

Cien años de la función de distribución de Jüttner para el gas relativista

G. Chacón-Acosta

*Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa,
Artificios 40, México D.F. 01120, México,
e-mail: gchacon@correo.cua.uam.mx*

Recibido el 22 de agosto de 2011; aceptado el 31 de enero de 2012

En 2011 se cumple un siglo de que Ferencz Jüttner obtuvo la función de distribución para el gas relativista. Esta distribución estuvo envuelta en una polémica que duró casi un siglo y que estuvo relacionada con las bases de la termodinámica relativista. En el presente trabajo se hace una breve revisión de lo sucedido en estos cien años alrededor de la distribución relativista de Jüttner. Se describe parte del trabajo original de Jüttner, las circunstancias en las que obtuvo su distribución, así como las características particulares de ésta comparadas con la bien conocida distribución de Maxwell-Boltzmann para el gas no relativista en equilibrio. En los apartados finales se mencionan las aplicaciones principales de la distribución de Jüttner desde el trabajo de Chandrasekhar hasta el plasma de quarks y gluones. Se discuten también los desarrollos más recientes que parecen indicar una solución a la polémica en que estuvo involucrada la distribución relativista.

Descriptor: Relatividad especial; termodinámica; teoría cinética de los gases; hidrodinámica.

In 2011 marks a century that Ferencz Jüttner obtained the distribution function for the relativistic gas. This distribution was involved in a controversy that lasted nearly a century and was related to the foundations of relativistic thermodynamics. In this paper it is done a brief review of what happened in the last hundred years around the relativistic Jüttner distribution. It is described part of the Jüttner's original work, the circumstances under which he obtain his distribution as well as the particular characteristics of it compared with those of the well known Maxwell-Boltzmann equilibrium distribution for the non-relativistic gas. In the final sections, there are listed the main applications of the Jüttner distribution, from the work of Chandrasekhar to the quark-gluon plasma. There are also discussed the most recent developments that suggest a solution to the controversy that was surrounded the relativistic distribution.

Keywords: Special relativity; thermodynamics; kinetic theory of gases; hydrodynamics.

PACS: 03.30.+p; 05.70.-a; 51.10.+y; 95.30.Lz

1. La polémica de un siglo

Hace ya un siglo desde que Ferencz Jüttner formuló la generalización relativista de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann para las velocidades un gas formado por partículas en equilibrio [1,2], seguida de su versión cuántica en 1928 [3].

La función de distribución representa el número de partículas que se encuentran, a un tiempo t dado, en un elemento de volumen d^3x alrededor de la posición x , con velocidad en el intervalo d^3v centrado en la velocidad v , [4]. Esta definición es válida tanto en el caso no relativista como en el relativista. Como veremos más adelante, en torno a la versión relativista de la distribución de equilibrio se produjo una controversia que tuvo casi un siglo de duración y que estaba relacionada con la formulación misma de la termodinámica en el régimen de la relatividad especial.

Desde su deducción la distribución de Jüttner fue aceptada por gran parte de la comunidad dedicada al estudio de la mecánica estadística y teoría cinética de la época. Sin embargo desde la década de 1980, se hizo un intento de dar a la mecánica estadística relativista fundamentos cuánticos, para ello se introdujo el concepto de un tiempo universal [5-7]. Este concepto, aunque también se intentó introducir clásicamente [8], va en contra de las ideas centrales de la teoría especial de la relatividad donde no existe un tiempo absoluto: cada observador define un tiempo asociado con su marco de referencia, el tiempo transcurre a ritmos distintos para

diferentes observadores; es por eso que las propiedades de transformación de las cantidades físicas son muy importantes en relatividad. En el enfoque del tiempo universal resulta que la distribución relativista de equilibrio correspondiente, está modificada respecto a la de Jüttner por un factor proporcional al inverso de la energía de las partículas. Esta diferencia resulta muy importante en cuanto a las propiedades de transformación. En relatividad, las transformaciones de Lorentz relacionan cantidades físicas entre distintos marcos de referencia. En particular decimos que ciertas cantidades se transforman como tensores, vectores y escalares o invariantes, dependiendo la forma en la que actúan sobre ellas las Transformaciones de Lorentz [14].

Desde 1969, Nico van Kampen [9] demostró que la función de distribución relativista de Jüttner es un invariante, es decir, aunque puede calcularse desde diferentes marcos de referencia su valor numérico siempre es el mismo. Lo que van Kampen hace es considerar la función de distribución en el marco de referencia donde el gas está en reposo y la escribe en términos de las trayectorias a todo tiempo (es decir, las historias) de cada una de las partículas, de forma tal que, cuando considera otro sistema de referencia que se mueve a una velocidad \mathbf{V} respecto al primero puede efectuar transformaciones de Lorentz a las historias de cada partícula. El resultado final es que la distribución que mide un observador en movimiento tiene el mismo valor que aquella que se mide en el marco comóvil. Esto puede interpretarse como que todos

los observadores están de acuerdo en el valor de la distribución medida en el sistema en particular donde el gas está en reposo, el llamado sistema de referencia comóvil con el gas. En 2001 Fabrice Debbasch y sus colaboradores [10], dan las condiciones precisas de cuando esto sucede. Una manera sencilla [11] de ver esta característica es a través de la definición misma de la función de distribución relativista de equilibrio, la cual representa el número de partículas, en un tiempo t , por unidad de volumen del espacio fase de una partícula $d^3x d^3p$, también llamado espacio μ :

$$N = \int f d^3x d^3p = \int f' d^3x' d^3p' \Rightarrow f(x, p) = f'(x', p'), \quad (1)$$

aquí N es el número total de partículas en el gas, f es la función de distribución relativista, d^3x es el elemento de volumen y d^3p el elemento de volumen del espacio de momentos; además, las cantidades primadas están medidas en un marco de referencia distinto y en movimiento respecto a donde se miden las cantidades no primadas. En la expresión anterior (1) resulta que los factores en las transformaciones de los elementos de volumen se compensan mutuamente [12,13]:

$$\begin{aligned} d^3x' &= \gamma d^3x, \\ d^3p' &= \gamma^{-1} d^3p, \quad \Rightarrow \quad d^3x' d^3p' = d^3x d^3p, \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2},$$

con v la magnitud de la velocidad relativa entre los observadores y c la velocidad de la luz, a γ^{-1} se le conoce como el factor de contracción de Lorentz, ya que es el factor por el cual la longitud de un objeto se contrae a medida que su velocidad se acerca a la velocidad de la luz [14].

Aún así, la distribución proveniente del enfoque de tiempo universal, a la que se ha llamado la distribución de Jüttner modificada, ha vuelto a aparecer en años recientes en los trabajos que desde 2005 realizan Peter Hänggi, Jörn Dunkel y colaboradores. En ellos su objetivo principal fue estudiar la generalización relativista del movimiento Browniano [15-17].

