

## Ecuación de Boltzmann de discos rígidos auto-impulsados para peatones en contraflujo

A. Rangel-Huerta

*Facultad de Ciencias de la Computación, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,  
14 sur y Av. San Claudio, Col. San Manuel, 72570, Puebla, Puebla; México,  
e-mail: arangel@cs.buap.mx*

Received 26 June 2012; accepted 3 December 2012

Presentamos una ecuación cinética de Boltzmann para describir un conglomerado que camina en contraflujo sobre un corredor. Se considera a los peatones como partículas auto-impulsadas con velocidades de caminado balístico y perturbaciones aleatorias. Los cambios de velocidad durante los encuentros de caminado se representan como potenciales de discos rígidos. Por ser partículas auto-impulsadas los peatones se comportan como agentes reactivos que pueden cambiar voluntariamente la dirección de sus velocidades de caminado durante sus maniobras de evasión. La solución analítica de la ecuación de Boltzmann, en estado estacionario, se determina con base a la función de distribución de velocidades de caminado. La simulación del término colisional de Boltzmann considera dos modos de operación, caminado libre y caminado con encuentros. Los resultados muestran que se presenta auto-organización colectiva de caminado, a cualquier densidad, lo que resulta ser una estrategia emergente que sirve para mejorar el flujo del conglomerado. Otro resultado importante es el diagrama fundamental, la curva de velocidad de flujo contra densidad, el cual reproduce correctamente los resultados experimentales. Con esto se confirma que nuestro modelo es adecuado para describir el transporte de un conglomerado de peatones.

*Descriptor:* Teoría cinética; movimiento Browniano; sistemas auto-organizados.

We present a Boltzmann kinetic equation to describe a crowd in counter flow walking on a corridor. Pedestrians are considered as self-propelled particles with ballistic walking speeds and random perturbations. Speed changes during encounters are represented as walking hard disks potentials. Because pedestrians are considered self-propelled particles they behave like reactive agents which can change their walking speeds direction voluntarily during the evasive maneuvers. Analytical solutions of the Boltzmann equation, at steady state flow, are determined based on the speed distribution function of walking. The simulation algorithm of the Boltzmann collisional term considers two operation modes, free walking and walking with encounters. The results show collective self-organizing motion, at any density, which turn out to be an emerging strategy used to improve the flow efficiency of the crowd. Another important result is the fundamental diagram, the curve of average flow versus density, which correctly reproduces the experimental results. This confirms that our model is suitable to describe transport of pedestrian crowds.

*Keywords:* Kinetic theory; Brownian motion; self-organized systems.

PACS: 05.20.Dd; 05.40.Jc; 05.65.+b

### 1. Introducción

La dinámica de un conglomerado de peatones tiene gran interés por sus aplicaciones prácticas en el diseño y optimización de accesos y espacios públicos abiertos. También porque este sistema presenta fenómenos colectivos de auto-organización y algunos comportamientos característicos de los sistemas de muchas partículas fuera de equilibrio. El conglomerado de peatones manifiesta comportamientos colectivos muy variados, tales como; caminado en condiciones normales, situaciones de aglomeración, e incluso situaciones de pánico. Por ser un sistema descentralizado el grupo presenta rasgos emergentes de agregación y formación de patrones espaciales. Para reproducir estos comportamientos se han utilizado diferentes tratamientos, tales como: el modelo de fuerza social (*reacción psicológica*) [1], modelos modificados de fuerza social [2-3], modelos hidrodinámicos extendidos y modelos de campo promedio [4-6], simulación de autómatas celulares y de gases reticulares [7-8], e incluso sistemas multi-agente que son propios de la computación en el área de la Inteligencia Artificial Distribuida [9]. Uno de los escenarios más estudiados corresponde al caminado de un con-

glomerado de peatones en contraflujo sobre un corredor. Al considerar algunos aspectos culturales de los peatones, en estos modelos, se hace necesario manejar suficientes recursos de información para diseñar agentes sofisticados que demandan ciertas “comodidades” específicas del ambiente.

