

# Solución general de la ecuación de Navier-Stokes para describir la dinámica de un fluido viscoso homogéneo en una tubería abierta

J. de Jesús Rubio<sup>a,b</sup>, G. Ordaz<sup>a</sup>, M. Jiménez-Lizárraga<sup>c</sup>, R. Iván Cabrera<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, ESIME Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional, Av. de las Granjas no. 682, Col. Santa Catarina, México D.F., 02250, México, phone:(+52)55-57296000. Ext.64497;

email: jrubioa@ipn.mx; rubio.josedejesus@gmail.com

<sup>b</sup>Centro de Investigación e Innovación Tecnológica, Instituto Politécnico Nacional, Cerrada Cecaty s/n, Col. Santa Catarina, México D.F., 02250, México, phone:(+52)55-57296000. Ext.64497;

email: jrubioa@ipn.mx; rubio.josedejesus@gmail.com

<sup>c</sup>School of Physical and Mathematical Sciences, Autonomous University of Nuevo León, San Nicolas de los Graza Nuevo León, México, email: majimenez@cfm.uanl.mx

Received 24 May 2012; accepted 31 January 2013

En este artículo se presenta un análisis en términos de partículas para la solución unidimensional de la ecuación de Navier-Stokes bajo condiciones de frontera que permite describir un fluido de una tubería en la industria petrolera.

**Descriptor:** Análisis en términos de partículas; ecuación de Navier-Stokes.

This paper presents a particle analysis of the unidimensional solution of the Navier-Stokes equation with border conditions which lets to describe a fluid on a petroleum industry pipe.

**Keywords:** Particle analysis; Navier-Stokes equation.

PACS: 02.30.Yy; 02.60.Lj; 02.60.Cb

## 1. Introducción

En este artículo se plantea el problema de modelar la dinámica de un fluido viscoso compresible que viaja a través de un sistema de tuberías en circuito abierto, esto es, se desarrolla la solución del comportamiento de un fluido que viaja en una sola dirección teniendo presente sus características físicas.

El punto de partida del problema se da en el momento en el que se elige un ejemplo real que sucede en un proceso específico de la industria petrolera, y es el de transportar gas amargo a través de distancias muy largas donde eso implica tener estaciones de compresión a cierta distancia como indican las normas que a esto corresponde (14 km), lo más interesante de este ejemplo es que la tubería que debe ser subterránea y no se extiende de manera uniforme, es decir, debido a muchos factores ya sea del subsuelo o por motivo de cruzamiento de la ruta por otras líneas de tuberías, por ríos o carreteras provoca desviaciones como las que se muestran en la Fig. 1, se les llama *cruzamientos* en ingeniería de diseño, cuyas desviaciones generan *puntos de ruptura* que no son más que la sección de tubería que se degrada para efectuar un cambio de nivel. Hasta este punto el análisis se torna complicado ya que al observar la dinámica del fluido que las partículas toman en los cambios de nivel se destaca la dificultad de modelar y más aún de obtener la solución de tal comportamiento.

Ahora bien, el fluido en estudio (gas amargo) cuyas características de homogeneidad y compresibilidad resultan ser

interesantes pero a la vez complicadas desde un nivel de partículas debido a la composición del mismo (gas metano, propano, butano, etano, ácido sulfhídrico), torna aún más interesante su estudio.

Ha de tomarse en cuenta que la tubería se supone lisa (sin rugosidad) y que el medio continuo se concibe en partículas elementales cuyo análisis se realiza de manera local, es decir, se busca la descripción a través de su expresión más elemental, donde las condiciones de frontera suponen que el viaje de las partículas a través de la tubería es a una distancia constante entre una y otra, cuyas dinámicas son hasta cierto punto independientes.

En base a los conocimientos de mecánica de fluidos [1-4], en los cuales se engloban los matemáticos y los físicos se debe plantear un modelo que describa la dinámica de un fluido y con ello la solución, que muestre el comportamiento en términos de partículas en su estado estacionario y transitorio, se procede a desarrollar el modelo a partir de las ecuaciones



FIGURA 1. Sección de tubería seleccionada para el estudio del fluido.

ciones de fluidos viscosos con características homogéneas de Navier-Stokes [13].