Históricamente el movimiento Browniano se refiere al movimiento errático de una partícula de polen en un medio acuoso que fue observado por primera vez por el botánico inglés Robert Brown en 1827 [18]. Este movimiento fue explicado por Albert Einstein en 1905 [19], Marian von Smoluchowski en 1906 [20] y Paul Langevin en 1908 [21] introduciendo a la física lo que hoy en día se conoce como la teoría de procesos estocásticos. Es importante mencionar que la teoría de Einstein fue confirmada experimentalmente por Jean Perrin en 1909 [22], contribución por la cual recibió el premio Nobel en 1926.

En su trabajo Hänggi y Dunkel proponen una posible descripción de los procesos de difusión en el marco de la relatividad especial [17]. Para ellos el movimiento Browniano relativista se describe a través de una generalización relativista

de la ecuación de Langevin, principal en la teoría de procesos estocásticos. En su versión encuentran que el movimiento Browniano relativista puede describirse de varias formas dependiendo de la definición del proceso estocástico que se considere o bien, a las diferentes parametrizaciones temporales que se utilicen, es decir, si se utiliza el tiempo coordinado o el tiempo propio como parámetros de evolución [17]. Esto les lleva a concluir la existencia de distintas funciones de distribución en el equilibrio, entre ellas la de Jüttner y la de Jüttner modificada [15]. En este punto resulta importante hacer notar que la generalización relativista de la ecuación de Langevin utilizada en Ref. 17 no es única. En Ref. 24 se hace una revisión sobre los diferentes enfoques de los procesos estocásticos relativistas existentes y los problemas abiertos que aún persisten. Uno de los principales problemas es la no existencia de un proceso de Markov en el espacio-tiempo [25], por lo que se utilizan distintas estrategias para abordar el movimiento Browniano en relatividad. Una consiste en trabajar con procesos que no son de Markov y otra en construir procesos de Markov en el espacio fase, esta última fue la estrategia seguida en Ref. 17. En otro cálculo realizado por el autor y Gilberto M. Kremer se encuentra, a partir de la ecuación de Boltzmann relativista, una única ecuación de tipo Fokker-Planck para el movimiento Browniano [23]. Esta ecuación está bien definida por ser en el espacio fase y además podría considerarse más robusta al estar basada en principios cinéticos. En este caso la única distribución en equilibrio es la de Jüttner. Por otra parte, el grupo de Hänggi también se dio cuenta de que la distribución modificada aparecía cuando se consideraban entropías y medidas de integración distintas a las usuales lo cual puede suceder al considerar distintas simetrías [26].

La forma definitiva de saber cuál de estas distribuciones es la correcta es a través de un experimento. Sin embargo, aún no existen experimentos accesibles que permitan hacer esta distinción. No obstante, este problema se ha abordado de diferentes maneras: Por un lado, se ha tratado de enfatizar el carácter relativista del sistema poniendo de manifiesto las propiedades de transformación de las cantidades físicas relevantes en la deducción de la distribución del equilibrio, así como los principios de la teoría cinética de los gases. Esto ha resultado en una versión *manifiestamente covariante* [88] de la distribución de Jüttner, es decir, cualquier observador puede calcular la distribución de velocidades sin ambigüedades; se obtiene la distribución invariante del marco de referencia donde el gas está en equilibrio [27,28]. Por otro lado, el problema parece haberse resuelto realizando experimentos numéricos a través de simulaciones de dinámica molecular para gases relativistas en una [29], dos [30] y tres dimensiones [31,32]. También se ha podido extender el método de Monte Carlo al régimen relativista [33]. El primero de estos trabajos publicado en 2007 (¡96 años después de la aparición del artículo original de Jüttner [1]!) por David Cubero, Peter Hänggi y colaboradores [29], consiste en un modelo unidimensional de una mezcla de dos especies de partículas relativistas que por colisiones relajan al equilibrio termodinámico.

El estudio de este modelo favorece a la distribución de Jüttner como la generalización correcta al régimen relativista de la distribución de velocidades del equilibrio. Más aún, en este trabajo también se da una respuesta al antiguo problema sobre cómo cambia la temperatura entre marcos de referencia que siguen las transformaciones de Lorentz [14]. Los resultados apuntan a que la temperatura es un invariante, un objeto en movimiento no aparece ni más frío ni más caliente. Este resultado está íntimamente ligado al hecho de que el equilibrio se define en el marco de referencia donde el gas está en reposo [27], de esta forma la temperatura adquiere un carácter escalar similar a lo que sucede con la masa de una partícula relativista [34].

En relación con la distribución modificada, en las simulaciones reportadas en Ref. 33 se observa que esta aparece cuando no se considera la conservación de partículas en el gas. Se ha argumentado entonces que la distribución modificada puede ser adecuada para estudiar procesos de creación y aniquilación de partículas o procesos de decaimiento [35,36].

En la última sección retomaremos estos dos enfoques recientes para el estudio de sistemas relativistas de muchos cuerpos. Pero primero haremos una breve revisión del trabajo original de Ferencz Jüttner en un lenguaje moderno. Veremos las diferencias de la distribución de Jüttner comparada con la distribución de Maxwell-Boltzmann. Además, en la parte final describiremos algunos de los sistemas físicos que requieren de una descripción estadística relativista y su importancia actual.

2. Ferencz Jüttner y Max Planck

De acuerdo con la teoría de la relatividad ninguna partícula puede moverse con velocidades mayores a las de la luz $c = 300,000$ km/s. Max Planck se dio cuenta de que dado este principio sería necesaria una modificación a la bien conocida y aceptada función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann ya que esta distribución (como veremos más adelante) no tiene un límite para las magnitudes de las velocidades de las partículas, es decir, pueden tener velocidades infinitas. Planck sugirió este problema a Ferencz Jüttner (1878-1958), físico-matemático de Breslavia (Wrocław, nombre actual en polaco), quién se encontraba en una estancia, que hoy día llamaríamos posdoctoral, en Berlín bajo la supervisión de Planck [37].

Ferencz Jüttner resolvió el problema y publicó los resultados en dos trabajos aparecidos en 1911 en el *Annalen der Physik* cuyos editores eran Max Planck y Wilhelm Wien [38]. El primero de sus trabajos [1], se titula *Ley de Maxwell para la Distribución de velocidades en la teoría de la Relatividad*, en el que explora un gas relativista en un marco en reposo, mientras que en su segundo trabajo *Dinámica de un gas en movimiento en la teoría de la relatividad* [2] publicado en el mismo año, estudia, como indica el título, un gas en un marco de referencia en movimiento. En este último trabajo Jüttner estuvo muy influenciado por las ideas de Planck sobre la

forma en cómo transforman las cantidades termodinámicas como la temperatura [39].