En los modelos de fuerza social la enorme complejidad de comportamientos de los peatones individuales, que involucra cambios aleatorios de estrategias de caminado, se representa por interacciones psicológicas de repulsión social [1-3]. Las principales componentes de fuerza social que se debe considerar son los encuentros y las maniobras locales de evasión en el caminado. Sin embargo, en general, la fuerza social total se compone de diferentes influencias simultáneas que afectan el comportamiento de peatón, por ejemplo, fuerzas de relajación a la velocidad deseada de caminado, fuerzas de repulsión entre peatones y los bordes del ambiente, e incluso fuerzas de atracción a diferentes puntos de destino. En todos estos casos, los peatones toman decisiones complicadas entre diferentes alternativas de comportamiento las cuales, una vez aprendidas a prueba y error, se aplican de forma automática. Esto significa que el modelo de fuerza social considera

implícitamente comportamientos sofisticados de los peatones individuales.

Por otro lado, en el esquema de los sistemas multi-agente, y en menor grado en los modelos de autómatas celulares, los peatones son entidades con capacidades locales de percepción, decisión y actuación recursiva sobre un ambiente dinámico. Para modelar este tipo de conglomerados se requiere diseñar los módulos de software que representen las intenciones y comportamientos internos de los peatones. Existen modelos computacionales de sistemas multi-agente llamados BDI (*believes-desires-intentions*) que abordan esta problemática desde el punto de vista de la Inteligencia Artificial Distribuida [7-9]. Estos peatones tienen habilidades cognitivas y generalmente pueden tomar decisiones elaboradas sobre su próxima acción mediante el uso de reglas de interacción con el ambiente y con otros peatones. Sin embargo, la principal característica de los peatones modelados como agentes es que cuentan con un conjunto de reglas de caminado que les permite acceder a los espacios abiertos evitando obstáculos. También aplican este conjunto de reglas para desarrollar estrategias de evasión y evitar colisiones con otros peatones. Con este tipo de modelos se diseñan peatones que tienen comportamientos explícitamente sofisticados.

Una conclusión importante, que se obtiene al aplicar los esquemas mencionados anteriormente, es que los modelos sofisticados del caminado de peatones pueden no ser relevantes para reproducir los rasgos generales de la auto-organización del conglomerado. Es por ello que se pueden utilizar algunos modelos más sencillos para reproducir los patrones espaciales que presenta un conglomerado en contraflujo. Estas formaciones regulares provienen principalmente de *las interacciones repulsivas* entre peatones. En el corredor se pueden observar veredas de seguimiento que son reconocidas como una manifestación de la auto-organización colec-



FIGURA 1. Peadones caminando en contraflujo aplicando estrategias locales de evasión del tipo reacción psicológica por contacto cercano.

tiva (ver Fig. 1). No obstante, las características más importantes de caminado de un conglomerado se resumen en el diagrama fundamental de velocidad de flujo contra densidad de peatones. Con ayuda de este diagrama se verifica que los modelos son adecuados para describir el flujo de peatones y además permite hacer comparaciones directas con algunos resultados experimentales [6-9].

Podemos observar que en lugar de usar los modelos sofisticados podemos considerar que los peatones son agentes reactivos auto-impulsados que desarrollan formas de caminado automático, es decir, agentes que sólo utilizan la secuencia de caminado: percibe-actúa. En particular, los modelos tipo Vicsek hacen posible reproducir comportamientos colectivos complejos usando solamente la cinemática usual y cambios aleatorios de orientación que efectúan las partículas por sí mismas (partículas auto-impulsadas). Con estos modelos se ha logrado obtener resultados numéricos del comportamiento emergente durante el movimiento colectivo coordinado de diversos sistemas biológicos. Más aún, la comparación con los sistemas físicos análogos ha permitido hallar relaciones de orden-desorden en la forma de diagramas de transiciones de fase fuera de equilibrio [10-11]. A diferencia de los esquemas anteriores, en nuestro caso, proponemos una descripción cinética del conglomerado a través de la ecuación Boltzmann. Con esto abrimos la posibilidad de contar con expresiones analíticas de los parámetros macroscópicos del modelo en situaciones específicas del comportamiento colectivo. Esto nos permite tener un mejor entendimiento sobre la transición al flujo de estado estacionario y su relación con la formación de patrones espaciales de auto-organización de conglomerados en contraflujo.