## 2. Tratamiento del modelo matemático

La expresión más general de la ecuación de Navier-Stokes es:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla P + \lambda \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + f_c(x, t) \quad (1)$$

donde:

- $P$  : Presión del compresor a través de la tubería
- $\lambda$  : Constante

Sin embargo, cuando el fluido es incomprensible pero viscoso, la ecuación anterior se simplifica bastante pues se cumplen las siguientes condiciones  $d\rho/dt = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ,  $f_c(x, t) = 0$  (porque se desprecia el efecto de las fuerzas externas) que significa que debe existir homogeneidad en la densidad. Lo que lleva a resolver la siguiente ecuación de Navier - Stokes para fluidos viscosos:

$$k \nabla^2 \vec{u} - \nabla P - \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (2)$$

con  $k = \mu/\rho$  y donde:

- $\mu$  : Parámetro de viscosidad del fluido
- $\rho$  : Densidad del fluido
- $\vec{u}$  : Vector de velocidad
- $\nabla \vec{u}$  : Término convectivo

Si definimos el vector de velocidad  $\vec{u}$  como sigue:

$$\vec{u} = u_j \equiv \{u_x, u_y, u_z\}$$

la Ec. (2) se puede expresar como:

$$k \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial t} \quad (3)$$

Como se considera que la partícula se desplaza de manera unidimensional, la Ec. (3) se reescribe como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u^2}{2} - P \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

donde se observa que

$$k \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u^2}{2} - P$$

es la *ecuación de Riccati*.

Por este hecho, se propone la siguiente solución para la ecuación de Riccati:

$$u = -2k \frac{\partial}{\partial x} \ln \beta(x, t) = \frac{-2k}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \quad (5)$$

Ahora, se obtiene la derivada con respecto a la posición de (5), y entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-2k}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right] \\ &= -2k \left[ \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \{ \beta^{-1}(x, t) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^2(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right\} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2k \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{2k}{\beta(x, t)} \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \left\{ 2k \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{2k}{\beta(x, t)} \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial x^2} \right\} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{-2k}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - P \right] \right] \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[ -2k \frac{\partial}{\partial x} \ln \beta(x, t) \right] \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ -2k \frac{\partial}{\partial x} \ln \beta(x, t) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -2k \frac{\partial}{\partial t} \ln \beta(x, t) \right],$$

se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. - 2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial x^2} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - P \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -2k \frac{\partial}{\partial t} \ln \beta(x, t) \right] \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, se cancela el término

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ 2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right],$$

y considerando (5), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x, t)} \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial x} \right) - P \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-2k}{\beta(x, t)} \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Se cancela el término  $\partial x$  a ambos lados de la igualdad. Integrando a ambos lados de la igualdad se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \int \partial \left[ -2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x,t)} \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial x} \right) - P \right] \\ &= \int \partial \left[ \frac{-2k}{\beta(x,t)} \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} \right] \\ & \quad - 2k^2 \left( \frac{1}{\beta(x,t)} \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial x} \right) - P + c_a \\ &= \frac{-2k}{\beta(x,t)} \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + c_b \end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede reescribir como sigue:

$$\frac{-2k^2}{\beta(x,t)} \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial x} - (P + c_b - c_a) = \frac{-2k}{\beta(x,t)} \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t}$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $-\beta(x,t)$  dividiendo por  $2k^2$ , la nueva ecuación por resolver es:

$$\frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial x} + \bar{P} \beta(x,t) = \frac{1}{k} \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} \tag{7}$$

donde

$$\bar{P} = \frac{P + c_b - c_a}{2k^2}$$

La Ec. (7), tiene una estructura muy similar a la ecuación de Schrödinger [12]:

$$\nabla^2 \beta + \bar{P} \beta = \frac{1}{k} \frac{\partial \beta}{\partial t} \tag{8}$$