Planck, así como Einstein [40], pensaba que un gas en sistema de referencia en movimiento respecto al observador presentaría una temperatura T menor que la que tendría si estuviera en reposo T_0 , específicamente $T = \gamma^{-1}T_0$. Este fue el comienzo de una discusión que se dio al rededor de 1960, sobre cuál es la correcta transformación relativista de la temperatura, si en realidad los objetos en movimiento se ven más fríos como decían Planck y Einstein [39,40], más calientes [41], o sí la temperatura no cambia [42]. Esta controversia se ha extendido hasta nuestros días y como veremos en la última sección parece ya haber un acuerdo al respecto.

La forma como Jüttner abordó el problema de la distribución del gas relativista fue utilizando un procedimiento de maximización de la entropía como es usual en mecánica estadística [4]. El resultado de este proceso de maximización en el caso del marco de referencia donde el gas se encuentra en reposo puede expresarse en términos de funciones de Hankel con argumento imaginario [43]. En su resultado original Jüttner no utilizó la elegante notación de vectores y tensores en cuatro dimensiones, comunes hoy en día en relatividad especial, aunque en un pie de página menciona que para realizar las sumas o integrales correspondientes es posible usar una notación más concisa utilizando funciones hiperbólicas correspondientes a las coordenadas en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto fue verificado en 1915 por Lewis y Adams [44].

La distribución de Jüttner en una notación más moderna utilizando funciones de Bessel de segunda clase en lugar de funciones de Hankel puede escribirse de la siguiente forma [12,13]

$$f_J = \frac{n}{4\pi kT m^2 c K_2\left(\frac{mc^2}{kT}\right)} e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{kT}}, \quad (3)$$

donde n es la densidad de partículas en el sistema de referencia del gas en reposo, k es la constante de Boltzmann, c la velocidad de la luz, m la masa de las partículas del gas, K_2 es la función de Bessel de segunda especie y en el argumento de la exponencial tenemos a la energía de la partícula relativista dividida por la energía térmica kT . Esta expresión puede parecer un poco complicada de interpretar directamente, sin embargo, puede hacerse un desarrollo en series según el valor del cociente entre la energía en reposo y la energía térmica $\zeta = (mc^2)/(kT)$. Algunos autores como C. Møller [45] llaman a este cociente el parámetro de *enfriamiento relativista*, [37]. Este cociente es pequeño para altas temperaturas y masas despreciables, como es el caso de los fotones, y corresponde al caso ultra relativista ($\zeta \ll 1$). El cociente es grande cuando se tienen temperaturas bajas respecto a la energía en reposo de las partículas, este caso corresponde al límite no relativista ($\zeta \gg 1$), donde (3) se reduce a la distribución de Maxwell-Boltzmann cuando $\zeta \rightarrow \infty$, [46]. Para ver correcciones al comportamiento no relativista cuando $\zeta \gg 1$, puede hacerse un desarrollo asintótico en la función de Bessel $K_2(\zeta)$ que aparece en el denominador de (3), y al mismo

tiempo un desarrollo para bajas velocidades en el argumento de la exponencial de la función de distribución. El resultado es el siguiente:

$$f_J \approx \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \left(1 - \frac{15}{8\zeta} + \dots \right), \quad (4)$$

claramente el término dominante es la distribución de Maxwell-Boltzmann, mientras los términos entre paréntesis son las pequeñas correcciones relativistas. Como ejemplo de lo que sucede con las cantidades termodinámicas relevantes, veamos el caso de la energía interna por partícula, la cual se define como el promedio de la energía de cada partícula pesado por la distribución:

$$e := \frac{1}{n} \int p^0 f d^3p. \quad (5)$$

En el límite no relativista obtenemos

$$e \approx \frac{3}{2}kT \left(1 + \frac{5}{4\zeta} + \dots \right) + mc^2, \quad (6)$$

el término dominante corresponde a la expresión usual del bien conocido teorema de equipartición de la energía, los siguientes términos dentro del paréntesis son las correcciones relativistas, mientras que el último término corresponde a la energía en reposo de la partícula. Este último término es típico en relatividad especial, cuando se desarrolla la energía de una partícula relativista se obtiene la energía en reposo y la energía cinética más correcciones (es la famosa expresión de Einstein $E = mc^2$, [34]).

Ahora bien, el valor del parámetro ζ dependerá del tipo de partículas que se consideren, por ejemplo, para electrones $\zeta \approx 5.9 \times 10^9/T$. Para temperaturas no muy altas $T \approx 1K$, los electrones se comportarían como partículas no relativistas; se necesitarían temperaturas muy, muy altas $T \approx 10^9 K$ para que los efectos relativistas fueran relevantes. Jüttner se dio cuenta de esto desde su primer trabajo donde calculó el parámetro ζ para el helio siendo aproximadamente $\sim 10^{13}/T$, y comentó que incluso cuando se pudiera elevar la temperatura a la que tienen algunas estrellas, la modificación relativista sería muy pequeña. Jüttner no estuvo muy alentado con estos resultados que parecían no tener relevancia en ningún lado.

Diecisiete años después de la publicación de sus primeros resultados, F. Jüttner estudio las estadísticas cuánticas propuestas alrededor de 1924 y 1926 por S. N. Bose y E. Fermi, pero ahora en el régimen relativista. Su trabajo de 1928 se titula *La teoría cuántica relativista del gas ideal*, [3]. En este artículo las expresiones que aparecen están en términos de funciones aún más complejas que las funciones de Bessel. En dicho trabajo sus perspectivas tampoco fueron muy optimistas, comentando que los resultados son esencialmente teóricos. Sin embargo, como veremos más adelante la distribución relativista ha tenido varias aplicaciones, la primera de ellas en la masa límite de las enanas blancas. Antes de esto veamos las características de la distribución de Jüttner del gas relativista.

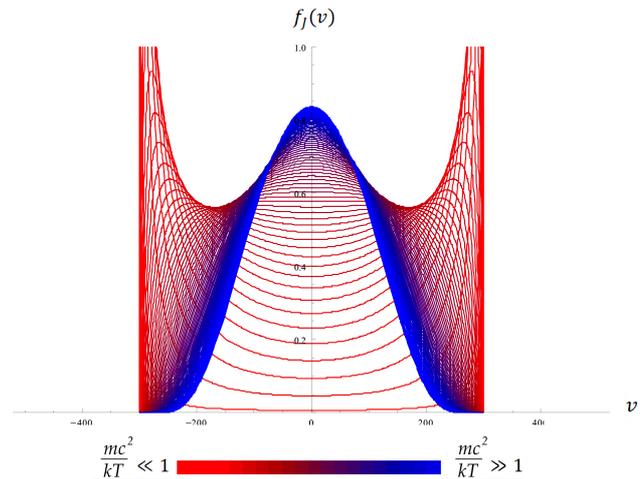


FIGURA 1. Función de Distribución de Jüttner en función de la velocidad para diferentes regímenes de temperatura. El color azul corresponde al caso no relativista $mc^2/kT \gg 1$, en este caso puede apreciarse que la distribución aproxima a la de Maxwell-Boltzmann sin las colas artificiales que superan la velocidad de la luz. El color rojo corresponde al caso ultra relativista $mc^2/kT \ll 1$, conforme la temperatura se acerca al caso extremo, la distribución tiene dos picos en c y $-c$. Los casos intermedios se presentan en gamas de lila y puede apreciarse que es posible aproximar una distribución uniforme.