En este trabajo presentamos un modelo cinético de discos rígidos auto-impulsados para describir un conglomerado que camina en contraflujo sobre un corredor. Cada peatón desarrolla dos formas excluyentes de caminado, que son hasta cierto punto opuestas, a) caminado libre y b) caminado con encuentros. En el caminado libre, cada peatón se desplaza balísticamente hacia su destino y eventualmente cambia su dirección de forma aleatoria. En el caminado con encuentros los peatones resuelven el conflicto de tráfico, que les impide seguir avanzando, como colisiones binarias de discos rígidos. Estos discos representan el potencial de repulsión social que necesita cada peatón para aplicar sus estrategias propias de caminado. Además de presentar la ecuación de Boltzmann y la función de distribución de velocidades de caminado, en estado estacionario, realizamos una simulación de la evolución transitoria de la dinámica fuera de equilibrio del conglomerado. Los resultados de la simulación muestran la formación de líneas de seguimiento, a cualquier densidad, que representan auto-organización colectiva de caminado. La formación de estos patrones resulta ser una estrategia emergente que sirve para mejorar el flujo del conglomerado. Verificamos que el modelo reproduce el diagrama fundamental del colectivo de acuerdo con los resultados experimentales.

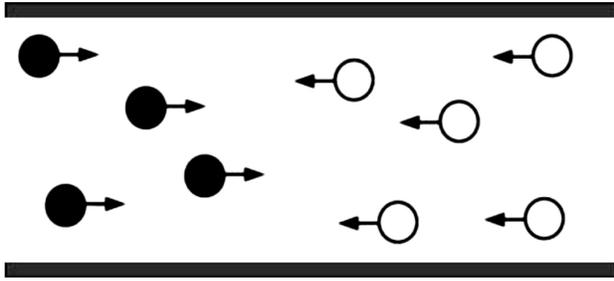


FIGURA 2. Peatones auto-impulsados en contraflujo sobre un corredor en caminado balístico.

## 2. Modelo del peatón

Los peatones son considerados como discos rígidos balísticamente auto-impulsados hacia su destino de salida (ver Fig. 2). En caminado libre se dirigen preferentemente al extremo opuesto del corredor con una velocidad deseada de persistencia  $v_d$ , eventualmente realizan cambios aleatorios de dirección con probabilidad  $p_0(\eta)$  que actúa como ruido Gaussiano con media cero y desviación típica  $\sigma_0^2$ . En caminado con encuentros la descripción de Boltzmann requiere elegir un peatón de referencia ubicado en  $\mathbf{r}$  con velocidad de caminado  $\mathbf{v}$  al tiempo  $t$ ; se supone que estos vectores tienen dos dimensiones sobre el plano del corredor. El vector de velocidad forma un ángulo  $\theta$ , y la velocidad deseada hacia el destino un ángulo  $\theta_d$ , con respecto a alguna dirección de referencia. Dado que se busca una ecuación de Boltzmann necesitamos introducir interacciones binarias entre los peatones.

Durante cada encuentro binario, el peatón de referencia resuelve el choque con respecto a cualquier otro peatón. Consideramos que, debido al encuentro, las velocidades de cami-

nado cambian de  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$  a  $(\mathbf{v}'\mathbf{v}'_1)$  antes y después de la colisión. No obstante, la magnitud de la velocidad de avance puede regularse voluntariamente por medio de las partículas mismas. En efecto, una vez resuelto el encuentro los peatones recuperan su velocidad de caminado libre hacia su destino de salida en un proceso denominado auto-difusión (ver Fig. 3a).

Para ser más específicos, consideremos la geometría de la Fig. 3b, según la cual la velocidad de caminado durante los encuentros debe cambiar de acuerdo al tipo específico de interacción. Para discos rígidos las velocidades se actualizan como sigue,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \\ \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$  es la velocidad relativa de los peatones antes del encuentro y  $\mathbf{k}$  es el vector unitario que une los centros de los discos rígidos en colisión y apunta hacia el peatón de referencia [13]. La suposición básica que hacemos es que los peatones *reaccionan* ante los encuentros para cambiar sus velocidades de acuerdo a colisiones de discos rígidos, no obstante, se mantiene la persistencia de orientarse hacia la dirección  $\theta_d$  de la velocidad de destino  $\mathbf{v}_d$  (ver Fig. 1).

