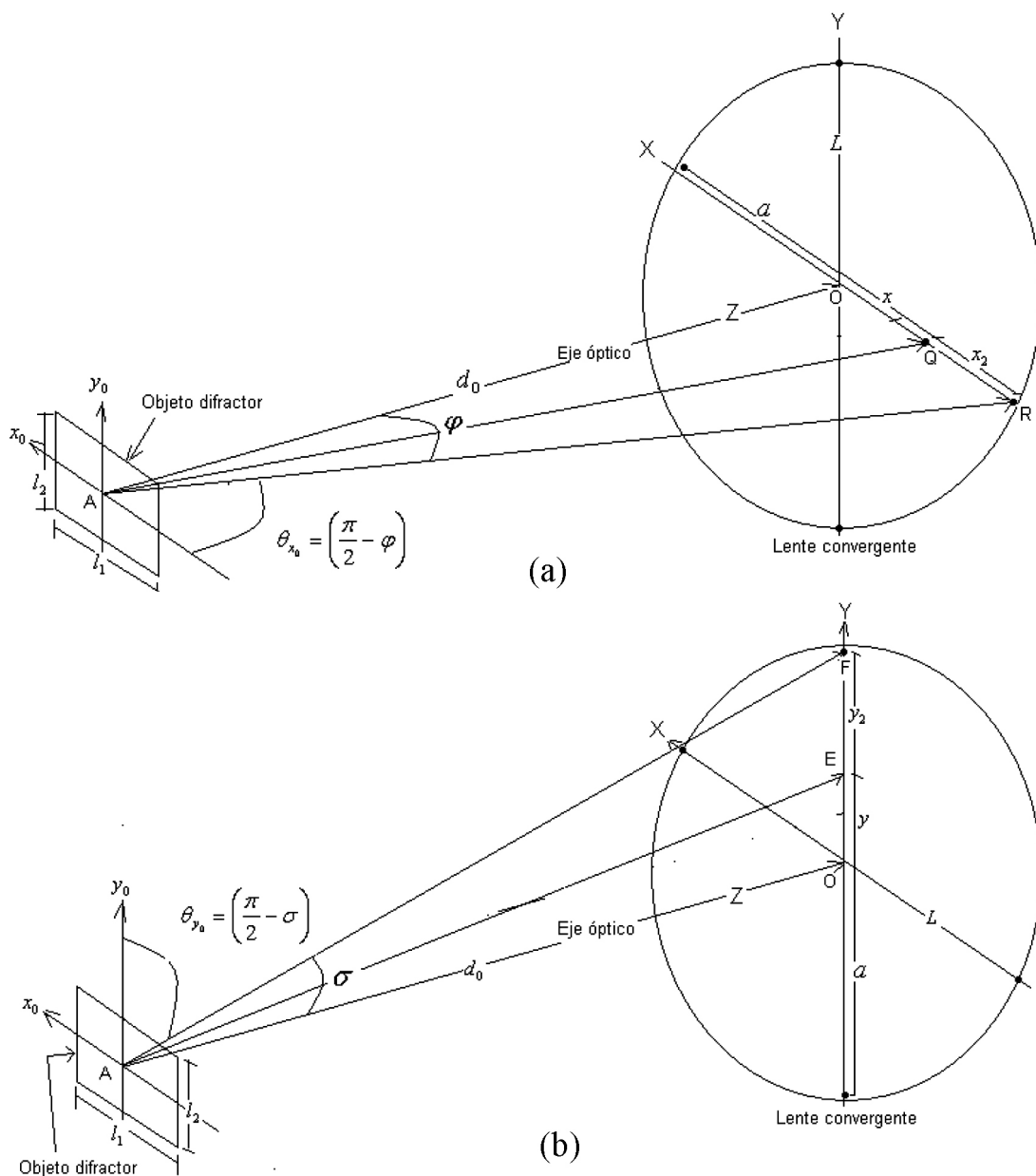


FIGURA 3. Geometría para determinar las frecuencias espaciales máximas \$u_{max}\$ y \$v_{max}\$, (a) en el eje X y (b) en el eje Y.