Utilizando el método de variables separables, se propone la siguiente solución:

$$\beta(x,t) = \beta(x) \beta(t) \tag{9}$$

sustituyendo (9) en (7), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \beta(x)}{\partial x} \beta(t) + \bar{P} \beta(x) \beta(t) - \frac{1}{k} \frac{\partial \beta(t)}{\partial t} \beta(x) = 0 \\ & \beta''(x) \beta(t) + \bar{P} \beta(x) \beta(t) - \frac{1}{k} \beta'(t) \beta(x) = 0 \end{aligned}$$

dividiendo entre  $\beta(x) \beta(t)$ , se obtiene:

$$\frac{\beta''(x)}{\beta(x)} + \bar{P} - \frac{1}{k} \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 0 \tag{10}$$

Como el tercer término de (10) sólo depende del tiempo, se refiere a él como la parte transitoria del sistema, mientras que los otros dos términos solo dependen de la posición, a dichos términos se les nombra como la parte estacionaria del sistema. Es decir, de la parte transitoria del sistema se tiene:

$$\frac{1}{k} \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = -\lambda^2 \tag{11}$$

donde  $-\lambda^2 \in \Re$  es una constante. Por otra parte, se conoce que la derivada de un logaritmo natural se puede expresar para este problema como sigue:

$$\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \frac{\partial \ln \beta(t)}{\partial t}$$

Sustituyendo  $\beta'(t)/\beta(t)$  por  $\partial \ln \beta(t)/\partial t$  en la Ec. (11), se tiene lo siguiente:

$$d \ln \beta(t) = -k\lambda^2 dt \tag{12}$$

Integrando a ambos lados de (12), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int d \ln \beta(t) = - \int k\lambda^2 dt \\ & \ln \beta(t) + c_1 = -k\lambda^2 t + c_2 \\ & \ln \beta(t) = -k\lambda^2 t + c \end{aligned}$$

donde  $c = c_2 - c_1$ .

Aplicando la función exponencial a ambos lados, se obtiene:

$$\beta(t) = A e^{-k\lambda^2 t} \tag{13}$$

donde  $A = e^C$ .

Sustituyendo (11) en (10), se obtiene la parte estacionaria del sistema como sigue:

$$\frac{\beta''(x)}{\beta(x)} + \bar{P} + \lambda^2 = 0$$

multiplicando la ecuación anterior por  $\beta(x)$ :

$$\beta''(x) + \bar{P} \beta(x) + \lambda^2 \beta(x) = 0 \tag{14}$$

Se propone el siguiente cambio de variable, para tratar la Ec. (14) y llevar a una forma conocida:

$$y = \frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha x}{2}} \tag{15}$$

donde  $y \in [0, \frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha}]$ , esto implica que:

$$e^{-\frac{\alpha x}{2}} = \frac{\alpha y}{2\sqrt{P_0}} \tag{16}$$

Ahora derivando (15) con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha x}{2}} = \frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha} \left( \frac{-\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right) \\ &= \frac{-\alpha}{2} \left( \frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha}{2} y \end{aligned}$$

Utilizando la  $dy/dx$  del desarrollo anterior, la segunda derivada parcial de  $x$ ,  $(d/dx)(d/dx)$  se reescribe en términos de  $y$  para posteriormente ser usada en la Ec. (14):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \right) &= \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \left( \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \right) = \frac{-\alpha}{2} y \frac{d}{dy} \left( \frac{-\alpha}{2} y \frac{d}{dy} \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4} y \left\{ \frac{d}{dy} \left( y \frac{d}{dy} \right) \right\} \\ &= \frac{\alpha^2}{4} y \left\{ y \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dy} \right) + \frac{dy}{dy} \frac{d}{dy} \right\} \\ &= \frac{\alpha^2}{4} y \left\{ y \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} \right\} \end{aligned}$$

donde se aplicó la derivada

$$\frac{d}{dy}(uv) = u \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy}v$$

con  $u = y$  y  $v = d/dy$ , y que  $dy/dy = 1$ . Por lo tanto  $(d/dx)(d/dx)$  finalmente da:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \right) = \frac{\alpha^2}{4} y^2 \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\alpha^2}{4} y \frac{d}{dy} \tag{17}$$