3. Distribución de velocidades que no superan la velocidad de la luz

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann (término dominante en la Ec. (4)), nos da el número de partículas del gas en cierto momento y posición dados, con cierta velocidad (o ímpetu). Como recordamos esta distribución se obtiene suponiendo que no existen direcciones privilegiadas para las velocidades moleculares [4], por tanto la velocidad más probable es $\mathbf{v} = 0$. Una de las particularidades de esta distribución es que, aún con una probabilidad muy pequeña, podemos encontrar partículas con velocidades mayores a la velocidad de la luz c . Esto se debe a que las colas de la distribución se extienden en principio hasta una velocidad infinita. Como habíamos mencionado antes, Planck ya se había percatado de que, como el principio de la relatividad tiene a la velocidad de la luz como velocidad límite, entonces las contribuciones de las colas de la distribución de Maxwell-Boltzmann son artificios de la aproximación no relativista.

Lo primero que se nos puede ocurrir para ajustar la distribución para que sea compatible con la relatividad especial es cortar las colas de la distribución hasta el valor de $v = c$ y no permitir que existan partículas con velocidades superiores. Precisamente esto es lo que sucede en el límite no relativista de la distribución de Jüttner (curva interna azul Fig. 1). Sin embargo, qué pasa cuando consideramos temperaturas tan altas que el parámetro ζ sea mucho muy pequeño. Como decíamos, este será el límite ultra relativista, en este régimen

las partículas tienen tanta energía que la mayoría tendrán velocidades muy grandes; es decir, en el caso ultra relativista casi no habrá partículas con velocidad cero. Este comportamiento puede apreciarse en las curvas rojas de la Fig. 1.

En esta figura se muestra el cambio continuo de la distribución de Jüttner desde el régimen no relativista, correspondiente a la distribución de Maxwell-Boltzmann truncada por la velocidad de la luz (curva azul), hasta el régimen ultra relativista donde la mayoría de las partículas tienen altas velocidades (curva roja). Conforme ζ va disminuyendo la distribución se va ensanchando hasta un punto en que puede aproximar una distribución uniforme (color lila). Para temperaturas mayores comienzan a formarse unos picos en las orillas de la distribución cuando la velocidad se acerca a c y disminuye el máximo central característico de las distribuciones gaussianas, esto indica que cada vez más partículas tienen velocidades más altas. En el caso extremo $\zeta \rightarrow 0$ todas las partículas tendrán la velocidad de la luz; en la figura esto se representa por las dos líneas verticales (rojas) como deltas de Dirac, cada una indicando direcciones opuestas.

Hay ciertos aspectos que comentar en relación con la distribución de Jüttner. En un gas no relativista la temperatura puede relacionarse con el ancho de la gaussiana. Sin embargo, en el caso ultra relativista esta identificación ya no es clara ¿Cuál es la temperatura de un gas relativista? Richard C. Tolman [47] y más tarde Peter Lansberg [42], encontraron que en relatividad la temperatura ya no es proporcional al promedio de la energía cinética \mathbf{p}^2/m , sino de otra cantidad $\mathbf{p}^2/\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$, que es el cociente entre la magnitud del momento al cuadrado y la energía relativista. Curiosamente se reduce a la energía cinética en el caso no relativista, lo que puede causar confusión al intentar interpretar el denominador como una masa relativista $m\gamma$ (una discusión sobre la energía y la masa relativistas puede consultarse en Ref. 34).

Otro aspecto que es importante enfatizar es que la distribución de Jüttner es un invariante; esto, como ya habíamos mencionado, quiere decir que la distribución se comporta como un escalar ante las transformaciones de Lorentz. Las características mostradas aquí corresponden a cantidades medidas en un sistema de referencia que percibe al gas relativista en reposo. En ese marco de referencia la distribución es isotrópica, en un marco de referencia en movimiento relativo respecto al gas la distribución se vería anisotrópica. Volveremos a este punto en la última sección donde veremos la versión manifiestamente covariante de la distribución relativista.

Se ha visto que la distribución de Jüttner es una distribución isotrópica de tipo hiperbólico. La distribución de Jüttner es un caso particular de ciertas distribuciones de probabilidad sobre el hiperboloide unitario $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, las cuales poseen ciertas propiedades estadísticas bien definidas y se han utilizado en distintas situaciones como la distribución de tamaños de partículas en depósitos de arenas, etc., [48].

Una característica interesante, que el mismo Jüttner señala en su trabajo original [1], es que la distribución del gas relativista no puede factorizarse como un producto de fun-

ciones, cada una función de cada componente independiente del momento, como sucede con la distribución de Maxwell-Boltzmann. En el caso no relativista la distribución puede descomponerse como el producto de tres distribuciones unidimensionales idénticas, relacionadas con la energía aportada por cada grado de libertad. En contraste, como en relatividad especial la distribución está dada por la distribución de Jüttner, podemos apreciar de (3) que dicha factorización es imposible debido, principalmente a que la raíz cuadrada en el argumento de la exponencial no lo permite. Como veremos en la última sección, es reciente la generalización de distribución de Jüttner correcta para dimensiones arbitrarias.

4. ¿Para que sirve la distribución de Jüttner?

El astrofísico Indio Subrahmanyan Chandrasekhar fue el primero en utilizar la distribución de Jüttner para describir un sistema físico con buenos resultados confirmados observacionalmente [50]. En 1931 planteó un modelo para un tipo de estrellas conocido como *enanas blancas*, estas son estrellas densas más calientes que el Sol, aproximadamente 10000 K y muy pequeñas, su diámetro es de alrededor del 5 % el diámetro del Sol. La primera enana blanca de que se tiene registro fue la Sirius B, compañera de Sirius y fue Walter Sydney Adams quien midió su espectro y temperatura [37]. Las enanas blancas tienen características muy interesantes que no son obvias de entender en un primer intento, por ejemplo, como ya se mencionó tienen una densidad muy grande, de doscientos mil veces la densidad del agua, es decir, un centímetro cúbico de esta estrella pesaría 200 kg. Ningún material podría tener esta densidad debido a que existe un espacio interatómico que lo prohíbe, por lo tanto estas estrellas no pueden estar formadas por átomos. Sólo pueden estar formadas por partículas subatómicas, como los electrones. Estos tienen una masa muy pequeña de alrededor de 9.11×10^{-31} kg, unas 2000 veces menor que la de los neutrones y protones lo que favorece al valor del cociente de enfriamiento relativista que en este caso es $\sim 10^{-13}$, de manera que este sistema admite una descripción de un gas relativista. Además, debido a la presión ejercida durante el colapso gravitacional no es posible desprestigiar los efectos cuánticos debido a la interferencia de los electrones [50].

