

Análisis estocástico de la dimensión fractal en electrodeposición de zinc en capa delgada

E. J. Suárez-Domínguez^a, J.A. Llanos-Pérez^a, J.A. Betancourt Mar^a, J.M. Nieto-Villar^b, y E. Izquierdo-Kulich^b

^aMexican Institute of Complex Systems,

Tlaxcala 111 esq. Av. Jalisco col. Unidad Nacional, Cd. Madero, Tamaulipas, 89410,

e-mail: jsd@mics.edu.mx

^bDepartamento de Química-Física, Cátedra de Química Lomonosov,

Facultad de Química de la Universidad de la Habana, Zapata y G, La Habana, Cuba. 10400,

e-mail: elenaik@fq.uh.cu

Received 22 February 2013; accepted 19 April 2013

A partir de la modelación mesoscópica de un proceso de electrodeposición en una celda de capa delgada, se propone un modelo estocástico que relaciona el valor esperado de la fracción de área ocupada por partículas de zinc formadas en electrodeposición y la dimensión fractal del patrón formado. Los experimentos fueron realizados a voltaje constante en una celda circular con un cátodo puntual como centro. Se obtuvo que las predicciones realizadas por el modelo corresponden con los resultados experimentales obtenidos y reportados en la literatura, observándose que la dimensión fractal se incrementa con la concentración inicial de iones de zinc hasta un determinado valor límite, a partir de la cual esta disminuye. Este comportamiento se explica a través del modelo propuesto tomando en consideración cual es el mecanismo que determina la formación del patrón.

Descriptores: Electrodeposición; fractales; métodos estocásticos.

From a mesoscopic modeling electrodeposition process in a thin layer cell, we propose a stochastic model that relates the expected value of the area fraction occupied by zinc particles formed during electrodeposition and the fractal dimension of the pattern formed. Experiments were conducted at constant voltage in a circular cell with a cathode as a center point. It was found that the predictions made by our model are in keeping with experimental results obtained and reported in literature, showing that the fractal dimension increases with the initial concentration of zinc ions to a certain limit from which it then decreases. This behavior is explained through the proposed model taking into account the mechanism that determines pattern formation.

Keywords: Thin electroplating; fractals; stochastic methods.

PACS: 02.50.Fz; 81.15.Pq; 05.45.Df.

1. Introducción

Los procesos electroquímicos a partir de los cuales se pueden presentar crecimientos ramificados, han sido estudiados en las últimas décadas [1]. Los crecimientos pueden ser obtenidos mediante la electrólisis de soluciones de $ZnSO_4$ contenidas entre dos placas de cristal o acrílico [2,3]; dentro de las cuales, y embebidos en la solución, se encuentran los electrodos; el proceso es sensible a las condiciones en que se lleven a cabo los experimentos, la geometría del sistema y la concentración inicial del ión metálico [4]; las estructuras generalmente son dendríticas o similares a las que se obtienen mediante simulación por computadora a partir del modelo DLA (Agregación Limitada por la Difusión) y pueden ser modificadas de acuerdo a la velocidad en que se electrodepositen los iones Zn^{2+} [4,5].

Se han propuesto modelos de diversos tipos para describir la formación de los patrones observados [6]. En este sentido, se ha empleado el formalismo estocástico para describir el comportamiento oscilatorio de la dimensión fractal de dichos patrones en el tiempo como resulta de los diferentes procesos de ramificación que tienen lugar [7,8,9]. Se ha encontrado experimentalmente que para concentraciones muy bajas de Zn^{2+} existe una correlación negativa entre la densidad del

patrón y la dimensión fractal en celdas de capa delgada con electrodos paralelos, comportamiento que no se explica explícitamente a través del formalismo estocástico desarrollado previamente [7]. En el presente trabajo se propone un modelo mesoscópico para describir la dependencia entre la morfología de los patrones de zinc y la concentración de iones utilizadas para su obtención.