$$u_{max} = \frac{\cos \theta_{x_0}}{\lambda} \quad \text{y} \quad v_{max} = \frac{\cos \theta_{y_0}}{\lambda}, \quad (8)$$

donde \$\theta_{x_0}\$ y \$\theta_{y_0}\$ en las Ecs. (8) son los ángulos que forman los rayos provenientes del objeto e inciden en el límite de la pupila, respecto a cada uno de los ejes coordenados \$x_0\$, \$y_0\$, respectivamente. Los ángulos mencionados, sin embargo, se pueden relacionar con los ángulos \$\varphi\$ y \$\sigma\$ a través de una identidad trigonométrica; por lo tanto, de las Figs. 3a y 3b considerando los triángulos AOR y AOF, respectivamente, las frecuencias espaciales máximas dadas por las Ecs. (8) pueden ser escritas como:

$$u_{max} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\lambda} = \frac{\text{sen } \varphi}{\lambda} = \frac{x + x_2}{\lambda \sqrt{(x + x_2)^2 + d_0^2}} = \frac{a}{\lambda \sqrt{a^2 + d_0^2}}; \quad (9)$$

$$v_{max} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \sigma)}{\lambda} = \frac{\text{sen } \sigma}{\lambda} = \frac{y + y_2}{\lambda \sqrt{(y + y_2)^2 + d_0^2}} = \frac{a}{\lambda \sqrt{a^2 + d_0^2}}. \quad (10)$$

En las Ec. (9) y Ec. (10) se supone que los ángulos \$\varphi\$ y \$\sigma\$ no son pequeños, esto implica que las frecuencias espaciales máximas \$u_{max}\$ y \$v_{max}\$ son no paraxiales.

3. Resultados

Como ya se documentó en la introducción, en el libro de Goodman [1] se menciona el efecto de viñeteo, sin una demostración cuantitativa de las relaciones entre la abertura difractora, la pupila y la lente. En tanto que lo realizado por Herman [3], no presentó un análisis como el que se documenta a continuación en este artículo, sobre los efectos de viñeteo. Por lo que, en los siguientes incisos se hace un análisis cuantitativo, del problema del viñeteo y de las frecuencias espaciales paraxiales y máximas permitidas en la lente.

3.1. Frecuencias paraxiales

Un resultado de este trabajo radica en poder calcular las frecuencias espaciales paraxiales, u_1 y v_1 definidas por la Ecs. (4), empleando las Ecs. (6) y (7), de la forma siguiente

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{l_1/2}{\lambda d_0} + \frac{x_1}{\lambda d_0} = u_2 + u_3; \\ v_1 &= \frac{l_2/2}{\lambda d_0} + \frac{y_1}{\lambda d_0} = v_2 + v_3, \end{aligned} \tag{11}$$

donde los parámetros x_1, y_1, l_1 y l_2 , son de magnitud pequeña respecto de la distancia d_0 del objeto a la lente, lo cual implica que las frecuencias $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ son necesariamente de pequeña magnitud. Luego, las frecuencias espaciales

$$u_2 = \frac{l_1/2}{\lambda d_0} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{l_2/2}{\lambda d_0}, \tag{12}$$

se determinan usando los triángulos AOP y AOE de las Figs. 2a y 2b. Mientras que para determinar las frecuencias espaciales

$$u_3 = \frac{x_1}{\lambda d_0} = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{y} \quad v_3 = \frac{y_1}{\lambda d_0} = \frac{\beta}{\lambda}, \tag{13}$$