## 3. Ecuación de Boltzmann

La ecuación de Boltzmann asociada a diferentes colectivos biológicos, e incluso un acercamiento a sus soluciones analíticas, se ha convertido recientemente en un tema frecuente en la literatura [11-12]. En nuestro modelo de conglomerado consideramos solamente las dos formas de caminado que hemos mencionado en la introducción. Estas deben aparecer como contribuciones separadas en el término colisional. En efecto, la evolución temporal de la función de distribución del espacio fase de una partícula  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , que nos da el número promedio de peatones entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  con velocidades entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  al tiempo  $t$ , satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = J_{\text{dif}}[f] + J_{\text{col}}[ff] \quad (2)$$

El término colisional contiene las dos contribuciones representadas en la Fig. 3. La primera contribución corresponde al caminado libre de auto-difusión que está dada por;

$$\begin{aligned} J_{\text{dif}}[f] &= \frac{1}{\tau} \int p_0(\eta) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \\ &\times \delta(\mathcal{R}(\mathbf{v}'; \eta) - \mathbf{v}) d\eta d\mathbf{v}' - \frac{1}{\tau} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

El vector de velocidad  $\mathbf{v}_\eta = \mathcal{R}(\mathbf{v}; \eta)$  se obtiene después de aplicar una rotación aleatoria en un ángulo  $\eta$  a partir de  $\theta$  la dirección original del vector  $\mathbf{v}$ . En el primer término se considera que la velocidad cambia de dirección por auto-difusión en un ángulo aleatorio  $\eta$ , mientras que en el segundo término se considera que los peatones se orientan a su destino de salida. La frecuencia promedio de cambio de dirección se denota

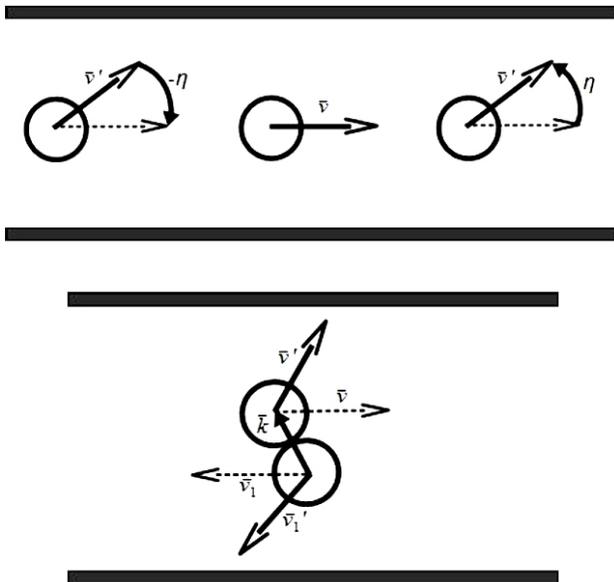


FIGURA 3. a) Caminado libre con ruido hacia el destino de salida y b) Evasión local en los encuentros vistos como colisiones binarias de disco rígido auto-impulsado.

por  $\tau$  que representa el tiempo promedio entre cambios consecutivos de dirección. La segunda contribución se refiere al caminado con encuentros entre peatones, en nuestro modelo propuesto esta corresponde a la integral de colisión de discos rígidos [13];

$$J_{\text{col}}[ff] = \int (f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t))a(\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})d\mathbf{k}d\mathbf{v}_1 \quad (4)$$

En esta última expresión se considera que las velocidades entre colisiones se actualizan según la Ec. (1). Además, en primera aproximación, se supone que no existe correlación de volumen excluido por efecto de aumento en la densidad. En estado de flujo estacionario la función de distribución de probabilidades se obtiene a partir de la Ec. (2), incorporando las Ecs. (3) y (4), y considerando además que  $(d/dt)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0$ . Bajo estas condiciones obtenemos que la expresión para la función de distribución de velocidades en estado estacionario es la siguiente,

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{n_0}{2\pi\mathbf{v}_d^2} + \frac{n(\mathbf{r}, t)}{2\pi\mathbf{v}_c^2(\mathbf{r}, t)} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r}, t))^2}{\mathbf{v}_c^2(\mathbf{r}, t)}} \quad (5)$$

donde  $n_0$  es la densidad global de peatones sobre el corredor. Como podemos observar la función de distribución  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  depende de los primeros momentos de la solución de la ecuación de Boltzmann, esto es, la densidad de número local, la velocidad de flujo local y la función de dispersión local de conglomerado, que están dadas por:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{v} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{v} \\ c(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2n(\mathbf{r}, t)} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{v} \quad (6) \end{aligned}$$

El último parámetro de la Ec. (6) define la llamada *calidad de conglomerado*, este tiene asociada una velocidad de formación de grupo, esto es,  $\mathbf{v}_c^2(\mathbf{r}, t) = 2c(\mathbf{r}, t)$ . Promediando la Ec. (6) sobre el área del corredor obtenemos  $u_0$  que es la velocidad promedio de flujo. Estas expresiones macroscópicas son similares a sus correspondientes en la dinámica de flujo hidrodinámico de gases, solo que ahora requieren de una nueva interpretación con base en la dinámica de caminado de conglomerados. En una etapa posterior de relajación los momentos de la Ec. (6) se hacen independientes de la ubicación y del tiempo pero se conserva la forma funcional de la Ec. (5).

