

Modelo de radio propagación a través de un canal con ruido Gaussiano

José R. Fermín y Juan C. Pizarro

*Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia,
LUZ, Apartado 256, Maracaibo 4001, Zulia, Venezuela,
e-mail: jfermin@luz.edu.ve; jpizarro63@gmail.com*

Recibido el 2 de febrero de 2012; aceptado el 7 de septiembre de 2012

Presentamos un modelo físico para la propagación de ondas de radio a través de un canal con ruido blanco Gaussiano. El canal es continuo y simulado a través de un modelo lineal disipativo, que consiste de una cuerda flexible de densidad uniforme y sumergida en un baño térmico. El canal es caracterizado mediante la razón señal-ruido, la cual es calculada en función de la temperatura, frecuencia de la señal y la distancia de propagación. Para cierto valor de temperatura, distancia de propagación y frecuencia la SNR excede el umbral de Shannon por debajo del cual la transmisión libre de errores no es posible.

Descriptor: Sistema lineal; ruido térmico; relación señal-ruido (SNR); canal Gaussiano; canal continuo.

We present a physical model of radio waves propagation through a channel with white Gaussian noise. The continuous channel is simulated using a dissipative linear model, which consists of a flexible string of uniform density and immersed into a thermal bath. The channel is characterized by signal to noise ratio, which is calculated as a function of temperature, frequency of the signal and the propagation distance. For some value of temperature, propagation distance and frequency, the SNR exceeds the threshold below which Shannon's error-free transmission is not possible.

Keywords: Linear system; thermal noise; signal to noise ratio (SNR); Gaussian channel; continuous channel.

PACS: 05.40.Ca; 02.50.Ey; 05.45.Xt

1. Introducción

Durante las últimas décadas, la transmisión de señales ha sido tema de investigación experimental y teórica. Esto es debido a la vertiginosa demanda de movilidad y portabilidad en las telecomunicaciones modernas, en especial los sistemas que involucran la transmisión de ondas de radio a través de la atmósfera, o radiopropagación. Al igual que las ondas de luz, las ondas de radio también son afectadas por los fenómenos de reflexión, refracción, difracción, absorción, polarización y dispersión. Sin embargo, a diferencias de las ondas luminosas, las ondas de radio son sensibles al contenido de vapor de agua en la atmósfera [1], fluctuaciones térmicas [2], etc. En la práctica, todos estos fenómenos abundan en limitaciones del canal, a nivel de la capa física del canal, tales como, pérdida de la señal, fluctuaciones en el ancho de banda útil, propagación de errores, etc. Entonces, cómo seleccionar las frecuencias de transmisión para el diseño de sistemas confiables para telefonía móvil, radio propagación, radar, etc. Por otro lado, debido a que la atmósfera es un canal esencialmente continuo, y la información es discreta, surge la siguiente interrogante: ¿Cómo utilizar un canal continuo para transmitir información discreta de manera confiable?

Desde el punto de vista teórico, un canal de comunicación es simulado mediante modelos estadísticos y físicos [3, 4]. Estadísticamente, el canal es discreto como un conjunto de símbolos transmitidos y recibidos, y de una probabilidad de transición. Semánticamente, la probabilidad de transición representa la probabilidad de que un símbolo determinado sea transmitido a través del canal. La probabilidad de transición dependerá del tipo de servicio de telecomunicaciones involu-

crado. Físicamente, un modelo de canal debe considerar los fenómenos que afectan la propagación de la señal. En este trabajo estudiamos la propagación de ondas de radio a través de un canal continuo con ruido térmico. Típicamente, el ruido térmico es del tipo blanco-Gaussiano-aditivo y es provocado por el movimiento browniano de las partículas que componen el sistema. El ruido blanco-Gaussiano es un proceso aleatorio caracterizado por propiedades estocásticas, que produce una perturbación en la señal que se propaga a través de un canal de comunicaciones, modificando el nivel de la razón señal-ruido (SNR) del canal. Desde esta perspectiva, el canal de comunicaciones puede considerarse entonces como un sistema estocástico, cuya dinámica es gobernada por una ecuación diferencial estocástica (SDE) [5]. Las ecuaciones diferenciales estocásticas surgen de una variedad de fenómenos dinámicos aleatorios en física, biología, ingeniería y ciencias sociales. Sus soluciones frecuentemente están asociadas con procesos de difusión conectados con fenómenos tales como propagación de frentes de ondas [6], ruido electrónico [7], transientes caóticos [8], etc. Una clase principal de SDE es la llamada ecuación de Langevin y sus variantes diferenciales, que además de los términos determinísticos contiene una parte de ruido blanco aleatorio [9].