Ciertamente Chandrasekhar se imaginó a la enana blanca como un gas relativista de electrones relativista fuertemente degenerado [12,13], para su descripción utilizó la versión cuántica para fermiones de la distribución de Jüttner. El principal resultado de su trabajo fue el encontrar un límite para la masa de las enanas blancas, a saber, 1.4 masas solares, conocido ahora como el límite de Chandrasekhar, el cual ha sido confirmado ya que no se han observado hasta la fecha enanas blancas de masa superior.

El mayor interés en estudiar la distribución de Jüttner surge en la teoría cinética relativista [12,13]. El objetivo de la teoría cinética es explicar las propiedades macroscópicas de los gases a través de promediar las cantidades microscópicas utilizando una descripción estadística. Es precisamente

la distribución de Jüttner la que se utiliza como base del desarrollo perturbativo, conocido como de Chapman-Enskog, que se utiliza para resolver la ecuación de Boltzmann para sistemas fuera del equilibrio [51], el caso relativista se ha estudiado en Ref. 12, 13 y 52. Esta teoría se ha extendido para tratar el caso general de la interacción gravitacional [53-55]. La teoría cinética relativista tiene aplicaciones importantes en cosmología, astrofísica y física nuclear ya que las especies involucradas en estos sistemas tienen velocidades y energías altas.

De alguna forma, la mayor parte de la teoría cosmológica surge de resolver la ecuación de Boltzmann para el universo en expansión con fotones, neutrinos, materia bariónica y materia oscura [56-58]. En las épocas tempranas en la vida del universo es necesario considerar ciertos procesos disipativos, por ejemplo, en la época del desacoplamiento de la radiación y la materia, o en la época de la nucleosíntesis donde las reacciones ocurren fuera de equilibrio.

Es interesante comentar lo que sucede cuando se estudia la ecuación de Boltzmann en el modelo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, el cual describe un Universo homogéneo e isotrópico en expansión. De la solución a la ecuación de Boltzmann se encuentra formalmente que no existe una solución de equilibrio para la función de distribución de un gas en esa situación [59]. Lo que usualmente se hace es encontrar las condiciones bajo las cuales la distribución de equilibrio se puede utilizar aproximadamente en los cálculos cosmológicos y cómo cuantificar las desviaciones del equilibrio. Por lo tanto en Cosmología es clara la utilidad de la distribución de Jüttner.

Existen ciertos procesos astrofísicos tales como el efecto Sunyaev-Zeldovich donde es de interés estudiar procesos de transporte relativistas. Se conoce como efecto Sunyaev-Zeldovich a la distorsión del espectro del cuerpo negro de la Radiación Cósmica de Fondo (RCF ó CMB por sus siglas en inglés *Cosmic Microwave Background*), producida por la dispersión de Compton de los fotones de la RCF por electrones en los cúmulos de galaxias [60]. Este efecto permite calcular parámetros cosmológicos como la constante de Hubble, el corrimiento al rojo y la presión de los electrones cuando estos son no-relativistas.

La primera ecuación utilizada para describir este efecto fue derivada por Kompaneets en 1956, e involucra procesos de difusión de fotones [61]. Este efecto también ha sido explicado en términos de la intensidad de fotones incidente en una nube de electrones. Utilizando la expresión correcta para la intensidad se han podido encontrar incluso efectos relativistas de manera analítica con métodos elementales de física estadística como lo hicieron Leopoldo García-Colín y Alfredo Sandoval en Ref. 62, recuperando los resultados de Kompaneets.

Las correcciones relativistas de este efecto también encontradas por Itho [63], han permitido medir la temperatura del plasma de electrones y son esenciales para la correcta interpretación de las mediciones. Recientemente se ha podido determinar la distribución correcta de los electrones relacio-

nados con el efecto Sunyaev-Zeldovich, directamente de las observaciones de cúmulos de galaxias con temperaturas altas $\approx 15 \text{ keV}$, donde las correcciones relativistas son relevantes, indicando que la distribución es precisamente la de Jüttner [64]. Esto se logró separando las distorsiones de la RCF causadas por el efecto Sunyaev-Zeldovich de aquellas causadas por el uso de la función de distribución relativista correcta, ya que tradicionalmente se utilizaba una Maxwell-Boltzmann.

Este efecto también ha sido descrito por ecuaciones de difusión relativistas [65,66]. La aproximación de difusión relativista podría aplicarse también a las primeras etapas del Universo, al movimiento de fotones dentro del plasma de los objetos compactos como estrellas y agujeros negros, haces de plasmas ultra relativistas [67] Se ha propuesto para estudiar con este enfoque la evolución de la materia oscura en el universo [68], e incluso la difusión y el movimiento Browniano relativistas también se ha utilizado en diversas propuestas a la gravedad cuántica [69,70].

En experimentos recientes de física nuclear donde se hacen colisionar iones pesados entre sí con velocidades extremadamente altas, como en el RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) y en el LHC (*Large Hadron Collider*), se produce un nuevo estado de la materia, un fluido fuertemente interactuante conocido como el plasma de quarks y gluones [71]. Se piensa que este sistema es el fluido relativista más perfecto que se ha observado teniendo una de las proporciones más bajas para el coeficiente entre la viscosidad de corte y la densidad de la entropía estimada en $(\eta/s) \approx (1/4\pi)$ [72]. Hasta ahora se ha utilizado la hidrodinámica relativista para describir este problema, sin embargo, para comprender a profundidad las características de este sistema hace falta una base teórica más amplia que involucre una hidrodinámica cuántica de tiempos muy cortos.

Otra de las herramientas utilizadas para abordar este sistema ha sido la llamada correspondencia gravedad/fluido o AdS/CFT (del inglés Anti de Sitter/Conformal Field Theory). Con esta se han podido obtener con gran éxito resultados en sistemas de materia condensada usando métodos de teorías gravitacionales en una dimensión espacial mayor [73].