#### 4. Simulación

El algoritmo descrito en esta sección se implementa en un programa de simulación desarrollado en la plataforma Net-Logo (*Software libre* <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>), que ha sido frecuentemente usada para modelar fenómenos

colectivos en sistemas biológicos. En este lenguaje de programación se diseñan los agentes y el ambiente por separado, y posteriormente, se integran a una interfaz gráfica. A diferencia de los agentes sofisticados, que usan reglas elaboradas de decisión, consideramos que sólo se necesita incluir ciertos elementos mínimos, dados por la Ecuación de Boltzmann (ver Ecs. (1)-(4)), para reproducir fenómenos colectivos emergentes de conglomerado. En efecto, el algoritmo considera que: a) Los peatones son partículas auto-impulsadas que avanzan hacia el extremo opuesto del corredor aplicando velocidades de persistencia con ruido Gaussiano, b) La zona de percepción de encuentros entre agentes se reduce al mínimo, dos peatones se perciben cuando el choque es inminente ó hay punto de contacto, c) Durante los encuentros los agentes aplican reglas reactivas, de cambio de dirección de caminado, de acuerdo a las colisiones elásticas de discos rígidos.

Con base en estas últimas consideraciones básicas construimos la interfaz de simulación usada para obtener la dinámica del conglomerado en contraflujo. En un esquema general los peatones son módulos de Software con habilidades de percepción-decisión-actuación. Cada una de estas habilidades es un sub-módulo con funciones específicas que realiza el agente por sí mismo. En efecto, en estado de percepción el agente “revisa” su entorno local sobre el ambiente. En cambio en estado de actuación el agente (partícula auto-impulsada) “actualiza” sus variables de estado cinemático, es decir, actualiza su posición y velocidad:  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow (\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \tau_0)$ , donde  $\tau_0$  es el tamaño de paso de la simulación ó tiempo de actualización de los peatones en el corredor. La componente principal del peatón, visto como agente, se presenta en el estado de decisión. Aquí es donde el algoritmo de simulación incluye los elementos del término de colisión de la Ecuación de Boltzmann como reglas de decisión. El peatón “aplica” las dos formas de caminado dadas por las Ecuaciones 3-4, en caminado libre de auto-difusión decide cambiar de estado usando  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow (\mathbf{r}', \mathbf{v}_\eta, t + \tau_0)$  y en caminado con encuentros entre peatones el agente aplica la transición,  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow (\mathbf{r}', \mathbf{v} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}, t + \tau_0)$ .

Aunque hemos explicado de forma detallada el diseño del algoritmo, en la implementación y de acuerdo a los requerimientos del programa de simulación, podemos considerar que los peatones son agentes reactivos auto-impulsados. Con esta simplificación adicional cada agente queda equipado, para fines prácticos, solamente con dos módulos de operación. Esto nos permite representar la cinemática de colisión de discos rígidos directamente como reglas de acción del agente en una secuencia recursiva temporal paso a paso: percibe-actúa (ver Fig. 4).

Adicionalmente, la simulación requiere de la *secuencia de caminado* que aplica cada peatón, cuyo modo operación se describe en el diagrama de la Fig. 5. En este diagrama se muestra que cada agente “revisa” si su zona de repulsión está vacía (caminado libre) o bien ocupada (caminado con encuentros). En caminado libre “aplica” cambios de dirección aleatorios  $\eta$  de amplitud pequeña y distribución Gaussiana

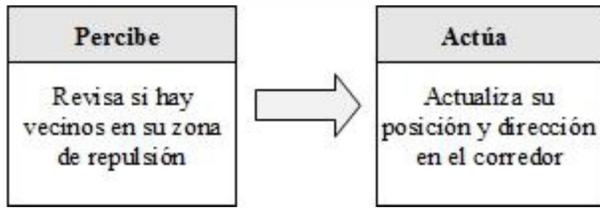


FIGURA 4. Secuencia de caminado de agente reactivo.