surge la necesidad de ponerlas en función de los ángulos α y β definidos en los triángulos BPQ y CDE de las Figs. 2a y 2b respectivamente. Como ejemplo numérico, si consideramos al objeto difractor con lados $l_1=2$ mm y $l_2=1$ mm, la distancia al objeto cumple que $d_0 = f_{dff} = 250$ mm. Considerando un láser de Helio-Neón ($\lambda=632$ nm), al sustituir estos valores en las Ecs. (12) se obtienen los valores de las frecuencias espaciales: $u_2=6.3$ lin/mm y $v_2=3.2$ lin/mm. Mientras que las magnitudes de las frecuencias espaciales $u_3=\alpha/\lambda$ y $v_3=\beta/\lambda$ fueron determinadas, proponiendo que el ángulo que las definen cumpla la condición de ser $\alpha \leq 4^\circ$ y $\beta \leq 4^\circ$; se obtiene que $u_3 = 110.62$ lin/mm y $v_3 = 110.62$ lin/mm. Luego, la suma de las frecuencias espaciales u_2, v_2, u_3, v_3 de acuerdo con las Ecs. (11) permiten determinar el valor numérico de las frecuencias espaciales paraxiales, es decir $u_1 = 116.92$ lin/mm y $v_1 = 113.82$ lin/mm.

3.2. Espectro no paraxial

Despejando x, y de las Ecs. (9) y (10), de acuerdo con las frecuencias máximas definidas por estas mismas ecuaciones, permiten reescribir el segundo y cuarto factor exponencial de la Ec. (3) propiciando que el campo de difracción se interprete en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} E_{d_0, \max}(x, y) &= \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2} \left(\frac{[\lambda u_{\max} d_0 - x_2 \sqrt{1 - (\lambda u_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda u_{\max})^2} + \frac{[\lambda v_{\max} d_0 - y_2 \sqrt{1 - (\lambda v_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda v_{\max})^2} \right)} \left(\frac{1}{d_0} \right) \\ &\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i2\pi \left(\frac{x+x_2}{\lambda \sqrt{(x+x_2)^2 + d_0^2}} x_0 + \frac{y+y_2}{\lambda \sqrt{(y+y_2)^2 + d_0^2}} y_0 \right)} dx_0 dy_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Puesto que de la forma funcional de la Ec. (14) no es evidente la interpretación del campo eléctrico asociado a las ondas difractadas y propagadas, se recurre a definir la Ec. (14) como el espectro de difracción, con solo sustituir en ella las frecuencias máximas espaciales u_{\max} y v_{\max} dadas por la Ec. (9) y la Ec. (10) obteniéndose la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} G_l(u_1, v_1) &= \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2} \left(\frac{[\lambda u_{\max} d_0 - x_2 \sqrt{1 - (\lambda u_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda u_{\max})^2} + \frac{[\lambda v_{\max} d_0 - y_2 \sqrt{1 - (\lambda v_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda v_{\max})^2} \right)} \left(\frac{1}{d_0} \right) \\ &\bullet \mathfrak{F} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} \right\}_{u_{\max}, v_{\max}}. \end{aligned} \tag{15}$$

De acuerdo al teorema de la transformada de un producto de funciones, la Ec. (15) es la convolución de las transformadas de Fourier de la función de transmitancia $t_0(x_0, y_0)$ asociada al objeto difractor con la función $\exp\{i(k\lambda d_0/2)(u_0^2 + v_0^2)\}$ [4,10], es decir,

$$G_{\max}(u_{\max}, v_{\max}) = \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2} \left(\frac{[\lambda u_{\max} d_0 - x_2 \sqrt{1 - (\lambda u_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda u_{\max})^2} + \frac{[\lambda v_{\max} d_0 - y_2 \sqrt{1 - (\lambda v_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda v_{\max})^2} \right)} \left(\frac{1}{d_0} \right) \cdot \left[\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)}\right\} \right]_{u_{\max}, v_{\max}} \quad (16)$$

La Ec. (16) permite establecer que el espectro de difracción incidente en la lente convergente es una función de las frecuencias espaciales máximas u_{\max}, v_{\max} no paraxiales. Es la convolución de las transformadas de Fourier de la función de transmitancia $t_0(x_0, y_0)$ asociada al objeto difractor, con la exponencial $\exp\{i(k/2d_0)(u_0^2 + v_0^2)\}$. El espectro se ha propagado desde el objeto a una distancia d_0 y está desfasado en $\pi/2$, información que se obtiene de los factores $\exp\{i(kd_0)\}$ e i^{-1} , respectivamente. Del segundo factor exponencial se deduce que la fase del espectro se distribuye en una curva cuya forma funcional no es de fácil interpretación, más no se distribuye en el plano $u_{\max}v_{\max}$.