2. Modelo de Canal

El modelo consiste en considerar un sistema continuo de osciladores en equilibrio térmico (canal de comunicación). En este caso, el canal es representado como una cuerda flexible de densidad uniforme sumergida en un baño térmico (Ver Fig. 1). La termalización de la cuerda es alcanzada a través

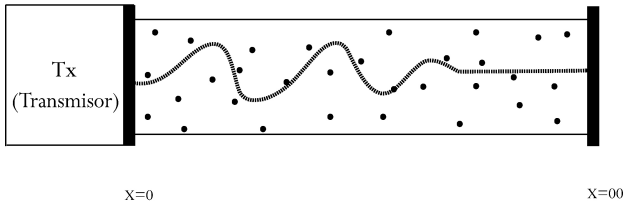


FIGURE 1. Representación física del Canal de Comunicación. El canal es representado por una cuerda flexible de densidad uniforme sumergida en un baño térmico, en el cual se propaga la señal dada por la Ec. (3).

del uso de las ecuaciones de Langevin. Así, la ecuación de movimiento del sistema vendrá dada por:

$$\psi_{tt} + 2\beta\psi_t - c^2\psi_{xx} - \frac{1}{\rho}f(t) = \frac{1}{\rho}F(x,t), \quad (1)$$

donde $\beta \equiv D/2\rho$ coeficiente de amortiguamiento, D representa el coeficiente de fricción, ρ densidad lineal del medio, c velocidad de propagación de la señal, $F(x,t)$ término forzante y $f(t)$ el ruido inducido por el canal. En este caso, el ruido inducido por el canal es un ruido blanco Gaussiano ($f(t)$). Para ruido blanco Gaussiano las fluctuaciones térmicas están deltacorrelacionadas y satisface una relación de fluctuación-disipación a una temperatura T dada por [10]:

$$\langle f(t)f(t') \rangle_f = 2\rho^2\beta K_B T \delta(t-t'), \quad (2)$$

donde K_B es la constante de Boltzmann y T representa la temperatura en grados Kelvin. El término ρ^2 aparece como consecuencia de la Ec. (1).

En el modelo, una señal es transmitida desde una fuente ubicada en $x = 0$, la cual se propaga libremente a lo largo del canal con velocidad constante. La señal transmitida es de la forma

$$F(0,t) = F_0 e^{-i\omega t} \quad (3)$$

donde F_0 representa la amplitud de la señal y ω su frecuencia.

La caracterización de un canal de comunicación requiere de una variable sensible a las variaciones térmicas del medio. La variación de la señal con respecto al ruido se expresa mediante la relación señal-ruido [10]

$$\text{SNR} = \log_{10} \left[\frac{P_s}{P_r} \right] \text{ [dB]}, \quad (4)$$

donde P_s es la potencia de la señal en ausencia de ruido y P_r la potencia del ruido térmico. Esta definición no es única, pero se ajusta bastante bien a la interpretación de los resultados.

La potencia de la señal, P_s , se obtiene a partir de la relación

$$P_s = \langle |\psi_t|^2 \rangle, \quad (5)$$

donde $|\psi_t|^2$ representa el cuadrado de la velocidad y $\langle \rangle$ denota un promedio temporal. Para encontrar la potencia de la señal resolvemos la Ec. (1) en ausencia de las fluctuaciones térmicas con un forzamiento $F(x,t) = F_0 e^{-i\omega t}$.