2. Parte experimental

Los patrones de zinc fueron obtenidos mediante electrodeposición a partir de soluciones a concentraciones de 0.001 a 0.05 molar de $ZnSO_4$ en capa delgada. Los crecimientos se llevaron a cabo a un voltaje constante de 8.5 V durante 10 minutos. Las imágenes fueron tomadas con un microscopio con cámara acoplado a una computadora en su máxima resolución y a 10 ampliaciones. Las celdas con capa superficial fueron construidas con una caja petri de 47 mm de radio, utilizando un ánodo de cobre de 0.8 mm de diámetro en forma de círculo con un radio de 37,5 mm, mientras que el cátodo se coloca puntualmente en el centro. El volumen usado en todos los casos fue de 15 mL.

Se registró la variación de corriente y voltaje con un Multímetro digital Steren MUL-500 con interfase a la com-

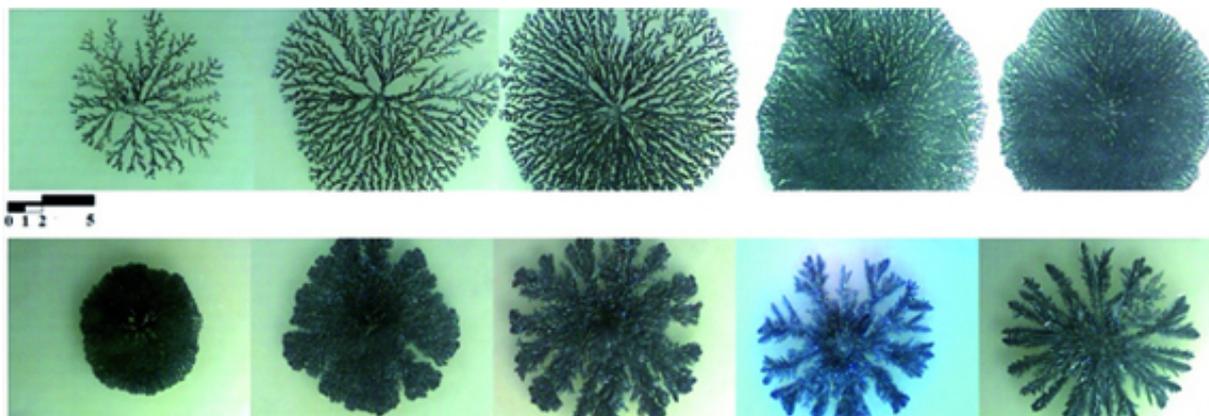


FIGURA 1. Arriba.- Electrodeposición de zinc a 8.5 V concentraciones de 0.001, 0.002, 0.004, 0.008 y 0.001 respectivamente a los 10 minutos. Abajo.- Electrodeposición de zinc a 8.5 V concentraciones de 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, y 0.05 respectivamente a los 5 minutos.

putadora. La imagen obtenida del crecimiento, y que puede observarse en la Fig. 1, se transfirió a blanco y negro con ayuda del programa ImageJ 1.36 b [10]; y se analizó la dimensión fractal por conteo de caja con el programa Harfa 5 [11].

3. Resultados y discusión

3.1. Obtención del modelo mesoscópico

Para obtener un modelo que describa el proceso de electrodeposición se establecen las siguientes consideraciones:

1) El vector que describe el estado microscópico del sistema se define como:

$$N = \left\{ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right\} \tag{1}$$

donde n_1 es el número de partículas de zinc y n_2 es el número de iones de zinc presentes en la solución.

2) El vector que describe el estado macroscópico del sistema se define como:

$$C = \left\{ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\} \tag{2}$$

donde C_1 es la densidad de las partículas en el patrón, equivalente a la fracción de la superficie ocupada por estas; C_2 es la concentración molar de iones de zinc que se encuentran presentes en la solución.