Se debe de hacer énfasis que el espectro de difracción dado por la Ec. (16) existe, siempre que el diámetro de la pupila asociada a la lente sea de mayor tamaño a l_1 y l_2 del objeto difractor; es decir $2a > l_1$ y $2a > l_2$. Para esto, basta recordar que el radio a de la pupila satisface la igualdad siguiente $a = x + x_2 = x_1 + l_1/2 + x_2$ y por simetría se ve que $a = y + y_2 = y_1 + l_2/2 + y_2$, lo que confirma nuestra aseveración. Bajo esta condición la lente convergente aceptará y propagará las ondas difractadas con frecuencias espaciales máximas u_{\max} y v_{\max} respectivamente, y solo parte de la información proveniente de los puntos de la periferia del objeto incide en la lente, con esto se asevera la reducción del efecto de viñeteado. Respecto a las frecuencias máximas Hecht y Zajac [2], en la página 496, solo hacen mención de ellas sin demostración alguna respecto a la relación entre el diámetro de la pupila $2a$ y l_1, l_2 , como aquí se ha demostrado; en tanto que, Goodman [1] en las páginas 106-107 solo mencionó aspectos cualitativos respecto a la propagación del espectro angular de frecuencias paraxiales a través de una lente delgada, más no hace alusión al espectro de frecuencias máximas y tampoco hace referencia al efecto de viñeteo analíticamente.

3.3. Frecuencias espaciales máximas

Otro resultado, se obtiene de la Ec. (9) y de la Ec. (10), de donde se puede determinar que las frecuencias máximas u_{\max} y v_{\max} poseen la misma magnitud, como consecuencia del radio a de la pupila y la simetría de lente esférica convergente, para confirmar esta aseveración, basta considerar las siguientes igualdades.

$$u_{\max} = \frac{a}{\lambda\sqrt{a^2 + d_0^2}}; \quad v_{\max} = \frac{a}{\lambda\sqrt{a^2 + d_0^2}} \quad (17)$$

El cálculo numérico de las frecuencias máximas u_{\max} y v_{\max} , respectivamente, se determinan al considerar una lente con radio de pupila $a = 25$ mm que posee una distancia focal

que cumple la condición de ser igual a la distancia al objeto de la lente referida, esto es $f_{dff} = d_0 = 250$ mm. Si consideramos un láser de Helio-Neón ($\lambda = 632$ nm), al sustituir estos valores en la Ecs. (17) se obtienen que $u_{\max} = 157.5$ lin/mm y $v_{\max} = 157.5$ lin/mm.

3.4. Relación entre la frecuencia angular máxima y paraxial

Un resultado más se puede derivar considerando que el diámetro L de la lente convergente también sea más grande en magnitud a las dimensiones l_1 y l_2 del objeto difractor. Con esta condición, es posible aseverar que el efecto de viñeteado se puede reducir de forma más significativa. Para corroborar esta afirmación, las Ecs. 9 y 10 las escribimos ahora como

$$u_{\max} = \frac{x}{\lambda\sqrt{(x + x_2)^2 + d_0^2}} + \frac{x_2}{\lambda\sqrt{(x + x_2)^2 + d_0^2}}, \quad (18)$$

$$v_{\max} = \frac{y}{\lambda\sqrt{(y + y_2)^2 + d_0^2}} + \frac{y_2}{\lambda\sqrt{(y + y_2)^2 + d_0^2}} \quad (19)$$

Si suponemos que $(x + x_2) \ll d_0$ y $(y + y_2) \ll d_0$, las Ecs. (18) y (19), pueden ser escritas de acuerdo con las Ecs. (4), (6) y (7) en la forma siguiente,

$$u_{\max} = u_1 + \frac{x_2}{\lambda d_0}, \quad (20)$$

$$v_{\max} = v_1 + \frac{y_2}{\lambda d_0} \quad (21)$$

Es decir, las Ecs. (20) y (21) proporcionan un resultado de gran importancia, ya que permiten establecer que las frecuencias espaciales máximas u_{\max} y v_{\max} , están compuestas por las frecuencias espaciales paraxiales u_1 y v_1 , más las frecuencias espaciales no paraxiales, que dependen de los parámetros x_2, y_2, λ , y d_0 antes descritos. Además, los límites cuando $x_2 \rightarrow 0$ y de igual manera cuando $y_2 \rightarrow 0$, se obtienen las frecuencias espaciales paraxiales u_1 y v_1 , como era de esperarse.