Sustituyendo en la Ec. (1) la solución asintótica

$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

con condiciones de frontera

$$\psi(0,t) = \Psi_0 e^{-i\omega t}, \quad \psi(\infty,t) = 0 \quad (7)$$

obtenemos la solución

$$\psi(x,t) = \left[c_0 e^{i(a+ib)x} - \frac{F_0 e^{-2ia}}{\rho c^2 k^2} \right] e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

donde a , b , k , α y c_0 son parámetros que dependen de la frecuencia de la señal y la constante de amortiguamiento (Ver Apéndice). La potencia de la señal será entonces

$$P_s(x,\omega) = p e^{-bx} - u e^{-bx} \cos(ax + 2\alpha) + r(1 - 2e^{-bx} \cos(ax)), \quad (9)$$

donde p , u y r son cantidades definidas en términos de los parámetros del sistema (Ver Apéndice).

El efecto del ruido se obtiene resolviendo la Ec. (1) considerando $F(x,t) = 0$ en la Ec. (1), y asumiendo que el ruido satisface la relación de fluctuación-disipación dada por la Ec. (2). De esta manera obtenemos la solución

$$\psi(x,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta\rho} \int_0^t f(\tau) [1 - e^{-2\beta(t-\tau)}] d\tau. \quad (10)$$

Con esto, la potencia del ruido es

$$P_r = \frac{K_B T}{2}. \quad (11)$$

Finalmente, la razón señal-ruido, SNR, para el canal continuo viene expresada como

$$\text{SNR}(\omega, T, x) = \lg_{10} \left[\frac{2P_s}{K_B T} \right] \text{ dB}. \quad (12)$$

La deducción detallada de la Ec. (12) se presenta en el apéndice.

3. Análisis y discusión

La Ec. (12) no es fácil de analizar en general, esto es, por que la razón señal-ruido no solo depende del ruido térmico sino también, de las características de la señal y de los parámetros del canal. Sin embargo, en el caso de ondas de radio ($10^6 - 10^{10}$ Hz) propagándose a través del canal atmosférico ($\beta \ll \omega$), la potencia P_s se puede aproximar hasta primer orden en β/ω , mediante,

$$P_s = \left[\Psi_0^2 \omega^2 + \frac{2\Psi_0 F_0}{\rho} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right) \right] e^{-(\beta/c)x}, \quad (13)$$

con la condición $10 \lesssim \omega/c \lesssim 10^5 \text{ Km}^{-1}$. Con esto, la razón señal-ruido queda expresada como,

$$\text{SNR} = \log_{10} \left[\frac{2 \left[c^2 \Psi_0^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{2\Psi_0 F_0}{\rho} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right) \right] e^{-(\frac{\beta}{c})x}}{K_B T} \right]. \quad (14)$$

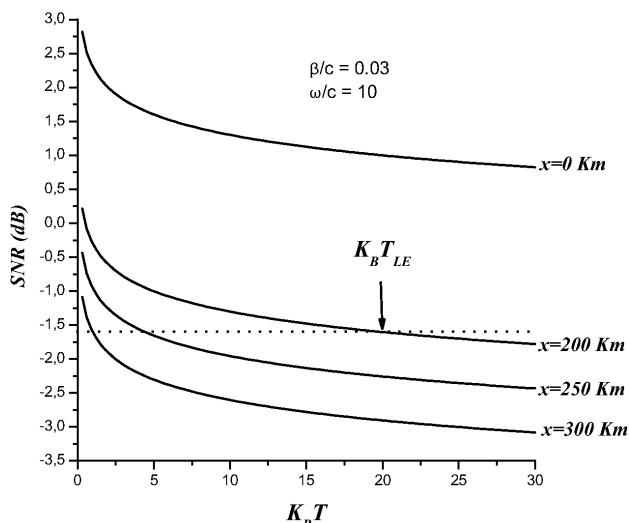


FIGURE 2. SNR vs $K_B T$ Para diferentes distancias del transmisor. Se observa el punto de corte en el límite de Shannon.

