

Estimación de parámetros concentrados de un proceso estocástico de segundo orden

J. J. Medel J.^a, R. Urbieto P.^a, y J. C. García I.^b

^aCentro de Investigación en Computación,

Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo, 07738.

e-mail: jjmedelj@yahoo.com.mx; rurbieta@cic.ipn.mx

^bEscuela Profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,

Av. Santa Ana No. 1000, Col. San Francisco Culhuacán, México D. F.

e-mail: jcnet21@yahoo.com

Received 22 July 2013; accepted 11 November 2013

En este artículo se desarrolla un filtro digital estocástico como estimador - identificador basado en el segundo momento de probabilidad, de acuerdo con un modelo estocástico de segundo orden considerado, que generalmente es aplicado en la física estocástica para sistemas con perturbaciones tales como Van der Pol, Schrödinger y Bernulli. El diseño consiste en formular el modelo con una ecuación de estados con salida acotada y estacionaria basado en la descripción de martingalas y el operador estocástico de esperanza matemática. En los resultados de diseño se desarrollaron las fórmulas de covarianza y varianza para calcular los parámetros concentrados aplicados en el modelo generalizado. El diseño del estimador se describió en manera recursiva, de acuerdo a las condiciones de estacionariedad, para ser implementado en un sistema digital con recursos computacionales mínimos. La convergencia de los parámetros permite observar que la variable de salida identificada cuenta con un error que tiende a cero. Los resultados gráficos se obtuvieron usando MatLab como plataforma de simulación.

Descriptores: Modelación y simulación computacional; algoritmos para la aproximación de funcionales; procesos estocásticos.

In this paper develops a stochastic digital filter as identification with estimation technique considering the second probability moment, with respect to a second order model applied on stochastic physics such as Van der Pol, Schrödinger and Bernulli equation with perturbations. The mathematical design considered the Martingale form and mathematical expectation into state space model with stationary conditions and bounded output. The variance and covariance are used for internal parametres description model and its recursive form allows implementing into a digital system with minimum computational resources. The parametres estimation results are included into model proving that the convergence answer tends to reference signal, and in consequence, the error tends to zero. The graphical results were obtained using the MatLab software as a platform simulation.

Keywords: Computer modeling and simulation; algorithms for functional approximation; stochastic processes.

PACS: 07.05.Tp; 02.60.Gf; 02.50.Ey

1. Introducción

En física, los sistemas de segundo orden con perturbaciones son vistos como cajas negras, al no tener en términos generales la posibilidad de conocer qué ocurre en un sentido métrico, dentro de ellos. Pero con base a la información que proporcionan a su entrada y salida, se desarrollan los modelos que mejor describan esa relación. En el caso presente esas mediciones corresponden a un motor de corriente directa sin escobillas (BLDC - **B**rushless **D**C) del tipo trifásico, como se muestra en la Fig. 1.

Los sistemas tipo caja negra solo se conoce la relación de su salida con respecto a su entrada (su respuesta con respecto a una excitación). Los modelos para este tipo de sistemas, son llamados de caja negra de los cuales no se conocen sus estados y parámetros internos de acuerdo con [1,2]. Un método para conocer los estados internos desconocidos a partir de los estados observables, son los llamados métodos de estados identificados basado en el error cuadrático medio [3]. El método para encontrar el error identificado e_k , consiste en hacer del estado no medible o desconocido x_k , un estado identificado \hat{x}_k , obteniéndolo a través de las condiciones estocásticas del estado observable y_k , descrito en (1).

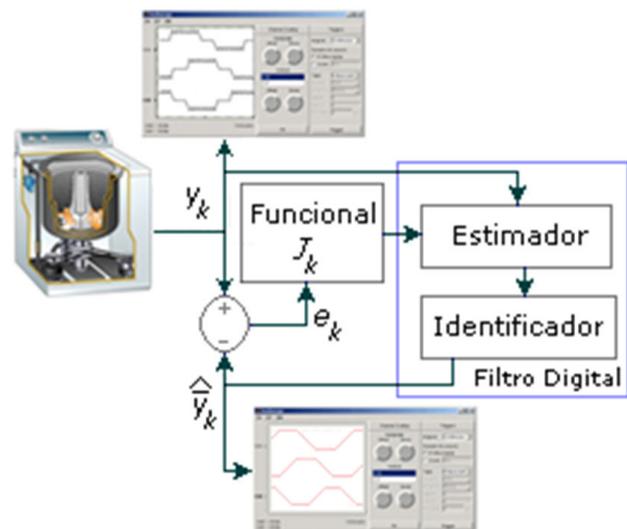


FIGURA 1. Diagrama a bloques del sistema BLDC con el filtro estocástico.