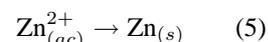
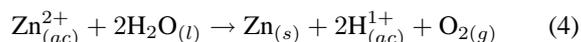
La relación existente entre el vector de estado macroscópico y el vector de estado microscópico está dada por:

$$\left\{ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} C_1 \frac{\Omega}{\alpha} \\ C_2 V N_0 \end{matrix} \right\} \tag{3}$$

donde α es el tamaño de las partículas depositadas, Ω es el tamaño observado del patrón formado, V es el volumen de la solución y N_0 es el número de Avogadro.

3) Procesos que tienen lugar a escala microscópica:

Proceso 1.- Reacción electroquímica a través de la cual los iones se convierten en las partículas de Zn que forman el patrón observado:



donde el vector de cambio de estado J_1 se define como:

$$J_1 = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\} \tag{6}$$

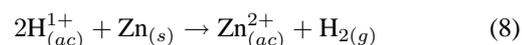
y su probabilidad de transición por unidad de tiempo W_1 se establece *a priori* de la forma:

$$W_1 = k_1 n_2 \tag{7}$$

donde k_1 es una constante que involucra al inverso del tiempo asociado a la ocurrencia del proceso 1 a nivel microscópico.

Proceso 2: Interferencia del hidrógeno en la deposición de zinc

En este caso los iones de hidrógeno se combinan entre sí para formar hidrógeno gaseoso, interaccionando previamente con las partículas de Zn de la siguiente forma:



El vector de cambio de estado microscópico J_2 se define como:

$$J_2 = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix} \right\} \tag{9}$$

y la probabilidad de transición por unidad de tiempo W_2 se supone:

$$W_2 = k_2 n_1 n_H \tag{10}$$

donde n_H es el número de iones de hidrógeno que se encuentran presentes en la solución $n_H = C_H V N_0$ donde C_H es la concentración de iones hidrógeno en el medio y k_2 es una constante que involucra al inverso del tiempo asociado a la ocurrencia del proceso 2 a escala microscópica.

Proceso 3: Si se considera que la formación de un patrón bidimensional está limitada por un área total finita, entonces el patrón alcanza un tamaño máximo a partir del cual ya no es

posible la ocurrencia de la electrodeposición en dos dimensiones. Este proceso virtual se va a representar de la forma:



su vector de cambio de estado microscópico:

$$J_3 = \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

y su probabilidad de transición por unidad de tiempo:

$$W_3 = \frac{k_3}{A} n_1 \tag{13}$$

donde A representa el tamaño máximo que puede tener el patrón en el tiempo y k_3 es una constante de ocurrencia a escala microscópica del proceso 3. Para efectos de este modelo se considera solo el crecimiento del patrón en dos dimensiones.

3.2. Obtención y solución de la ecuación maestra

A partir de las probabilidades de transición por unidad de tiempo dadas por las Ecs. (7), (10) y (13) se obtiene la ecuación maestra [12,13,14] que describe el comportamiento de la probabilidad $P(n_1, n_2, n_H; t)$ de que el vector de estado microscópico tenga un determinado valor al tiempo macroscópico observado t . En este caso se tiene:

$$\frac{\partial P(n_1, n_2, n_H; t)}{\partial t} = (E_{n_1}^{-1} E_{n_2}^{+1} - 1) k_1 n_2 P(n_1, n_2, n_H; t) + (E_{n_1}^{+1} E_{n_2}^{-1} - 1) k_2 n_1 n_H P(n_1, n_2, n_H; t) \tag{14}$$

$$+ (E_{n_1}^{+1} E_{n_2}^{-1} - 1) \frac{k_3}{A} n_1 P(n_1, n_2, n_H; t) \tag{15}$$