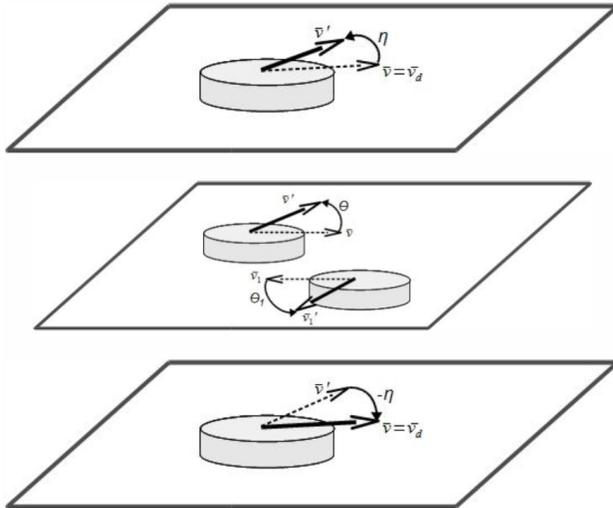


FIGURA 5. Simulación de la secuencia caminado: Inicialmente pasa de caminado libre a caminado con encuentros y nuevamente regresa a caminado libre hacia el destino.

(ver Sec. 2). En caminado con encuentros, revisa si hay punto de contacto, y entonces “actualiza” sus velocidad de caminado en el corredor conforme a la Ec. (1). Una vez resuelta la colisión el peatón, visto como agente reactivo auto-impulsado, regresa al modo de caminado libre.

Posterior al diseño del agente, se construyen las componentes de la interfaz gráfica que es el ambiente donde se ubica el conglomerado para su visualización. En estas interfaces cada peatón es un agente reactivo que interacciona con su entorno local. En la implementación se distribuyen aleatoriamente un número determinado de peatones en contraflujo sobre el corredor, se determinan los tiempos de reacción entre colisiones sucesivas, así como las dimensiones relativas del corredor. Como podremos observar más adelante (ver Fig. 6), durante la ejecución de la simulación, se obtiene la dinámica colectiva de un sistema multi-agente reactivo de peatones en contraflujo. No obstante que la actualización de las velocidades de caminado se realiza de forma secuencial podemos considerar que los peatones desarrollan sus trayectorias de caminado y maniobras de evasión en grupo todos al mismo tiempo.

### 5. Resultados y discusión

La interfaz gráfica de simulación del conglomerado contiene elementos adicionales, además del ambiente (*corredor*) so-

bre el cual van a caminar los agentes (*peatones*), útiles para el usuario. Con estos elementos podemos declarar los datos de entrada necesarios para realizar la simulación. Regularmente usamos variables adimensionales para definir las velocidades de caminado, el número de peatones y la distribución espacial inicial, así como las dimensiones del ambiente. Asimismo, podemos ingresar los tiempos característicos del sistema, tales como los tiempos de reacción entre colisiones y los tiempos de visualización necesarios para dar seguimiento a las diferentes etapas de evolución de flujo del conglomerado. La formación de patrones espaciales, principalmente la formación de veredas de seguimiento, resulta ser una estrategia colectiva de conglomerado para mejorar el flujo. Los resultados los presentamos en la forma de una secuencia de

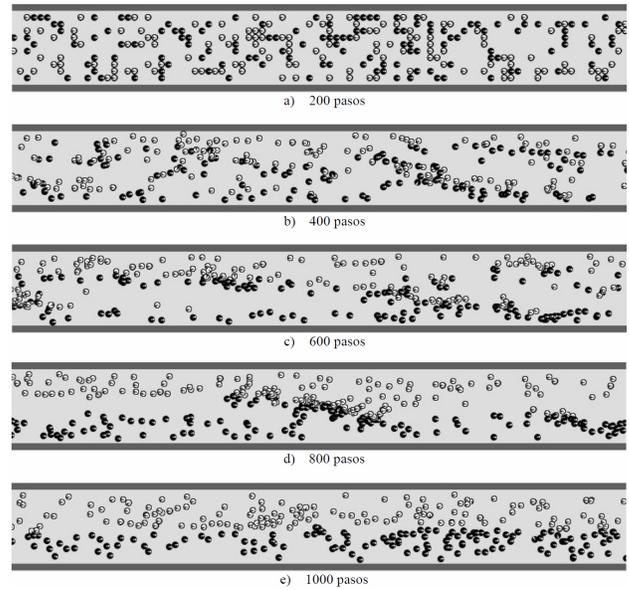


FIGURA 6. Instantáneas del caminado del conglomerado (al 35% de ocupación) que muestran la transición espontánea a la formación de veredas de seguimiento (auto organización).