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \tag{1}$$

El error e_k puede conducir a diversos métodos de estimación y es conocido como proceso de innovación [4], basado en el funcional del error (2) con respecto al error de identificación e_k : Usando el segundo momento de probabilidad se define el valor esperado de la norma Euclidiana de e_k con respecto a [5,6].

$$J_k(e_k) := E\{e_k^T e_k\} \tag{2}$$

Que en forma desarrollada se tiene que $= E\{(y_k - \hat{y}_k)^T (y_k - \hat{y}_k)\}$, en donde la respuesta del sistema descrito en la Fig. 1., como (y_k) corresponde a la de un modelo de segundo orden y que en diferencias finitas es representado con dos retardos como se observa en (3).

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} \cong (f(y) - 2f(y(k-1)) + f(y(k-2))) \tag{3}$$

Esta descripción es el resultado del concepto de los cuatro pasos aplicado a una segunda derivada y posteriormente haciendo que el límite tienda a una constante que comúnmente corresponde con el tiempo de muestreo del sistema digital y los retardos indican el orden de la ecuación y está descrita por el número de veces que la señal observable se retardará [7-11]. Basado en el estado observable del sistema propuesto y_k , su modelo aproximado corresponde a un modelo de segundo orden de acuerdo a su evolución gráfica, y al funcional de error cuadrático medio. El objetivo de este trabajo es diseñar un estimador de parámetros óptimo para un sistema tipo caja negra cuya respuesta corresponde a un modelo estocástico de segundo orden con parámetros concentrados; la estimación se realiza basado en el segundo momento de probabilidad, y es aplicada al identificador para seguir a la variable de salida del sistema de referencia buscando que su convergencia sea asintótica. El artículo está estructurado de la manera siguiente: resumen, introducción, objetivo, modelo, segundo momento, algoritmo de estimación recursivo, funcional de error cuadrático medio, simulación, conclusiones, anexo y bibliografía.

2. Modelo de Salida Estocástica Simplificada

Un sistema con mediciones ruidosas entrada - salida, asume un modelo con dos retardos si la velocidad de cambio de un estado a otro es diferente a una constante, de acuerdo con [9,10]:

Teorema 2.1 *El modelo ARMA (2,1) con parámetros concentrados $(a_1, a_2) \in R_{[0,1]}$ y velocidad de cambio acotada [7] y [8], es descrito de manera recursiva por un modelo de segundo orden en diferencias finitas con respecto a los estados observables de la forma (4)*

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + V_k \tag{4}$$

Con

$$y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \in R, y \subseteq N(\mu, \sigma^2 < \infty).$$

Prueba. Ver Anexo.

3. Algoritmo Estocástico Basado en el Segundo Momento

La estimación estocástica está basada en el segundo momento de probabilidad ya que es una técnica usada para mostrar que una Variable Aleatoria (VA) tiene una probabilidad positiva. Generalmente, el método consiste en acotar la probabilidad de la VA alrededor de su media; esto quiere decir, que se tiene una comparación del segundo momento de probabilidad con respecto al primer momento de la secuencia aleatoria y su valor medio; se describe como $\sigma_2 = \mathbf{E}\{(y_k - \mu)^2\}$, donde y_k es la VA y μ es la media de acuerdo con [12,13] y [14].