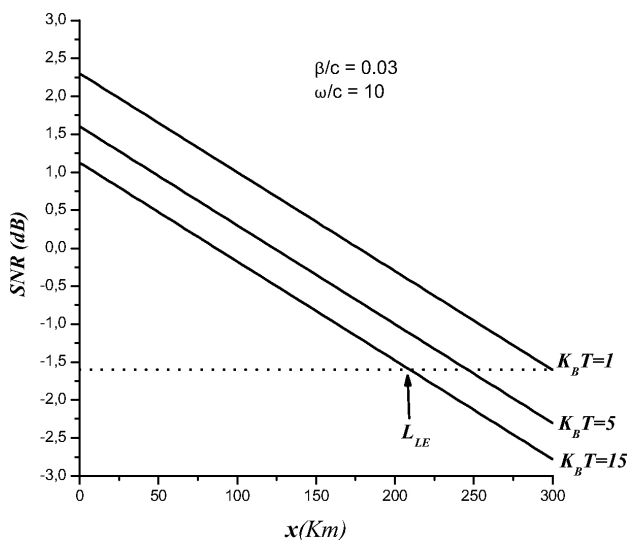


FIGURE 3. SNR vs x para diferentes valores de $K_B T$. Se observa el punto de corte en el límite de Shannon.

Tres aspectos fundamentales pueden resaltarse a partir de la Ec. (14): (a) decrecimiento monótonico del nivel de la señal con respecto a la temperatura, en todo el rango de frecuencias; (b) decaimiento lineal de SNR a medida que la señal se propaga a través del canal; (c) espectro de frecuencia continuo y aproximadamente proporcional a ω^2 . Sin perder generalidad en el análisis, asumiremos los valores normalizados $c^2 \Psi_0^2 = 1$, $2\Psi_0 F_0 / \rho = 1$. La Fig. (2) muestra las curvas de temperatura de SNR, a varias distancias del transmisor. La línea punteada corresponde al límite de Shannon para la transmisión libre de errores (TLE) [11]. Esta condición solo es posible para distancias cercanas al emisor y temperaturas relativamente bajas. A medida que la distancia al emisor aumenta, existe una temperatura crítica, T_{LE} , por encima de la cual, la TLE no es posible. Utilizando la condición de Shan-

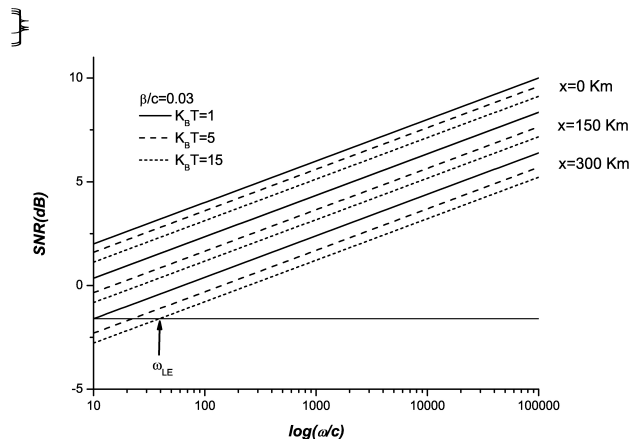


FIGURE 4. SNR vs $\log(\omega/c)$ para diferentes posiciones. Se observa una frecuencia umbral para cierta temperatura y distancia del transmisor.

non $\text{SNR} = -1.6$ dB, obtenemos que la temperatura crítica para radiopropagación es

$$K_B T_{LE} \approx 2 \times 10^{1.6} e^{-(\beta/c)x} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (15)$$

Esta descripción apunta hacia otro parámetro interesante en la radio propagación atmosférica: la distancia de propagación, L_{LE} . Esta se define como la distancia desde el transmisor a partir de la cual la TLE no es posible. La razón señal-ruido en función de la distancia se muestra en la Fig. (3), para varios valores de ω/c y $K_B T$. Las flechas indican el valor de la distancia de propagación para estos valores de frecuencia y temperatura. Aplicando la condición $\text{SNR}(L_{LE}) = -1.6$ dB, se obtiene que la distancia de propagación viene dada por la expresión aproximada:

$$L_{LE} \approx 4.37 \frac{c}{\beta} + \frac{c}{\beta} \text{Ln} \left[\frac{1}{K_B T} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right]. \quad (16)$$

Esta ecuación indica que la distancia óptima para propagación de ondas de radio a través de la atmósfera se alcanza a temperaturas relativamente bajas y frecuencias altas.