Muy recientemente ante el descubrimiento del grafeno se comenzaron a explorar sus propiedades térmicas y eléctricas. Los electrones en el grafeno, obedecen una relación de dispersión lineal y se comportan como partículas relativistas sin masa y por tanto obedecen una ecuación relativista de Dirac en dos dimensiones espaciales. Así, este sistema proporciona un puente entre la física de materia condensada y la electrodinámica cuántica y abre nuevas perspectivas para la electrónica basada en el carbono [74]. Curiosamente el cociente entre viscosidad y densidad de entropía es menor incluso que en el plasma de quarks y gluones por lo que este material ofrece una oportunidad única para observar las propiedades de transporte de un plasma de partículas ultra relativista a temperaturas moderadamente altas [75,76].

Por otra parte mencionaremos que dados los diversos regímenes que abarca la distribución de Jüttner, se han plan-

teado ideas para aplicarla a la dinámica de mercados en sistemas económicos teniendo mejor control sobre las fluctuaciones [49].

Con todo esto nos damos cuenta que la distribución de Jüttner tiene una diversa gama de aplicaciones, en contraste con lo que el mismo Ferencz Jüttner predecía. Ciertamente es que los sistemas que se han estudiado hasta ahora tienen características muy peculiares y generalmente extremas, sin embargo, las aplicaciones son de mucho interés y en particular, actualmente existen observaciones y experimentos donde la teoría cinética relativista es fundamental para el entendimiento de los fenómenos que ahí ocurren.

5. Resultados nuevos un siglo después

En los últimos años ha habido mucho interés en los sistemas que requieren una descripción macroscópica y la obtención de cantidades térmicas en el régimen relativista: La implementación correcta de métodos estocásticos a procesos relativistas [17], teorías hidrodinámicas consistentes a primer orden en los gradientes [77], hidrodinámicas extendidas [78], la extensión al régimen relativista de métodos de solución numérica como el método de la ecuación de Boltzmann en la red conocida en inglés como *Lattice Boltzmann* [79], etc. Sin embargo, aquí hablaremos de dos resultados directamente relacionados con la distribución de Jüttner.

En primer lugar mencionaremos que se ha podido generalizar la distribución de Jüttner para d dimensiones espaciales y en un lenguaje manifiestamente covariante [27]. Como habíamos dicho esto significa que cualquier observador puede calcular la distribución desde el punto de vista del marco de referencia donde el gas está en equilibrio. Esta versión tiene varias ventajas sobre las anteriores, entre ellas que la invariancia de la distribución es explícita dado que las cantidades involucradas son todas escalares. Se puede demostrar que la forma manifiestamente covariante de la distribución de Jüttner es:

$$f_J = \frac{n}{2c(mc)^d K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} \left(\frac{mc\Theta}{2\pi}\right)^{\frac{d-1}{2}} \exp(-\Theta_\mu p^\mu), \quad (7)$$

donde, en esta ecuación m es la masa de las partículas, c es la velocidad de la luz y n es la densidad de partículas vista en el marco de referencia comóvil en el cual el gas está en reposo. La cantidad Θ es la magnitud de un 4-vector que se introdujo y que está relacionado con el inverso de la temperatura en el marco comóvil de manera análoga a la relación existente entre el 4-momento y la masa en reposo de una partícula relativista [34]:

$$\Theta^2 = \Theta_\mu \Theta^\mu = \frac{c^2}{k^2 T^2}. \quad (8)$$

Esto muestra sin duda, que la temperatura utilizada aquí es un invariante.

Por otra parte, este vector también aparece en el argumento de la exponencial $\Theta_\mu p^\mu$, el cual es claramente invariante.

Por lo tanto su valor puede calcularse en distintos marcos de referencia. Por ejemplo, en el marco donde el gas está en reposo toma el valor (cp^0/kT) , donde $cp^0 = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$ es la energía relativista. Esta expresión se obtiene de la restricción que impone la norma del 4-momento al ser igual a la masa de la partícula multiplicada por la velocidad de la luz: $p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$; a esta restricción se le conoce como la relación de la *capa de masa*. Si por otro lado se calcula el producto $\Theta'_\mu p'^\mu$ en un marco en movimiento se tendría: $\Theta'_0 p'^0 - \Theta' \cdot \mathbf{p}'$, donde Θ'^0 y Θ' son respectivamente las componentes temporal y espaciales del llamado vector térmico Θ_μ . Como habíamos dicho, con las variables del marco en reposo vemos una distribución isotrópica mientras que en el marco en movimiento es anisotrópica. La Ec. (7) al ser un invariante, nos da la función de distribución en el sistema comóvil calculada en cualquier marco de referencia: todos los observadores están de acuerdo que el gas está en equilibrio en su marco en reposo.

Además, esta forma de la distribución de Jüttner se ha aplicado para calcular una versión covariante del teorema de equipartición en d dimensiones. Se conoce como teorema de equipartición de la energía a la relación entre la energía interna y la temperatura y puede expresarse como el cociente de estas; en el caso de partículas no relativistas este cociente es una constante igual a $3/2$ y usualmente se dice que cada grado de libertad del gas contribuye con $kT/2$ a la energía interna, de ahí el nombre de equipartición. Para la radiación el cociente resulta igual a 3, la energía se reparte igualmente en cada grado de libertad. En relatividad resulta que la contribución a la energía se reparte de manera diferente y depende de que tan *relativista* sea el sistema [46]. El cociente antes mencionado en el caso relativista resulta ser función de ζ , el parámetro de enfriamiento relativista, por tanto también es función de la temperatura [80,81]. En Ref. 27 se mostró que el cociente entre la energía interna y la temperatura en el caso relativista puede calcularse en cualquier sistema de referencia, y resulta ser una función del parámetro de enfriamiento relativista y además depende de la dimensión, dicho cociente se denota $F_d(\zeta)$. Esta función toma valores en el intervalo $(d/2) \leq F_d(\zeta) \leq d$. Los valores extremos de $F_d(\zeta)$ corresponden al régimen no relativista y al ultra relativista, respectivamente, según el valor que tome ζ .

Un caso particular interesante es el que analizó recientemente Domingo Louis-Martínez [82]. Él estudió un gas relativista en un marco de referencia acelerado obteniendo, además de la correspondiente distribución de Jüttner con modificaciones debidas a la aceleración, la generalización de la ley de las atmósferas de Perrín, para la presión del gas relativista. Naturalmente esta expresión se convierte en la expresión usual [4] en el límite no relativista.

Quizá la contribución más importante de los últimos años ha sido la implementación del método numérico de dinámica molecular al régimen relativista. El primer caso que se estudió fue en tres dimensiones y se utilizó para validar la hipótesis del caos molecular en gases relativistas [32], sin embargo se utilizó un campo mediador de la interacción. Como es

bien sabido entre partículas relativistas no hay interacciones a menos que exista un campo [83,84], por tanto al hacer la simulación la interacción debe modelarse aproximadamente.