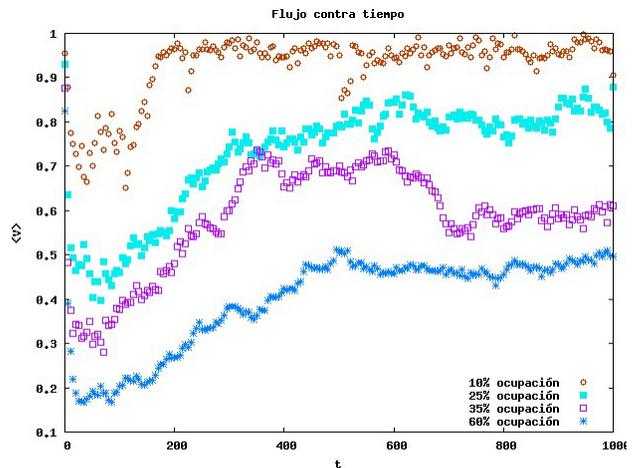


FIGURA 7. Velocidad de flujo promedio de conglomerado en función del tiempo.

instantáneas del conglomerado asociadas con las diferentes etapas de la formación de patrones espaciales de caminado. En la Fig. 6, mostramos como es que el grupo pasa de una configuración inicial aleatoria a un patrón de veredas de seguimiento bien definidas. Cuando se separan definitivamente los grupos en contraflujo (Fig. 6e)) el conglomerado alcanza su mejor desempeño de transporte, ver Fig. 7. En efecto, por ser agentes autónomos la dinámica colectiva tiene características de un sistema descentralizado, con comportamientos emergentes, que resultan ser usadas por el grupo para mejorar el flujo de caminado.

En la Fig. 7 mostramos la velocidad promedio (normalizada con respecto a la velocidad máxima de flujo) del conglomerado en función del tiempo (en unidades del número de pasos de simulación) a diferentes porcentajes de ocupación del corredor. Inicialmente se produce una gran cantidad de encuentros, y la formación de cúmulos de atasco, por lo que el flujo disminuye considerablemente. Sin embargo, posteriormente se empiezan a resolver los encuentros entre peatones y con esto se mejora la continuidad del caminado mediante un proceso permanente de formación y disolución de cúmulos.

Durante la realización de los experimentos debemos generar los registros de datos numéricos usados para evaluar la función de distribución de velocidades correspondiente a la ecuación de Boltzmann. Esto se hace con el fin de describir el proceso completo necesario para alcanzar el estado colectivo de flujo estacionario. En la Fig. 8, se muestran los resultados de la función de distribución de velocidades en función del tiempo sobre todo el corredor. Esencialmente, se obtiene una distribución normal que evoluciona aumentando su amplitud con el tiempo, esto refleja como se mejora el flujo de caminado del conglomerado. Cabe notar que las oscilaciones laterales corresponden a la formación y disolución de cúmulos de atasco. Finalmente, otro resultado importante de la simulación corresponde al diagrama fundamental de velocidad de flujo promedio contra densidad de peatones en el corredor. Este diagrama, además de ser una característica propia de cualquier conglomerado de peatones, reproduce con buena aproximación los resultados experimentales del flujo promedio (ver Fig. 9).

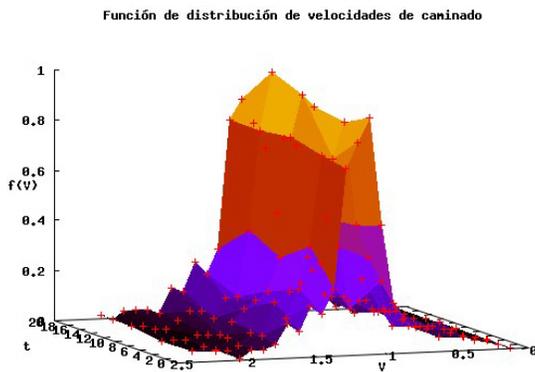


FIGURA 8. Evolución temporal de la función de distribución de velocidades hacia el estado estacionario.