Teorema 3.1 *Dado el sistema descrito en (4), su forma generalizada es (5).*

$$y_k = \bar{a} \bar{z}(k-1) + V_k \tag{5}$$

Con parámetros y estados en (6).

$$\begin{aligned} \bar{a} &:= [a_1 a_2], \bar{z}(k-1) := [y_{k-1} : y_{k-2}]^T \\ \{V_k\} &\subseteq N(\mu, \sigma^2 < \infty) \end{aligned} \tag{6}$$

De acuerdo con [4-6] y, [15], el estimador de parámetros concentrados de (5) es (7).

$$\hat{a}_k = \bar{p}_k \bar{q}_k \tag{7}$$

con

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &:= [\hat{a}_{k1,k} \hat{a}_{k2,k}] \in R^{1 \times 2}, \\ \bar{p}_k &:= [p_{1,k} \ p_{2,k}] \in R^{1 \times 2}, \\ \bar{q}_k &:= \begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2}, \end{aligned}$$

Prueba. Ver anexo.

El identificador con respecto al modelo ARMA (2,1) descrito en (4), estará con respecto al estimado \hat{a}_k del parámetro concentrado \bar{a}_k a través del segundo momento (8).

$$\hat{y}_{k_k} = \hat{a}_{k1} y_{k-1} + \hat{a}_{k2} y_{k-2} + V_k \tag{8}$$

4. Estimación recursiva

Considerando que en un sistema requiere usar la mínima cantidad de recursos, se desarrolla el estimador recursivo, permitiendo observar en línea su comportamiento.

Teorema 4.1 *De acuerdo con (7) y [5,6,10,14] y [17] se obtiene el estimador recursivo (9).*

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} \beta_k + \gamma_k \tag{9}$$

Con

$$\beta_k = \frac{(k-1)^2}{k^2} q_{k-1} q_k^+, \quad \gamma_k = \frac{y_k v_{k-1}^2}{k^2} q_k^+.$$

Prueba. Ver anexo.

Basado en las propiedades en diferencias finitas del segundo momento de probabilidad para sistemas estacionarios, la salida identificada basada en el segundo momento recursivo es (10).

$$\hat{y}_k = \hat{a}_{1,k} y_{k-1} + \hat{a}_{2,k} y_{k-2} + V_k \quad (10)$$

5. Funcional de error

El funcional de error cuadrático medio es una medida para conocer la convergencia de los parámetros estimados, a través de los errores entre el parámetro considerado y su estimado [18].

De acuerdo al error del parámetro a_1 , se obtiene (11).

$$e_{1,k} = a_1 - \hat{a}_{1,k} \quad (11)$$

El error del parámetro a_2 , se tiene (12).

$$e_{2,k} = a_2 - \hat{a}_{2,k} \quad (12)$$

El funcional de error 1 de manera recursiva se encuentra en (13).

$$J_{1,k} = \frac{1}{k^2} [e_{1,k}^2 + (k-1)^2 J_{1,k-1}] \quad (13)$$

Y el funcional de error 2, de forma recursiva se tiene en (14).

$$J_{2,k} = \frac{1}{k^2} [e_{2,k}^2 + (k-1)^2 J_{2,k-1}] \quad (14)$$

La forma recursiva generalmente aporta la precisión entre los parámetros estimados estocásticos y los basados en el segundo momento, aplicables a un sistema digital.

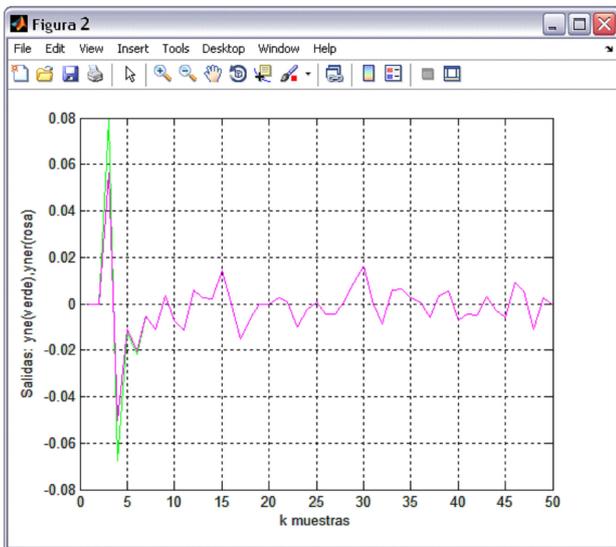


FIGURA 2. Salidas recursivas y_k (5) e identificada \hat{y}_k (8).