La ecuación maestra (14) es lineal con respecto a sus probabilidades de transición por unidad de tiempo, por lo tanto, su solución es una función de distribución normal o gaussiana [12,13]. En este caso para el valor esperado o primer momento se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 n_2 - \frac{k_3 n_1}{A} - k_2 n_1 n_H \\ \frac{k_3 n_1}{A} - k_1 n_2 + k_2 n_1 n_H \end{bmatrix} \tag{16}$$

mientras que para la varianza asociada al vector de estado microscópico se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$a_{11} = k_1 n_2 + \frac{k_3 n_1}{A} + \left(\frac{2n_{12} - 2n_{11}}{A} \right) (k_3 + Ak_2 n_H) + k_2 n_1 n_H, \tag{17.a}$$

$$a_{12} = k_1 (n_{11} - n_2 - n_{12}) - \frac{k_3 n_1}{A} + (k_3 + Ak_2 n_H) \left(\frac{n_{22} - n_{12}}{A} \right) - k_2 n_1 n_H. \tag{17.b}$$

$$a_{21} = k_1 (n_{11} - n_2 - n_{12}) - \frac{k_3 n_1}{A} + (k_3 + Ak_2 n_H) \left(\frac{n_{22} - n_{12}}{A} \right) - k_2 n_1 n_H. \tag{17.c}$$

$$a_{22} = k_1 (n_2 + 2n_{12} - 2n_{22}) + \frac{k_3 n_1}{A} + k_2 n_1 n_H. \tag{17.d}$$

Si se supone que la cantidad de iones Zn^{2+} que se encuentran presentes en la solución es muy alto en comparación con la cantidad de zinc que se encuentra en forma de partículas; la concentración de dichos iones se puede considerar constante e igual aproximadamente al valor inicial, lo cual es posible para tiempos menores o iguales a diez minutos. Por otra parte, debido a que lo que interesa describir es el patrón morfológico que forman las partículas de zinc solo se van a tomar en cuenta las ecuaciones:

$$\frac{dn_1}{dt} = k_1 n_2 - k_3 A^{-1} n_1 - k_2 n_1 n_H \tag{18}$$

$$\frac{dn_{11}}{dt} = -2A^{-1} n_{11} (k_3 + Ak_2 n_H) + k_1 n_2 + A^{-1} k_3 n_1 + 2A^{-1} n_{12} (k_3 + Ak_2 n_H) + k_2 n_1 n_H \tag{19}$$

que corresponden al valor esperado y la varianza de la cantidad de zinc en forma de partículas.

Las fluctuaciones internas escalan con el tamaño del sistema y, por tanto, con el número total de partículas presentes. Tomando en cuenta que la cantidad de iones que se encuentran en la solución es elevada, entonces n_2 puede considerarse como una variable determinista, de tal manera que la covarianza n_{12} se supone igual a cero y la Ec. (19) se escribe entonces de la forma:

$$\frac{dn_{11}}{dt} = -2A^{-1} n_{11} (k_3 A^{-1} + k_2 n_H) + k_1 n_2 + A^{-1} k_3 n_1 + k_2 n_1 n_H. \tag{20}$$

Las Ecs. (18) y (20) se expresan entonces en función de las variables macroscópicas de acuerdo a la Ec.(3):

$$\frac{dC_1}{dt} = - (k_3 A^{-1} + K_2 C_H) C_1 + K_1 C_2 \tag{21}$$

$$K_1 = \frac{k_1 \alpha V N_0}{\Omega} \tag{21.a}$$

$$K_2 = k_2 V N_0 \tag{21.b}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -2 (k_3 A^{-1} + K_2 C_H) \sigma + \alpha \cdot \Omega^{-1} (K_1 C_2 + C_1 (k_3 A^{-1} + K_2 C_H)) \tag{22}$$

donde σ es la varianza correspondiente a las fluctuaciones internas asociadas a las partículas de zinc que forman el patrón observado.

4. Estimación de la dimensión fractal

Para estimar teóricamente la dimensión fractal del patrón formado se “congela” el sistema (21) y (22) en el tiempo suponiendo estado estacionario, y se obtiene como solución:

$$C_1 = \frac{K_1 C_2}{(k_3 A^{-1} + K_2 C_H)} \tag{23}$$

$$\sigma = 0.5\alpha\Omega^{-1} \left(\frac{K_1 C_2}{(k_3 A^{-1} + K_2 C_H)} + C_1 \right) \tag{24}$$