3.5. Cálculo alternativo de las frecuencias espaciales máximas

Un resultado más general y alternativo consiste en incluir como parámetro la pupila de entrada de la lente y determinar las frecuencias espaciales máximas u_{\max} y v_{\max} . Este análisis

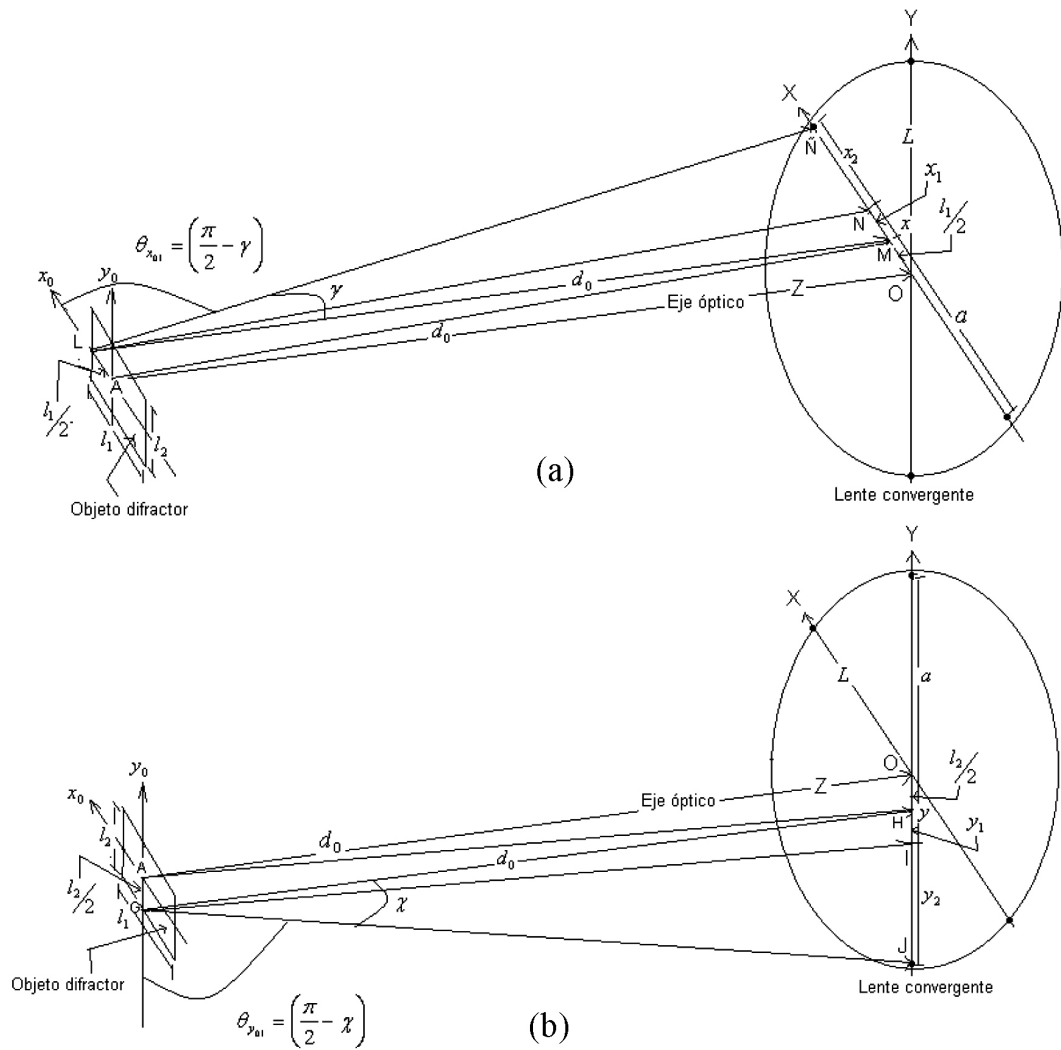


FIGURA 4. Geometría para determinar las frecuencias espaciales máximas u_{max} y v_{max} en forma alterna, (a) en el eje X y (b) en el eje Y.