En 2007, David Cubero y colaboradores realizaron la primera simulación numérica de dinámica molecular completamente relativista en una dimensión [29]. Fue para una mezcla de dos especies con masas distintas para permitir al sistema relajarse al equilibrio y se utilizó la aproximación de colisión elástica sin ningún campo mediador de la interacción. La simulación se realizó considerando que después de cada colisión el 4-momento de las partículas se conserva, esto es equivalente a la conservación de momento y energía en el caso no relativista. Sin embargo, como ya vimos, en este caso la capa de masa fija la relación entre energía y el momento de la partícula relativista: $E = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$, y el cálculo de los momentos y energías después de la colisión se vuelve más complicado. (Resulta interesante comentar aquí que el caso general de las colisiones elásticas de dos partículas relativistas fue estudiado también por F. Jüttner haciendo consideraciones puramente mecánicas [85]). Aún así se pudo determinar la distribución del gas relativista tanto en el marco comóvil con el gas, como en un marco en movimiento respecto al gas, realizando mediciones simultáneas en cada sistema de referencia. Ambas simulaciones indicaron que la distribución correcta es precisamente la de Jüttner. Además, con el uso de una versión no manifiestamente covariante del teorema de equipartición debida a Peter Landsberg [42] y previamente establecida por Richard Tolman [47], se determinó numéricamente que la temperatura de un objeto en movimiento no es ni mayor ni menor que en el marco comóvil, esto es, la temperatura es un invariante, lo cual está de acuerdo con los resultados del cálculo analítico covariante. Estos resultados fueron extendidos a dos dimensiones por Afshin Montakhab y colaboradores [30].

Como ya se mencionó, la simulación de dinámica molecular en el caso en tres dimensiones se reportó por primera vez por Antonio Aliano y colaboradores [32] en un estudio cuya finalidad era validar la hipótesis de caos molecular [51] en el régimen relativista. En este trabajo se utilizó un potencial semi-relativista para modelar las interacciones entre las

partículas. También en tres dimensiones pero empleando un modelo completamente relativista, fue comunicado por Jörn Dunkel, Peter Hänggi y Stefan Hilbert en Ref. 31, proponiendo además una versión de la termodinámica relativista donde las cantidades relevantes se obtienen mediante integrales sobre la superficie invariante del cono de luz. Aunque sus resultados no son convencionales, abren la puerta a nuevos desarrollos tanto teóricos como observacionales. En tres dimensiones también el método de Monte Carlo fue extendido al régimen relativista por Fabio Peano y colaboradores [33], aunque este algoritmo, fue construido y verificado con éxito, necesita ciertas restricciones fundamentales para garantizar el significado físico de los resultados. En Ref. 86 se generalizó el caso de discos duros de [30] a esferas duras. Todos estos resultados abren la puerta a la exploración numérica de las propiedades estadísticas de los sistemas relativistas de muchos cuerpos, de ahí su gran importancia.

Estas contribuciones parecen haber resuelto finalmente la controversia en relación con la distribución de Jüttner y la transformación de la temperatura, sin embargo, aún quedan ciertas preguntas abiertas. Últimamente Malihe Ghodrat y Afshin Montakhab han estudiado la distribución de Jüttner modificada, que se mencionó al principio de este documento, en distintos marcos de referencia [86,87]. En sus trabajos advierten que aún hay más cosas por explorar acerca de esta distribución, en relación con las distintas parametrizaciones temporales y en distintas situaciones. Además, utilizan sus modelos de discos y esferas duras para analizar el efecto de un gradiente de temperatura y han demostrado que con estos modelos es posible estudiar las propiedades de transporte fuera de equilibrio en regímenes relativistas.

Con esta discusión, podemos darnos cuenta cómo durante un siglo de controversia alrededor de la distribución de Jüttner y la termodinámica relativista, se han desarrollado varios métodos y se han encontrado resultados nuevos e interesantes con aplicaciones modernas importantes, que ponen de manifiesto la actualidad de la teoría de la relatividad especial y en particular de la teoría cinética relativista y la distribución de Jüttner a más de un siglo de su aparición.

-
1. F. Jüttner, *Ann. Physik* **339** (1911) 856.
 2. F. Jüttner, *Ann. Physik* **340** (1911) 145.
 3. F. Jüttner, *Zeitschr. Phys.* **47** (1928) 542.
 4. L. García-Colín Scherer, *Introducción a la Física Estadística* (El Colegio Nacional, México 2005).
 5. L.P. Horwitz, W.C. Schieve, C. Piron, *Ann. Phys.* **137** (1981) 306.
 6. L.P. Horwitz, S. Shashoua, and W.C. Schieve, *Physica A* **161** (1989) 300.
 7. W.C. Schieve, *Found. Phys.* **35** (2005) 1359.
 8. E. Lehmann, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 023303.
 9. N.G. van Kampen, *Physica* **43** (1969) 244.
 10. F. Debbasch, J.P. Rivet and W.A. van Leeuwen, *Physica A* **301** (2001) 181.
 11. C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman and Company New York 1973).
 12. C. Cercignani and G.M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Progress in Mathematical Physics Vol. 22 (Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 2002).
 13. S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*, (North-Holland, Amsterdam, (1980).