4.1. Análisis de la morfología

Si la Ec. (23) se sustituye en la Ec. (24):

$$\sigma = \frac{\alpha}{\Omega} C_1 \tag{25}$$

En este sentido, se observa que la magnitud de las fluctuaciones depende de la relación entre el tamaño de las partículas y el tamaño Ω del sistema. Si se visualiza el sistema desde el punto de vista mesoscópico, se puede seleccionar el tamaño observado Ω de tal forma que este sea del mismo orden de magnitud de α , por lo que:

$$\text{cuando } \frac{\alpha}{\Omega} \rightarrow 1 \text{ entonces } \sigma \rightarrow C_1 \tag{26}$$

la Ec. (26) indica que en la escala de observación suficientemente pequeña se tiene que la varianza es igual a la fracción del área cubierta por las partículas.

Para determinar la dimensión fractal se determina la entropía mesoscópica [13,15]:

$$S = \int -P(x) \ln P(x) dx \tag{27}$$

donde la función de probabilidad asociada a la fracción de Ω cubierta por las partículas de Zn es:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x - C_1)^2}{2\sigma}\right) \tag{28}$$

por lo que S se determina como:

$$S = \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma) \tag{29}$$

Considerando que el sistema es monofractal, la dimensión informacional es igual a la dimensión de capacidad, de tal manera que para determinar la dimensión fractal se hace uso de la expresión [16]:

$$D_f = \lim_{l \rightarrow 1} \frac{S}{\ln l} \tag{30}$$

donde $l = \alpha/\Omega$ es una magnitud adimensional que está relacionada con el tamaño del sistema observado. Si el tamaño

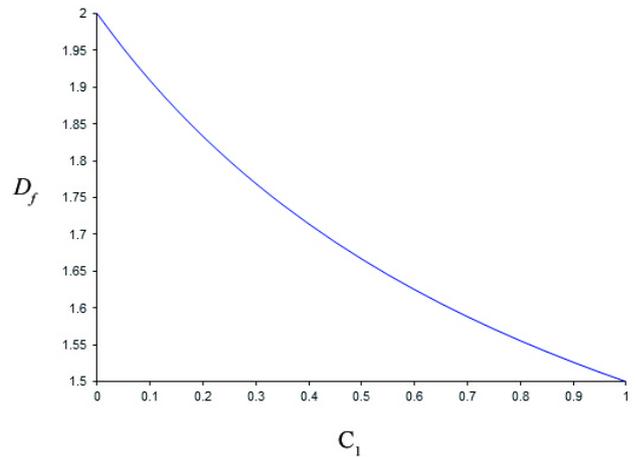


FIGURA 2. Variación de la dimensión fractal (D_f) de acuerdo a los valores de C_1 obtenidos a partir de la Ec. (33).

del sistema se selecciona de tal manera que $l \rightarrow 1$ entonces $C_1 \rightarrow l$ y la Ec. (24) se expresa entonces de la forma:

$$\sigma = \frac{1}{2} l \left(\frac{K_1 C_2}{(k_3 A^{-1} + K_2 C_H)} + l \right) \tag{31}$$

Combinando las Ecs. (29), (30) y (31) y tomando en cuenta que la dimensión fractal D_f es igual a la pendiente de la recta dada por $\ln(\sigma)$ vs $\ln(l)$ se propone la siguiente relación para estimar D_f :

$$D_f = \lim_{l \rightarrow 1} \left\{ \left[\frac{d(\ln(\sigma))}{dl} \right] \left[\frac{d \ln l}{dl} \right]^{-1} \right\} \tag{32}$$

a partir de la cual se obtiene:

$$D_f = \frac{C_1 + 2}{C_1 + 1} \tag{33}$$

Por definición la fracción del área ocupada por las partículas de Zn se encuentra entre 0 y 1, de tal forma que se obtiene un comportamiento de la dimensión fractal con respecto a la fracción de partículas depositadas mostrado en la Fig. 2.

Esto significa que la dimensión fractal disminuye a medida que la fracción de área ocupada por las partículas de Zn es mayor.