Aplicando (17) a (14), se produce el siguiente resultado:

$$\frac{\alpha^2}{4} y^2 \beta''(y) + \frac{\alpha^2}{4} y \beta'(y) + \bar{P} \beta(y) + \lambda^2 \beta(y) = 0 \tag{18}$$

donde  $\bar{P}$  se ha definido en (7). La presión que ejerce el compresor a través de la tubería  $P$  se define como sigue:

$$P = 2k^2 P_0 e^{-\alpha x} \tag{19}$$

**Observación 1:** Es conocido que la presión que ejerce el compresor a través de la tubería cuando se tiene un tubo recto decae de manera lineal con la posición. Pero en este estudio, se analiza un tubo el cual tiene cuatro desviaciones consideradas como gargantas las cuales forman un punto de ruptura descrito en la Fig. 1. El hecho descrito anteriormente podría justificar el resultado de que la presión decae de manera exponencial con la posición.

Sustituyendo  $\bar{P}$  de (7) y  $P$  de (19) en la Ec. (18), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\alpha^2}{4} y^2 \beta''(y) + \frac{\alpha^2}{4} y \beta'(y) + \left( P_0 e^{-\alpha x} + \frac{c_b - c_a}{2k^2} \right) \beta(y) + \lambda^2 \beta(y) = 0 \tag{20}$$

pero

$$e^{-\alpha x} = \frac{\alpha^2 y^2}{4P_0}$$

debido a (16), entonces:

$$\frac{\alpha^2}{4} y^2 \beta''(y) + \frac{\alpha^2}{4} y \beta'(y) + \left( \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \frac{c_b - c_a}{2k^2} \right) \beta(y) + \lambda^2 \beta(y) = 0 \tag{21}$$

Multiplicando por  $4/\alpha^2$ , se tiene que:

$$y^2 \beta''(y) + y \beta'(y) + \left( y^2 - \frac{2c_a - 2c_b - 4k^2 \lambda^2}{\alpha^2 k^2} \right) \beta(y) = 0 \tag{22}$$

Finalmente, si se define:

$$\nu = \frac{\sqrt{2c_a - 2c_b - 4k^2 \lambda^2}}{\alpha k} \tag{23}$$

Sustituyendo (23) en (22), se tiene:

$$y^2 \beta''(y) + y \beta'(y) + (y^2 - \nu^2) \beta(y) = 0 \tag{24}$$

La Ec. (24), se conoce como la *ecuación diferencial de Bessel de orden  $\nu$*  [10], cuya solución general está definida como sigue:

$$\beta(y) = C_1 J_\nu(y) + C_2 Y_\nu(y) \tag{25}$$

donde:

$J_\nu(y)$  Es una función de Bessel de primer tipo  $y$ .  
 $Y_\nu(y)$  Es una función de Bessel de segundo tipo también conocida como de Neumann.

$C_1, C_2$  Son constantes arbitrarias determinadas a partir de las condiciones de frontera.

Como la solución es infinita cuando  $y = 0$  y como  $Y_\nu(y) \rightarrow \infty$  cuando  $y \rightarrow 0$ , esto significa que el coeficiente de  $Y_\nu(y)$  es  $C_2 = 0$ , dejando la solución  $\beta(y)$  expresada como sigue:

$$\beta(y) = C_1 J_\nu(y) \tag{26}$$

Entonces, regresando a la forma (9) de la solución por variables separables, y usando (13), se tiene lo siguiente:

$$\beta(y, t) = \beta(y) \beta(t)$$

$$\beta(y, t) = C_1 J_\nu(y) A e^{-k \lambda^2 t} \tag{27}$$

### 2.1. Solución estacionaria

Retomando el análisis para la obtención de la solución estacionaria la Ec. (26), el cual se normaliza a partir de la unidad, recuerde que  $y \in [0, (2\sqrt{P_0}/\alpha)]$  debido a (15), lo cual determina las cotas de integración, esto es:

$$\int_0^{\frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha}} C_1^2 J_\nu(y) J_\nu(y) dy = 1 \tag{28}$$

entonces:

$$C_1^2 = \frac{1}{\int_0^{\frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha}} J_\nu(y) J_\nu(y) dy} \tag{29}$$

por lo tanto:

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{\int_0^{\frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha}} J_\nu(y) J_\nu(y) dy}} \tag{30}$$

Obsérvese que los ceros de la función de Bessel no pueden determinarse a priori por lo que es difícil encontrar una solución cerrada para expresar la normalización de la constante y entonces la constante depende de los valores  $C_1(\alpha, P_0, \lambda)$ .