14. W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, (Oxford University Press 2006).
15. J. Dunkel and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 016124.
16. J. Dunkel, P. Hänggi, *Physica A* **374** (2007) 559.
17. J. Dunkel and P. Hänggi, *Phys. Rep.* **471** (2009) 1.
18. R. Brown, *Edinburgh New Philos. J.* **5** (1828) 358.
19. A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, (Dover Publications, Inc. 1956).
20. M. von Smoluchowski, *Ann. Physik* **21** (1906) 756.
21. P. Langevin, *Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris)* **146** (1908) 530.
22. J. Perrin, *Ann. Chim. Phys.* **18** (1909) 5.
23. G. Chacón-Acosta and G.M. Kremer, *Phys. Rev. E* **76** (2007) 021201.
24. F. Debbasch, *AIP Conf. Proc.* **861** (2006) 488.
25. R. Hakim, *J. Math. Phys.* **9** (1986) 1805.
26. J. Dunkel, P. Talkner and P. Hänggi, *New J. Phys.* **9** (2007) 144.
27. G. Chacón-Acosta, L. Dagdug and H. Morales-Técotl, *Phys. Rev. E* **81** (2010) 021126.
28. T.K. Nakamura, *EuroPhys. Lett* **88** (2009) 40009.
29. D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 170601.
30. A. Montakhab, M. Ghodrati, and M. Barati, *Phys. Rev. E* **79** (2009) 031124.
31. J. Dunkel, P. Hänggi and S. Hilbert, *Nature Phys.* **5** (2009) 741.
32. A. Aliano, L. Rondoni and G.P. Morriss, *Eur. Phys. J. B* **50** (2006) 361.
33. F. Peano, M. Marti, L.O. Silva and G. Coppa, *Phys. Rev. E* **79** (2009) 025701(R).
34. L.B. Okun, *Physics Today* **31** (1989) 11; *Sov. Phys. Usp.* **32** (1989) 629.
35. D. Cubero and J. Dunkel, *EuroPhys. Lett.* **87** (2009) 30005.
36. L. Burakovsky and L.P. Horwitz, *Found. Phys.* **25** (1995) 785.
37. I. Müller, *A History of Thermodynamics* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2007).
38. L. Pyenson, *Ann. Phys. (Berlin)* **17** (2008) 176.
39. M. Planck, *Ann. Physik* **26** (1908) 1.
40. A. Einstein, *Jahrb. Radioakt. Elektron* **4** (1907) 411.
41. H. Ott, *Zeitschr. Physik* **175** (1963) 70; A. Arzelies, *Nuovo Cimento* **35** (1965) 792.
42. P.T. Landsberg, *Nature (London)* **212** (1966) 571; *Nature (London)* **214** (1967) 903.
43. M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. (Dover Publications, Inc. 1968).
44. N.G. Lewis and Q.E. Adams, *Phys. Rev.* **5** (1915) 510.
45. C. Møller, *The Theory of Relativity*, (Clarendon Press Oxford 1972).
46. J.L. Synge, *The Relativistic Gas*, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1957).
47. R. C. Tolman, *Phil. Mag. (Series 6)*, **28** (1914) 583; *Phys. Rev.* **11** (1918) 261.
48. O. Bandorff-Nielsen, *Scand. J. Statist* **9** (1982) 43.
49. A. Aragonés-Muñoz, and A. Sandoval-Villalazo, *J. Phys. Conf. Series* **229** (2010) 012075.
50. S. Chandrasekar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. (Dover Publications Inc., 1958).
51. S. Chapman and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3th ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).
52. W. Israel, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 1163.
53. N.A. Chernikov, *Acta Phys. Pol.* **23** (1963) 629.
54. J. Ehlers, in *Proceedings of the International School of Physics, Enrico Fermi*, Ed. R. K. Sach, (Academic Press 1971), pp. 1-70.
55. J. M. Stewart, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*. Lecture Notes in Physics vol.10 (Springer, Heidelberg 1971).
56. A.R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure* (Cambridge University Press 2000).
57. J.A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press 1999).
58. E.W. Kolb, M.S. Turner, *The Early Universe* Paperback Ed. (Westview Press 1994).
59. J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Paperback Ed. (Cambridge University Press 2004).
60. R.A. Sunyaev and Y.B. Zeldovich, *Comments Astrophys. Space Phys.* **4** (1972) 173; M. Jones *et al.*, *Nature (London)* **365** (1993) 320; M. Birkinshaw, S. F. Gull and H. Hardebeck, *Nature (London)* **309** (1984) 34.
61. A.S. Kompanets, *Sov. Phys.-JETP* **4** (1957) 730.
62. A. Sandoval-Villalazo and L. S. García-Colín, *J. Phys. A: Math. Gen* **36** (2003) 4641; A. Sandoval-Villalazo and L. S. García-Colín, *Gen. Relativ. Gravit.* **37** (2005) 831.
63. N. Itoh, Y. Kohyama, and S. Nozawa, *Astrophys. J.* **502** (1998) 7.
64. D. A. Prokhorov, S. Colafrancesco, T. Akahori, K. Yoshikawa, S. Nagataki, and K.-I. Seon, *A&A*, **529** (2011) A39.
65. Z. Haba, *Mod. Phys. Lett. A* **24** (2009) 3193.
66. Z. Haba, arXiv:0903.2622 (2009).
67. A. Bret, L. Gremillet, D. Benisti, and E. Lefebvre, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 205008; M.E. Dickermann, L. O'C. Drury, and P.K. Shukla, *New J. Phys.* **8** (2006) 40.
68. E. Bertschinger, *AIP Conf. Proc.* **861** (2006) 97.
69. F. Dowker, J. Henson y R. D. Sorkin, *Mod. Phys. Lett. A* **19** (2004) 1829; L. Philpott, F. Dowker y R. D. Sorkin, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 124047.
70. B.L. Hu and E. Verdaguer, *Liv. Rev. Rel.* **11** (2008) 3. (<http://www.livingreviews.org/lrr-2008-3>).
71. H. van Hees, V. Greco, y R. Rapp, *Phys. Rev. C* **73** (2006) 034913; P. Huovinen y D. Molnar, *Phys. Rev. C* **79** (2009) 014906.
72. R.S. Bhalerao, *Pramana J. Phys.* **75** (2010) 247; R. Kuiper and G. Wolschin, *Ann. Phys. (Leipzig)* **16** (2007) 67.

73. M. Rangamani, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009) 224003.
74. M.I. Katsnelson, *Materials Today* **10** (2007) 20.
75. M. Müller, J. Schmalian, and L. Fritz, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 025301.
76. A. Pototsky, F. Marchesoni, F.V. Kusmartsev, P. Hänggi, and S.E. Savel'ev, (2011). arXiv:1103.0945
77. A. Sandoval-Villalbaz, A.L. Garcia-Perciante, and L.S. Garcia-Colin, *Physica A* **388** (2009) 3765.
78. X.-G. Huang, T. Kodama, T. Koide, and D.H. Rischke, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 024906; N. Andersson, C. Lopez-Monsalvo, arXiv:1107.0165 (2011).
79. M. Mendoza, B.M. Boghosian, H.J. Hermann, and S. Succi, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 014502.
80. A. Komar, *Gen. Rel. Grav.* **28** (1996) 379; P.T. Landsberg, *Am. J. Phys.* **60** (1992) 561; V.J. Menon and D.C. Agrawal, *Am. J. Phys.* **59** (1991) 258.
81. D. Ter Haar and H. Wergeland, *Phys. Rep.* **1** (1971) 31.
82. D.J. Lois-Martinez, *Class. Quantum Grav.* **28** (2011) 035004.
83. D.G. Currie, T.F. Jordan, and E.C.G. Sudarshan, *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963) 350.
84. G. Marmo, N. Mukunda, and E.C.G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **30** (1984) 2110.
85. F. Jüttner, *Zeitschr. Math. und Phys.* **62** (1913) 410.
86. M. Ghodrati and A. Montakhab, *Computer Physics Communications* **182** (2011) 1909.
87. M. Ghodrati and A. Montakhab, *Phys. Rev. E* **82** (2010) 011110.
88. En la teoría de la relatividad el hecho de que las leyes de la física sean las mismas en cualquier sistema de referencia se expresa haciendo uso de cantidades físicas (tensores, vectores, etc.) que transforman correctamente ante las Transformaciones de Lorentz. Expresiones así escritas se les llama manifiestamente covariantes.