A partir de las Ecs. (23) y (33) se inferen los siguientes aspectos:

- a. Si el mecanismo que determina la formación del patrón se encuentra influenciado apreciablemente por la concentración de iones hidrógeno, entonces la dimensión fractal se incrementa a medida que esta producción es mayor.
- b. Si la concentración de iones hidrógeno no afecta significativamente la formación del patrón, entonces la dimensión fractal disminuye con el incremento en la concentración inicial de Zn^{2+} .

- c. A medida que se incrementa la velocidad del proceso electroquímico (incremento de K_1) disminuye la dimensión fractal, es decir, los procesos que tienen una mayor velocidad mostrarán una disminución en la dimensión fractal.
- d. A medida que el área máxima A del sistema se incrementa disminuye la dimensión fractal (para las mismas condiciones de la solución, volumen y concentración).

5. Comparación entre los resultados experimentales y predichos

En la Fig. 3 se muestra los resultados experimentales obtenidos.

Estos resultados muestran que, a concentraciones por debajo de un determinado valor límite, que experimentalmente se encuentra cerca de 0.01 molar, a medida que se incrementa la concentración inicial, la dimensión fractal aumenta; mientras que por encima de este valor, mientras mayor es la concentración inicial menor será la dimensión fractal. Este cambio en el comportamiento sugiere que el mecanismo determinante en la formación del patrón es diferente a bajas y a altas concentraciones.

Es bien conocido que el tamaño del patrón es dependiente de la concentración inicial, de tal forma que mientras más pequeña es esta concentración, menor es el tamaño del patrón. Partiendo de esta suposición a priori, se supone que para concentraciones bajas se tiene que el área A disponible es muy alta en comparación con el tamaño total que puede formar el patrón, de tal manera que, la formación del patrón depende de la concentración del ion hidrogeno en la solución, así (23) se expresa:

$$C_1 = gC_2 \tag{34}$$

en donde:

$$g = \frac{K_1}{K_2 C_H} \tag{35}$$

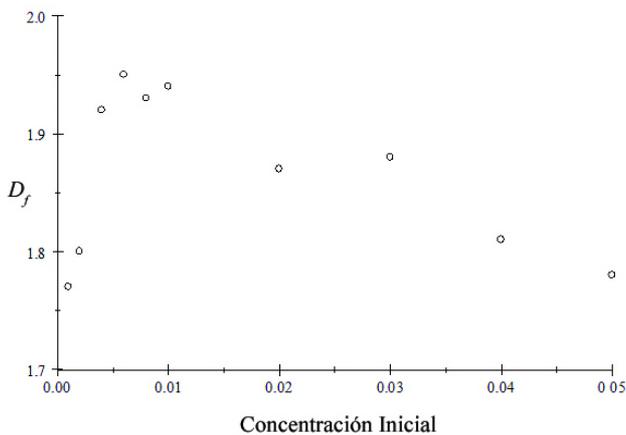


FIGURA 3. Resultados de la dimensión fractal por conteo de caja, obtenido a los 10 minutos de la deposición, a diferentes concentraciones iniciales a potencial constante de 8 V.

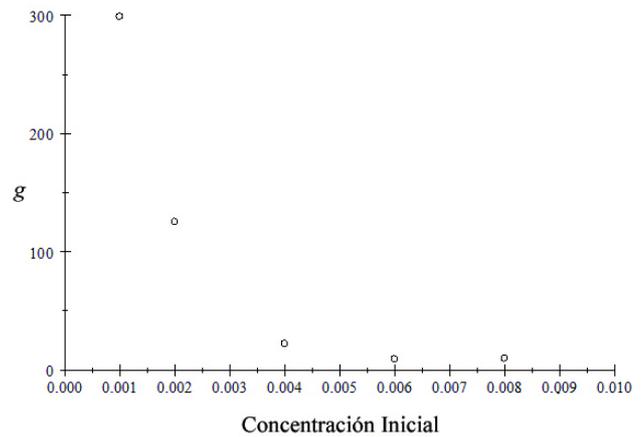


FIGURA 4. Resultados del cálculo de la constante g (34) a partir de la dimensión fractal experimental y (33) para concentraciones iniciales por debajo de 0.01 molar de Zn^{2+} .