Otra característica del canal de comunicaciones es el espectro de frecuencia, $\text{SNR}(\omega)$. Este se muestra en la Fig. (4) en el rango de radiofrecuencias, para varias temperaturas y distancias del transmisor. El espectro es completamente determinado por la potencia de la señal, $P_s(\omega)$. Sin embargo, a temperaturas relativamente altas el ruido puede alcanzar niveles tales que, por debajo de cierta frecuencia umbral, ω_{LE} , la SNR no puede exceder el límite óptimo para la transmisión libre de errores.

4. Conclusiones

Hemos estudiado el fenómeno de radiopropagación a través de un canal Gaussiano. Considerando el canal como un medio continuo y viscoso, la dinámica del sistema es gobernada por una ecuación diferencial parcial del tipo de Langevin; y

se calcula la razón señal-ruido del canal en función de la temperatura, frecuencia y distancia al transmisor.

El fenómeno de radio propagación es caracterizado por tres parámetros físicos para la transmisión libre de errores: la distancia de propagación, temperatura umbral y la frecuencia umbral. Estos parámetros determinan las condiciones óptimas para la radio propagación a través de un canal de comunicaciones.

Nuestro modelo es analítico y provee una descripción alternativa de los fenómenos físicos involucrados en la transmisión de señales a través de un canal como la atmósfera. Sin embargo, una descripción física completa del problema debe considerar las condiciones intrínseca del canal. En particular, el canal atmosférico está compuesto por un gas de moléculas de diferente especie, cada una con una frecuencia natural característica. En segundo lugar, el coeficiente de viscosidad de la atmósfera no es en general constante, sino más bien una función de la temperatura. Adicionalmente, la presencia de ruido térmico genera interesantes efectos de sincronización entre la señal y el ruido externo, donde la temperatura es el parámetro de control para la optimización de la señal.

Apéndice

En esta sección describimos de manera más detallada el cálculo de la SNR del canal. A pesar que el comportamiento de una cuerda flexible ha sido bien estudiado, es útil presentar la resolución de la ecuación que gobierna la dinámica de la cuerda en un baño térmico. Estos resultados no son comúnmente encontrados en la literatura.

1. Potencia de la señal en ausencia de ruido térmico:

En este caso la cuerda se encuentra a temperatura cero, esto es, en ausencia de las fluctuaciones térmicas (pero con una contribución disipativa). La ecuación de movimiento será entonces

$$\psi_{tt} + 2\beta\psi_t - c^2\psi_{xx} = \frac{1}{\rho}F(x, t), \tag{A.1}$$

donde cada uno de los términos representa una aceleración. En este caso ρ es la densidad lineal del medio, $\beta \equiv (D/2\rho)$ (Coeficiente de amortiguamiento), D coeficiente de fricción, c velocidad de la luz y $F(x, t)$ es el forzamiento inducido sobre un extremo de la cuerda, dado por:

$$F(0, t) = F_0e^{-i\omega t}, \tag{A.2}$$

con F_0 representando la amplitud de la señal y ω su frecuencia.

Una solución para la Ec.(A.1) viene dada por:

$$\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}, \tag{A.3}$$

la cual satisface condiciones de frontera

$$\psi(0, t) = \Psi_0e^{-i\omega t}, \quad \psi(\infty, t) = 0. \tag{A.4}$$

Sustituyendo (A.3) en (A.1) encontramos que $\phi(x)$ viene dada por un pulso de la forma:

$$\phi(x) = \left[c_1e^{-izx} + c_0e^{izx} - \frac{F_0}{\rho c^2 z^2} \right], \tag{A.5}$$

siendo c_0 y c_1 constantes de interpretación y z el número complejo:

$$z = \sqrt{\frac{\omega^2 + 2i\beta\omega}{c^2}} = ke^{i\alpha} = a + ib, \tag{A.6}$$

con

$$k^2 = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta\omega}{c^2}\right)^2}; \quad 2\alpha = \arctan\left(\frac{2\beta}{\omega}\right) \tag{A.7}$$

$$a \equiv k \cos \alpha; \quad b \equiv k \sin \alpha. \tag{A.8}$$

Con estas consideraciones es fácil notar que el término proporcional a c_1 , en (A.5) crece exponencialmente con la distancia de propagación. Esto implica que $c_1 = 0$ en (A.5). Además, utilizando la condición de frontera en $x = 0$, obtenemos que

$$c_0 = \Psi_0 + \frac{F_0e^{-2i\alpha}}{\rho c^2 k^2}.$$

La solución se reduce a

$$\psi(x, t) = \left[c_0e^{iax}e^{-bx} - \frac{F_0e^{-2i\alpha}}{\rho c^2 k^2} \right] e^{-i\omega t}. \tag{A.9}$$

La potencia de la señal (P_s) es calculada mediante la relación:

$$P_s = \langle |\psi_t|^2 \rangle, \tag{A.10}$$

donde $\langle \rangle$ denota el promedio temporal.

Luego de llevar a cabo el algebra obtenemos que la potencia de la señal como función de la frecuencia y posición es

$$P_s(x, \omega) = pe^{-bx} - ue^{-bx} \cos(ax + 2\alpha) + r(1 - 2e^{-bx} \cos(ax)), \tag{A.11}$$

las cantidades p , u , r , a y b quedan completamente definidos en términos de los parámetros del sistema, como

$$p = \omega^2\Psi_0^2 + \frac{2\omega^2\Psi_0F_0 \cos(2\alpha)}{\rho\sqrt{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}} + \frac{F_0^2\omega^2}{\rho^2(\omega^4 + 4\beta^2\omega^2)}, \tag{A.12}$$

$$u = \frac{2\omega^2\Psi_0F_0}{\rho\sqrt{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{A.13}$$

$$r = \frac{F_0^2\omega^2}{\rho^2(\omega^4 + 4\beta^2\omega^2)}, \tag{A.14}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}{c^4}} \cos\left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\beta}{\omega}\right)\right], \tag{A.15}$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}{c^4}} \sin\left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\beta}{\omega}\right)\right]. \tag{A.16}$$

2. Potencia del ruido térmico. Relación señal-ruido

En ausencia de señal y bajo la presencia de ruido térmico, la ecuación del sistema es,

$$\psi_{tt} + 2\beta\psi_t - c^2\psi_{xx} = \frac{1}{\rho}f(t), \quad (\text{A.17})$$

donde el término $f(t)$, representa un ruido blanco Gaussiano centrado en el origen, y que, satisface una relación de fluctuación-disipación a una temperatura T dada por:

$$\langle f(t)f(t') \rangle_f = 2\rho^2\beta K_B T \delta(t - t'), \quad (\text{A.18})$$

donde K_B es la constante de Boltzmann, ρ es densidad lineal del medio y T representa la temperatura en grados Kelvin.

Para resolver la Ec.(A.17) aplicamos transformada de Laplace, obteniendo

$$(s^2 + 2\beta s)\psi(\tilde{x}, s) - (s + 2\beta)\psi(x, 0) - c^2\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} = \frac{1}{\rho}\tilde{f}(s). \quad (\text{A.19})$$

En este caso $\psi(x, 0) = \psi_t(x, 0) = 0$. Así tendremos

$$\frac{d^2\tilde{\psi}(x, s)}{dx^2} - \left(\frac{s^2 + 2\beta s}{c^2}\right)\tilde{\psi}(x, s) = -\frac{1}{\rho c^2}\tilde{f}(s), \quad (\text{A.20})$$

haciendo

$$A^2 \equiv \left(\frac{s^2 + 2\beta s}{c^2}\right)$$

y $M \equiv -1/\rho c^2$, la Ec. (A.20) será reescrita como

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} - A^2\tilde{\psi} = M\tilde{f}(s). \quad (\text{A.21})$$