El resultado de la integral numérica se obtuvo mediante simulación en el programa Mathematica V. 5.0, tomando en cuenta los datos de la Tabla I propios del fluido en cuestión:

TABLA I. Datos de las propiedades del medio continuo.

Nombre	Símbolo	Valor	Unidades
Constante	$\lambda$	0.5	No aplica
Constante de decaimiento	$\alpha$	1/4	No aplica
Presión inicial de descarga del compresor	$P_0$	200	psi=lb <sub>f</sub> /in <sup>2</sup>
Viscosidad absoluta del gas	$\mu$	$1.49 \times 10^{-5}$	lb <sub>f</sub> s/in <sup>2</sup>
Densidad del gas	$\rho$	$6.57 \times 10^{-5}$	lb/in <sup>3</sup>
Coefficiente de Viscosidad	$k = \frac{\mu}{\rho}$	0.2267	No aplica
Constante	$c_a$	0.5	No aplica
Constante	$c_b$	0.5	No aplica

Sustituyendo los datos de la Tabla I en (30), se tiene:

$$C_1 = 0.883114 \tag{31}$$

Ahora bien, la solución estacionaria (26), para un  $\nu$  fijo tomado de (23) como

$$\nu = \frac{\sqrt{2c_a - 2c_b - 4k^2\lambda^2}}{\alpha k},$$

se escribe en forma general:

$$\beta(y) = \sqrt{\frac{1}{\frac{2\sqrt{P_0}}{\alpha} \int_0^\alpha J_\nu(y) J_\nu(y) dy}} [J_\nu(y)] \tag{32}$$

Al igual que en la obtención del coeficiente (31), mediante simulación en *Mathematica V. 5.0* se obtiene la respuesta de la solución estacionaria del sistema de la Fig. 2.

Obsérvese que el comportamiento es oscilatorio decreciente, y bajo rangos de periodo en los que la partícula es impulsada nuevamente por el superpotencial retoma amplitud y regresa a la dinámica de decaimiento, aún más detenidamente, se encuentran singularidades periódicas en el sistema que representan sin lugar a dudas la fase de turbulencia de la partícula, físicamente representa la transición de la misma en la degradación de la tubería, del sistema de estudio.

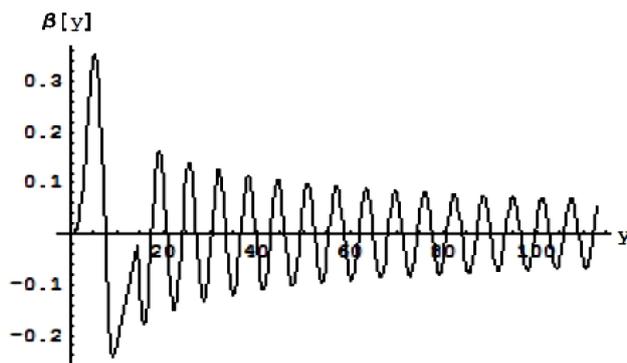


FIGURA 2. Comportamiento estacionario del sistema.

### 2.2. Solución transitoria

Retomando también la Ec. (13), donde  $t \in [0, 0.005]$  en segundos. Como en la solución estacionaria, se debe encontrar el coeficiente  $A$ , que depende de las condiciones de frontera (Véase Tabla I). Se procede a normalizar la Ec. (13) y se tiene:

$$\int_0^{0.005} A^2 \beta_a(t) \beta_a(t) dt = 1 \tag{33}$$

donde  $\beta_a(t) = e^{-k\lambda^2 t}$ . Entonces:

$$A^2 = \frac{1}{\int_0^{0.005} \beta_a(t) \beta_a(t) dt} \tag{34}$$

por lo tanto:

$$A = \sqrt{\frac{1}{\int_0^{0.005} \beta_a(t) \beta_a(t) dt}} \tag{35}$$

Usando la Ec. (13), la solución transitoria del sistema se expresa en forma general como sigue:

$$\beta(t) = \sqrt{\frac{1}{\int_0^{0.005} \beta_a(t) \beta_a(t) dt}} e^{-k\lambda^2 t} \tag{36}$$

El cálculo del coeficiente es llevado a cabo mediante la herramienta de simulación ya mencionada, tomando en cuenta los valores de la Tabla 1 se tiene que  $A$  depende  $A(k, \lambda, t)$ , y con valor:

$$A = 3.76087 \tag{37}$$

La solución transitoria del sistema tiene entonces la dinámica de la Fig. 3.