De acuerdo con los resultados experimentales, se supone que la Ec. (29) se cumple para concentraciones de Zn menores de 0,01 molar.

Con la ecuación (33) se determina el valor de C_1 a partir de la dimensión fractal determinada experimentalmente, y con el valor de concentración inicial asociada a cada dimensión fractal se determina el valor de la constante g . Los resultados que se obtienen se muestran en Fig. 4.

La constante g se relaciona con el inverso de la cantidad de Ion hidrógeno presente. De esta manera se observa que, para (4), mientras mayor sea la concentración inicial de ion Zn^{2+} mayor será la producción de ion hidrógeno, lo cual se cumple a voltaje constante[6].

El comportamiento de la fracción de partículas depositadas calculado a partir de la dimensión fractal con respecto a la concentración inicial se muestra en la Fig. 5.

Para concentraciones por encima de 0.01, de acuerdo con lo observado en los experimentos, se va a suponer despreciable el efecto de la concentración de ion hidrógeno sobre la

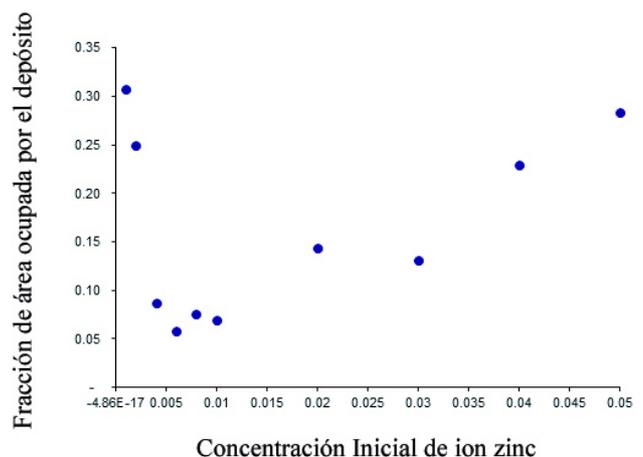


FIGURA 5. Cálculo de C_I de acuerdo a (33) y a partir de la dimensión fractal obtenido en los experimentos para las concentraciones molares de Zn^{2+} mostradas.

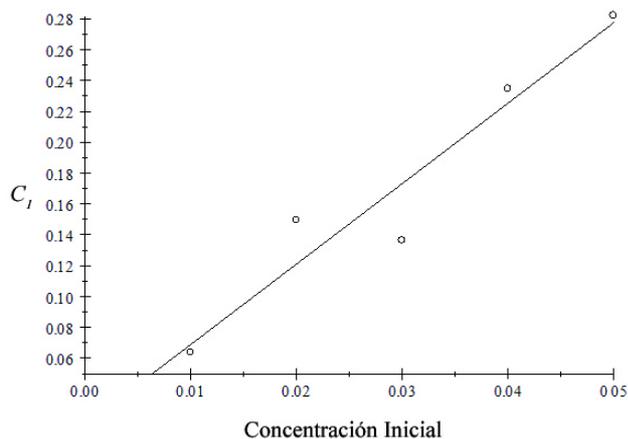


FIGURA 6. Valores de C_1 para los resultados experimentales de la dimensión fractal a concentraciones de 0.01 a 0.05 molar de $ZnSO_4$.

deposición de Zn, de tal manera que en el mecanismo que determina la formación del patrón predomina el efecto del tamaño máximo del sistema. En este caso (23) se transforma en:

$$C_1 = A \frac{K_1}{k_3} C_2 \quad (36)$$

donde, como todos los experimentos fueron llevados a cabo en el mismo sistema, se va suponer entonces que C_1 determinada a partir de la dimensión fractal obtenida experimentalmente es una función lineal de la concentración inicial de iones como se muestra en la Fig. 6.