La solución de la Ec. (A.21) consta de una parte homogénea más una parte particular. En nuestro caso solo estamos interesados en la parte estacionaria (solución particular) de la solución, ya que la parte transitoria no aporta información relevante de la señal. La solución particular será

$$G(s) = \frac{M}{A^2}\tilde{f}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{\rho(s^2 + 2\beta s)}. \quad (\text{A.22})$$

Tomando la transformada inversa de Laplace, obtendremos

$$\psi(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta\rho} \int_0^t f(\tau)[1 - e^{-2\beta(t-\tau)}]d\tau. \quad (\text{A.23})$$

Derivando (A.23) respecto al tiempo y calculando su cuadrado, obtenemos respectivamente

$$\psi_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_0^t f(\tau)e^{-2\beta(t-\tau)}d\tau, \quad (\text{A.24})$$

y

$$\psi_t^2(x, t) = \lim_{t, t' \rightarrow \infty} \frac{e^{-4\beta t}}{\rho^2} \times \int_0^t \int_0^{t'} f(\tau)f(\tau')e^{2\beta\tau}e^{2\beta\tau'}d\tau d\tau'. \quad (\text{A.25})$$

Si ahora calculamos el promedio térmico, $\langle \rangle_f$, obtenemos

$$\langle \psi_t^2(x, t) \rangle_f = \lim_{t, t' \rightarrow \infty} \frac{e^{-4\beta t}}{\rho^2} \times \int_0^t \int_0^{t'} \langle f(\tau)f(\tau') \rangle_f e^{2\beta\tau}e^{2\beta\tau'}d\tau d\tau', \quad (\text{A.26})$$

sustituyendo la Ec.(A.18) en la Ec.(A.26), encontramos

$$\langle \psi_t^2(x, t) \rangle_f = 2\beta K_B T \lim_{t, t' \rightarrow \infty} e^{-4\beta t} \times \int_0^t \int_0^{t'} \delta(\tau - \tau')e^{2\beta\tau}e^{2\beta\tau'}d\tau d\tau', \quad (\text{A.27})$$

y luego de resolver las integrales,

$$\langle \psi_t^2(x, t) \rangle_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K_B T}{2} (1 - e^{-4\beta t}). \quad (\text{A.28})$$

Al evaluar el límite la potencia del ruido queda expresada como

$$P_r = \langle v^2(x, t) \rangle_f = \frac{K_B T}{2}. \quad (\text{A.29})$$

Finalmente la SNR del canal continuo se expresa en general como

$$\text{SNR}(\omega, T, x) = \log_{10} \left[\frac{2P_s}{K_B T} \right] \text{dB}. \quad (\text{A.30})$$

1. Recomendación UIT-R P.676-7, *Atenuación debida a los gases atmosféricos*, (Cuestión UIT-R 201/3, 1990-2007).
2. R. Reigada, A. Sarmiento, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **63** (2001) 066113.
3. G. Franceschetti y S. Stornelli, *Wireless Networks, From The Physical Layer to Communication, Computing, Sensing, and control*, (ELSEVIER 2004).

4. G. Fiche and G. Hébuterne, *Communicating Systems and Networks: Traffic and Performance*, (Kogan Page Science 2004).
5. P.H. Baxendale y S.V. Lototsky, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, (World Scientific 2007).
6. P.M. Jordan y A. Puri, *J. Appl. Phys.* **85** (1998) 3.
7. R.E. Ziemer y W.H. Tranter, *Principles of Communications*

- Systems, Modulations and Noise* 6th Edition, (Wiley & Sons 2009).
8. J.A. Blackburn, N. Gronbech-Jensen, y H.J.T Smith, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 6.
 9. C. Hartmann y C. Schütte, *IEEE* (2008).
 10. P.Hänggi, *Helvetica Physica Acta* **51** (1978).
 11. W. C. Lindsey y M. K. Simon, *Telecommunications systems engineering*, Cap.1 (Dover, NY 1991). pp. 16.