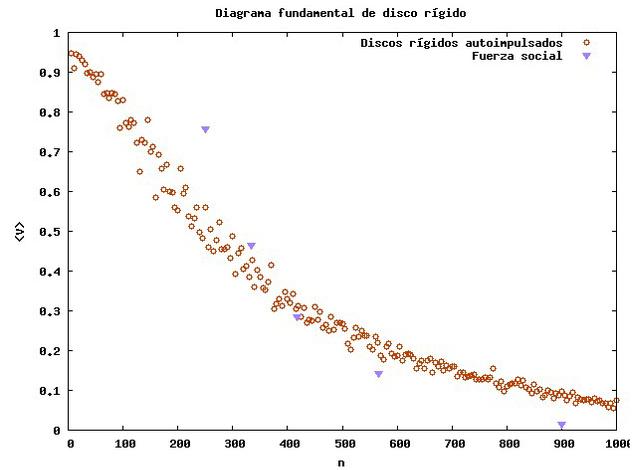


FIGURA 9. Diagrama fundamental de velocidad de flujo contra densidad. Comparación con los resultados experimentales (ver Ref. [2]).

### 6. Conclusiones

Hemos propuesto una Ecuación de Boltzmann para describir el comportamiento colectivo de conglomerados de peatones que caminan en contraflujo. Cada peatón resuelve sus encuentros como colisiones de discos rígidos auto-impulsados. La integral de colisión tiene dos componentes: Una integral colisional auto-difusiva (caminado libre) y una integral colisional, asociada con el potencial de repulsión social, de discos rígidos (caminado con encuentros).

La solución analítica de la ecuación de Boltzmann, en estado estacionario, corresponde a una distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann con escalamiento temporal. La solución completa, que involucra estados colectivos transitorios, se obtiene mediante la simulación de un sistema multi-agente reactivo con interacción local de discos rígidos. El algoritmo se diseña para representar exactamente al término de colisión de la Ecuación de Boltzmann. La simulación proporciona la evolución de la función de distribución de velocidades, sobre todo el corredor, en función del tiempo. Se encuentran características propias de los fenómenos de auto-organización colectiva, como la formación de veredas de seguimiento, lo que resulta ser una estrategia emergente que sirve para mejorar el flujo del conglomerado. La simulación tiene un mejor desempeño, con respecto a los tratamientos de agentes sofisticados mencionados en la introducción, en la medida en que se producen cambios de configuración de grupo mucho más suaves. Los resultados muestran que la auto-organización colectiva es producto del potencial de repulsión social más que de otros factores relacionados con la toma de decisiones de los peatones sofisticados. Se comprueba que el modelo cinético corresponde a un conglomerado de peatones, mediante el cálculo del diagrama fundamental de caminado colectivo el cual reproduce correctamente los resultados experimentales.

## Agradecimientos

L. S. García Colín *in memoriam*

- 
1. D. Helbing y P. Molnár, *Phys. Rev. E* **51** (1995) 4282-4286.
  2. A. Seyfried, B. Steffen y T. Lippert, *Physica A* **368** (2006) 232-238.
  3. D. R. Parisi, M. Gilman y H. Moldovan, *Physica A* **388** (2009) 3600-3608.
  4. R. L. Hughes, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **35** (2003) 169-182.
  5. Y. Jiang, S. C. Wong y P. Shang, *App Math. Comp.* **215** (2012) 6135-6143.
  6. D. Yanagisawa y K. Nishinari, *Phys. Rev. E* **76** (2007) 061117-061126.
  7. Y. F. Yu y W. G. Song, *Phys. Rev. E* **75** (2007) 046112-046120.
  8. D. Helbing, M. Isobe y T. Nagatani, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 067101-067105.
  9. A. Rangel-Huerta y A. Muñoz-Meléndez, *Physica A* **389** (2010) 1077-1089.
  10. T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen y O. Shochet, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1226-1229.
  11. E. Bertin, M. Droz y G. Grégoire, *Phys. Rev. E* **74** (2006) 022101.
  12. N. Bellomo, *Modeling Complex Living Systems* (Ed. Birkhauser 2008).
  13. W. Marques-Junior, *Brazilian Journal of Physics* **24** (1994) 685-692.