Es así como se llega a la obtención de la solución general del sistema, que describe el comportamiento general de la en-

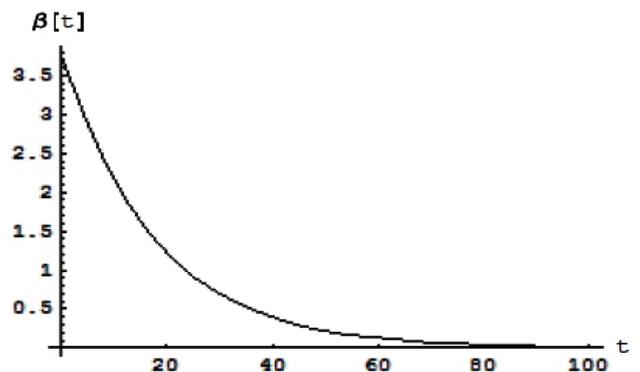


FIGURA 3. Comportamiento transitorio del sistema.

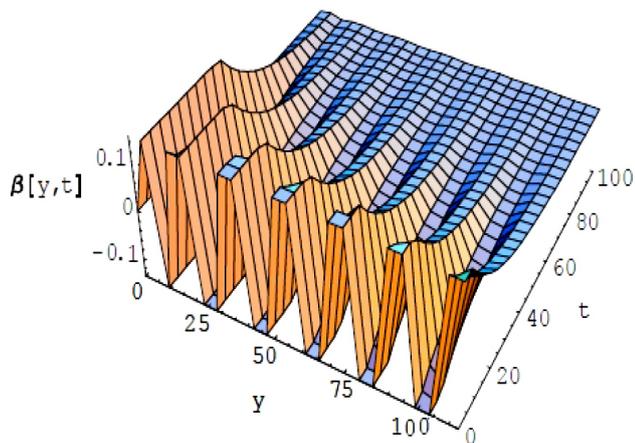


FIGURA 4. Comportamiento general del sistema.

tividad elemental que conforma el medio que se está estudiando y que de manera general se escribe como sigue:

$$\beta(y, t) = C_1 J_\nu(y) A e^{-k\lambda^2 t} \quad (38)$$

Para el caso particular del sistema y agregando los resultados de los coeficientes, se tiene:

$$\begin{aligned} \beta(y, t) &= (0.883114) J_\nu(y) (3.76087) e^{-k\lambda^2 t} \\ \beta(y, t) &= 3.3213 J_\nu(y) e^{-k\lambda^2 t} \end{aligned} \quad (39)$$

Aprovechando la herramienta del software Mathematica V. 5.0, usado también para la obtención de las respuestas estacionaria y transitoria, así como los coeficientes que a estas corresponden, entonces se tiene el comportamiento general del sistema de la Fig. 4.

Es así como se llega a la respuesta del sistema, lo que se convierte en el tema de estudio para la aplicación de más herramientas y métodos de análisis del caso particular que aquí se aborda. En este caso, los cambios de forma del tubo modifican el perfil de velocidades en el sistema de referencia cartesiano usado en este artículo.

### 3. Conclusiones

En este trabajo se logra un avance en el estudio más profundo de la descripción del comportamiento de un gas de hidrocarburos a través de un contenedor tubular, que en primera instancia puede dar una visión del comportamiento y la descripción del mismo. Como trabajo futuro, se va a utilizar el modelo dinámico propuesto para detectar las fallas en una tubería, o se va a abordar el problema tridimensional y a partir de él reducir el problema al unidimensional, también, se diseñará un controlador inteligente para mejorar el comportamiento del gas de hidrocarburos a través del contenedor tubular [22-31].