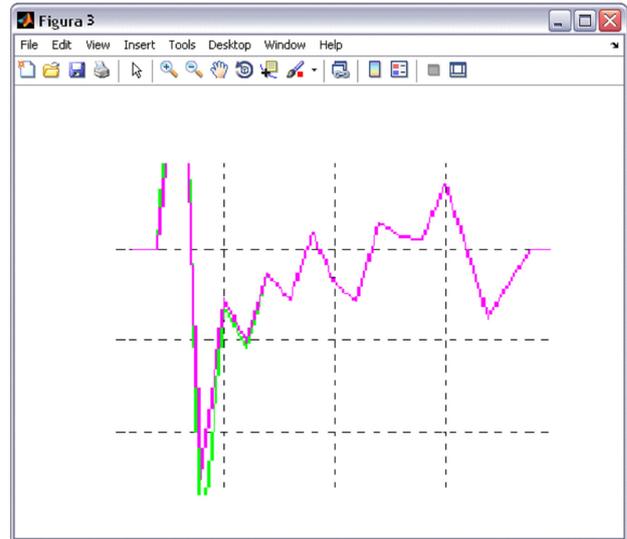


FIGURA 3. Ampliación de acuerdo a la información obtenida en la gráfica de la Fig. 2.

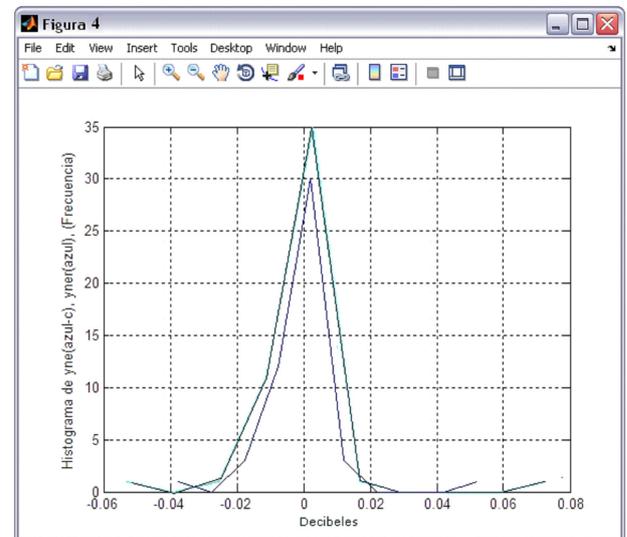


FIGURA 4. Histograma de las salidas estocásticas basada en el segundo momento (azul-c), (7) y recursiva (azul), (9).

6. Resultados de simulación

Se desea ejemplificar el algoritmo de estimación estocástica basado en el segundo momento. El proceso estocástico se comporta de la forma siguiente:

- a) La identificación de la variable del sistema viene presentada en la Fig. 2. Donde los primeros quince muestreos las respuestas de salida se empatan confundiendo una con otra.

- b) Para el caso recursivo se logra más rápido la identificación de las variables de salida. Las gráficas del experimento se llevaron a cabo usando MatLab [19,20].

Usando los resultados obtenidos en la Fig. 2, se desarrolló una ampliación como se muestra en la Fig. 3.

Para observar la calidad del estimador se emplean los histogramas de la variable de observación. En la Fig. 4, se presenta un histograma de la variable de salida contra la variable recursiva simplificada. Donde la esperanza del modelo es ce-

ro y tiene una varianza de 0.5 aproximadamente. Donde se nota cero sesgo, lo que implica una calidad del estimador excelente. De acuerdo al caso recursivo se presenta un histograma en la Fig. 4, donde la esperanza es cero y la varianza es 0.03. Con cero sesgo. Lo cual indica que tiene una calidad del estimador excelente [21].