se basa en la forma de cómo se difracta “angularmente el espectro dentro y en los límites del objeto difractor.” Para esto, se considera la simetría que posee la lente y que las frecuencias paraxiales en los triángulos AOM y LMN de la Fig. 4a son conocidas; así como las contenidas en los triángulos AOH y GHI ver Fig. 4b. De acuerdo a los parámetros de los triángulos LMÑ y GHJ de las mismas figuras, se determina que las ecuaciones para las frecuencias máximas son,

$$\begin{aligned}
 u_{max} &= \frac{l_1/2}{\lambda d_0} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\lambda} \\
 &= \frac{l_1/2}{\lambda d_0} + \frac{x_1 + x_2}{\lambda \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + d_0^2}}; \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{max} &= \frac{l_2/2}{\lambda d_0} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)}{\lambda} \\
 &= \frac{l_2/2}{\lambda d_0} + \frac{y_1 + y_2}{\lambda \sqrt{(y_1 + y_2)^2 + d_0^2}}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

De las Ecs. (22) y (23) se tiene que

$$\theta_{x01} = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \quad \text{y} \quad \theta_{y01} = \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right);$$

de acuerdo a las Figs. 4a y 4b, son los ángulos que forman los rayos con los ejes de coordenadas x_0, y_0 .

4. Conclusiones

De los resultados mostrados y de su análisis en este trabajo, se pueden obtener las siguientes conclusiones sobre el nuevo método de análisis de propagación del espectro angular:

- 1) La característica principal de la metodología empleada, radica en que es fácil de utilizar, además de proporcionar dos métodos para la propagación del espectro angular que incide sobre la lente esférica: bien sea con frecuencia espacial paraxial o frecuencia espacial máxima.

2) La metodología en el análisis de la propagación del espectro angular, presentada en este artículo puede ser empleada en otros modelos de difracción, por ejemplo en un sistema óptico coherente 4f, como el descrito en el capítulo 14 del libro de Hecht y Zajac [2].

rado (Folio UJAT-2008). Agradecemos al Dr. Carlos G. Treviño Palacios su apoyo y valiosos comentarios al contenido de este trabajo. De la misma forma, reconocemos las anotaciones de los árbitros, que nos permitió describir mejor el desarrollo y los resultados del artículo.

Agradecimientos

Uno de los autores (EAZ) agradece al PROMEP y a la UJAT, el apoyo otorgado a través de la Beca para estudios de Docto-

-
- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. J.W. Goodman, <i>Introduction to Fourier Optics</i> 3ª ed. (McGraw Hill, 2005). 2. E. Hecht y A. Zajac, <i>Óptica</i> 1ª reimpresión en español (Addison Wesley Longman, 1998). 3. H. Stephen, <i>Proc. IEEE</i> 57 (1969) 346-347. 4. C.W. McCutchen, <i>J Opt Soc Am</i> 54 (1964) 240-244. 5. J.D. Gaskil, <i>Linear systems Fourier transforms and optics</i> (John Wiley and Sons, 1978). 6. T.S. Yu Francias, <i>Optical information processing</i> (John Wiles and Sons, 1983). | <ol style="list-style-type: none"> 7. O.K. Ersoy, <i>Diffraction, Fourier optics and imaging</i> (John Wiley & Sons, 2007). 8. P.K. Damien, J.T. Sheridan y W.T. Rhodes, <i>Opt. Comm.</i> 263 (2006) 180-188. 9. E. Brainis, C. Muldoon, L. Brandt y A. Kuhn, <i>Opt. Comm.</i> 282 (2009) 465-472. 10. K. Singh, P. Senthilkumaran y R.K. Singh, <i>Opt. Comm.</i> 270 (2006) 128-138 11. P. Athanasious, <i>Systems and transforms with application in optics</i> (Mcgraw-Hill, 1968). |
|--|---|