Estos datos ajustan a una línea recta con una pendiente $m = 5.13$ y con un coeficiente de correlación igual a 0.92, lo cual indica en este caso que a concentraciones entre 0.01 y 0.05 molar:

$$A \frac{K_1}{k_3} \cong 5.13$$

6. Conclusiones

Aplicando el formalismo mesoscópico basado en la ecuación maestra se obtuvo un modelo para describir el comportamiento de la fracción promedio de partículas de zinc que se produ-

cen como resultado del proceso de electrodeposición y la varianza asociada a las fluctuaciones internas, a partir del cual se propone una expresión teórica para relacionar la dimensión fractal con el mecanismo más importante que influye en este proceso. A partir del modelo propuesto y los resultados experimentales observados se concluyen lo siguiente:

- La varianza de la fracción del área cubierta por las partículas de Zn presenta una relación directamente proporcional al valor esperado de la fracción de área ocupada por el zinc depositado, donde la constante de proporcionalidad está dada por la relación entre el tamaño de la partícula y el tamaño del sistema observado. Para la determinación de la dimensión fractal es necesario observar el sistema a escala microscópica, la cual es precisamente aquella en la cual la magnitud de las fluctuaciones internas es apreciable, lo cual hace posible obtener una expresión teórica para la determinación de la dimensión fractal a partir de la entropía mesoscópica.
- Que la dimensión fractal relacionada con la fracción ocupada por el zinc depositado de está dada por: $D_f = C_1 + 2/C_1 + 1$
- Que existe un punto cercano a una concentración inicial de 0.01 molar de $ZnSO_4$ en donde cambia de una tendencia creciente a una decreciente respecto a la concentración inicial del $ZnSO_4$.
- A concentraciones iniciales de 0.01 a 0.05 molar de $ZnSO_4$ existe una relación constante entre la concentración inicial y la fracción de área ocupada por las partículas de Zn.

Agradecimientos

La presente investigación fue financiada por el Laboratorio SAS S.A de C.V. y la empresa mexicana Geo-estratos S.A. de C.V. Se agradece el apoyo de Lynda Kay Deckard Ramos en las traducciones requeridas durante este trabajo.

- H.H. Lou y Y. Huang, *Electroplating Encyclopedia of Chemical Processing* (Taylor & Francis, New York, NY, 2006) pp. 1-10
- M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo y Y. Sawada, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1982) 286.
- F. Argoul, A. Arneodo, G. Grasseau y H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **22** (1988) 2558.
- J. M. Costa, F. Sagués y M. Vilarrasa, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1991) 7057.
- L. M. Sander, *Contemporary Physics* **4** (2000) 203.
- P. P. Trigueros, F. Sagués, J. Claret y F. Mas, *J. Electroanal. Chem.* **328** (1992) 165.
- E. J. Suárez-Domínguez *et al.*, *Rev. Cub. Física.* **2** (2006) 118.
- E.J. Suárez-Domínguez, y J.M. Nieto-Villar, *Rev. Cub. Quím.* **2** (2006) 118.
- R. Saab y R. Sultan, *J. Non-Equilib Thermodyn.* **30** (2005) 321.
- M. D. Abràmoff, P. J. Magalhães, y S. J. Ram, *Biophotonics international* **17** (2004) 36.
- O. Zmeškal, M. Veselý, M. Nežádal, y M. Buchniček, *Harmonic and Fractal Image Analysis.* (2001) 3.

12. M. A. Guzman, R. D. Freimuth, P. U. Pendse, M. C. Veinott y L. Lam, *Experiments on Electrodeposit Patterns*, in *Nonlinear Structures in Physical Systems* (Springer, New York, 1990).
13. C. W. Gardiner, *Handbook Of Stochastic Methods* (Springer-Verlag, 2004). Pp. 12.
14. N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes In Physics And Chemistry* (North Holland, Amsterdam, 1992).
15. Petr Jizba y Toshihico Arimitsu, *Annals Phys* **312** (2004) 17.
16. B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Tusquets, Barcelona, 1998).