### Agradecimientos

Los autores agradecen al editor y a los revisores por sus valiosos comentarios y sugerencias que permitieron mejorar esta investigación significativamente. Los autores agradecen a la Secretaria de Investigación y Posgrado, a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del IPN, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su ayuda en esta investigación. El tercer autor agradece a CONACYT por el proyecto 169734.

1. F. A. Sanchez, G. J. Gutierrez y A. Medina, *Rev. Mex. Fis.* **55** (2009) 467-471.
2. F. de J. Guevara, *Rev. Mex. Fis.* **57** (2011) 125-132.
3. M. Pliego, C. Fuentes, G. J. Gutierrez y A. Medina, *Rev. Mex. Fis.* **56** (2010) 475-481.
4. M. Pliego, G. J. Gutierrez y A. Medina, *Rev. Mex. Fis.* **57** (2011) 1-5.
5. L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos* (Reverté, Barcelona, España, 1991).
6. V. L. Streeter y E. B. Wylie, *Fluid Mechanics* 3th Edition, (Mc Graw-Hill, New York, U. S. A., 1998).
7. T. B. Gatski y J.-P. Bonnet, *Compresibility, Turbulence and High Speed Flow*, (Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2009).
8. J. E. Marsden y Thromba, *Cálculo vectorial* (Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1991).
9. A. J. Chorin y J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* (Springer-Verlag, London, United Kingdom, 1980).
10. D. G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado* (Ed. Thomson, 2002). pp. 259-265.
11. B. Viorel, *Stabilization of Navier-Stokes Flows* Springer-Verlag, London, United Kingdom, 2011.
12. R. Becerril, F. S. Guzmán, A. Rendón-Romero, S. Valdéz Alvarado, *Rev. Mex. Fis.* **58** (2008).
13. R. Temam, 2nd. Edition, *SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics*, (Philadelphia, USA, 1995).
14. P. Constantin, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001). pp. 353-360.
15. J. L. Vásquez, *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza* (Madrid, España 2004). pp. 31-56.
16. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax y B. Maazur, *Mathematics: Frontiers and Perspectives* AMS (Publications, USA, 2000).
17. L. A. Caffarelli, R. Khon y L. Nierenberg, *Comm. Pure Applied Maths.* Vol. **35** (1982). pp. 771-831.

18. R. Hamilton, *Surveys in Differential Geometry* Vol. 2 (International Press, 1955), pp. 7-136.
19. A. J. Majda y A.L. Bertozzi, *Vorticity and Compressible Flows*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
20. A. M. Glazer y J. S. Wark, *Statistical Mechanics*, (Oxford University Press, 2001).
21. G. Galdi, *An introduction of the mathematical theory of Navier-Stokes equations* Vols. I, II, (Springer-Verlag, 1994).
22. C. F. Aguilar-Ibañez, M. S. Suárez-Castañón y J. J. Rubio, *Mathematical Problems in Engineering* **2012** (2012) 1-13.
23. C. F. Aguilar-Ibañez, J. C. Martínez García, A. Lopez-Soria y J. J. Rubio, *Mathematical Problems in Engineering* **2011** (2011) 1-14.
24. M. Jimenez-Lizarraga, M. Basin y P. Rodriguez-Ramirez, *IET Control Theory Appl.* **6** (2012) pp. 963-970.
25. M. Jimenez-Lizarraga, M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez y J. J. Rubio, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* **8** (2012) 2941-2952.
26. E. Lughofer, *Evolving Systems* **3** (2012) 251-271.
27. L. Maciel, A. Lemos, F. Gomide y R. Ballini, *Evolving Systems* **3** (2012) 5-18.
28. J. H. Pérez Cruz, E. Ruiz Velázquez, J. J. Rubio y C. A. de Alba Padilla, *Mathematical Problems in Engineering* **2012** (2012) 1-23.
29. J. H. Pérez-Cruz, J. J. Rubio, E. Ruiz-Velázquez y G. Solís-Perales, *Abstract and Applied Analysis* **2012** (2012) 1-18.
30. J. J. Rubio, C. Torres, R. Rivera y C. A. Hernández, *IEEE Latin America Transactions* **9** (2011) 630-637.
31. J. J. Rubio, *IET Control Theory and Applications* **6** (2012) 2216-2225.