De acuerdo con las condiciones iniciales establecidas para el algoritmo de estimación estocástica recursiva, con respecto a las Ecs. (7) y (9) se obtienen los parámetros en la Fig. 5, para diferentes amplitudes de ruidos desde -0.8 hasta

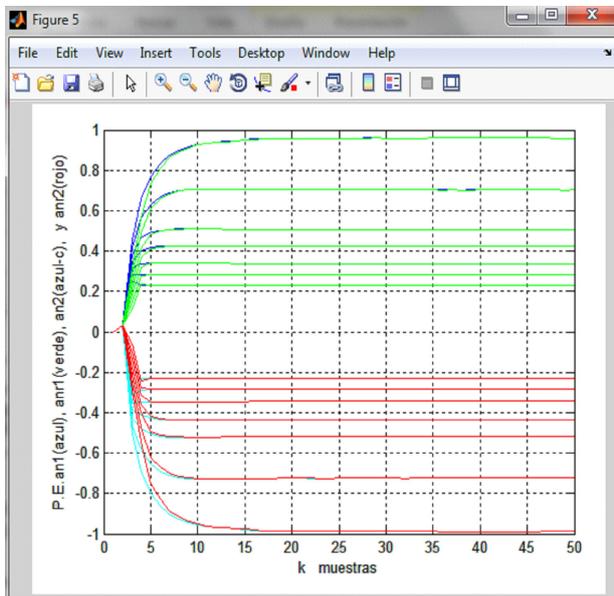


FIGURA 5. Parámetros estocásticos estimados basados en el segundo momento a_1 y a_2 (rojo) y (azul) de la (7). Parámetros estimados estocásticos recursivos $\hat{a}_{1,k}$ y $a_{2,k}$, (verde) y (azul) de la (9).

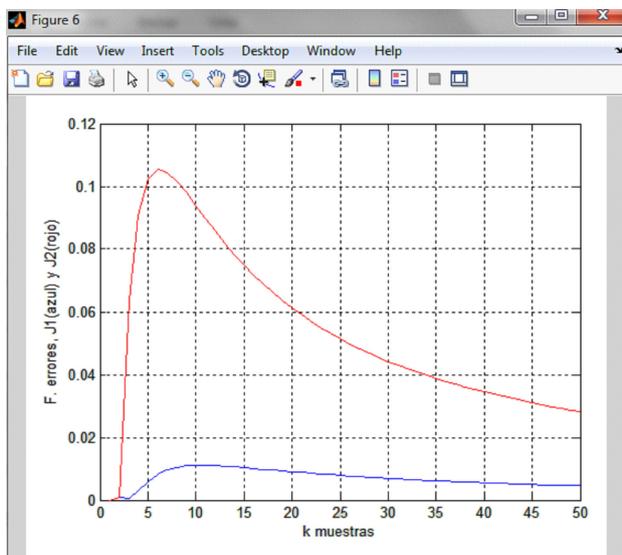


FIGURA 6. Funcional de error del segundo momento para J_1 (parámetro $\hat{a}_{1,k}$) color (azul) y J_2 (parámetro $\hat{a}_{2,k}$) color (rojo). Nota: Es una Supermartingala [22,23].

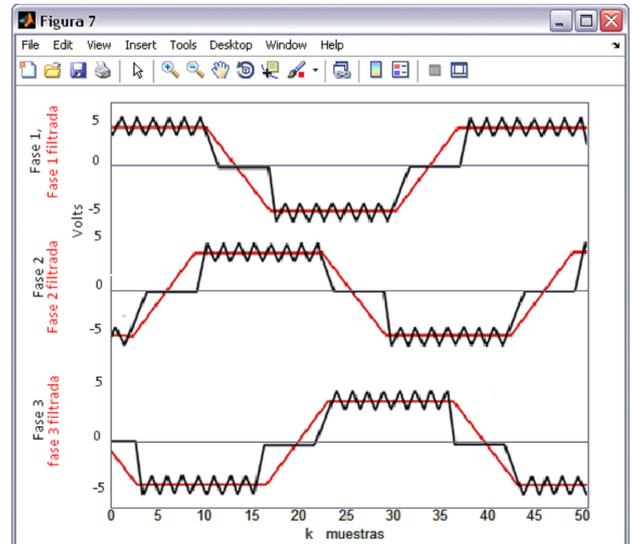


FIGURA 7. Identificación de los estados del motor BLDC. La señal (negro) es la salida del motor BLDC con ruido y la señal (rojo) es la salida del filtro describiendo la señal sin ruido.

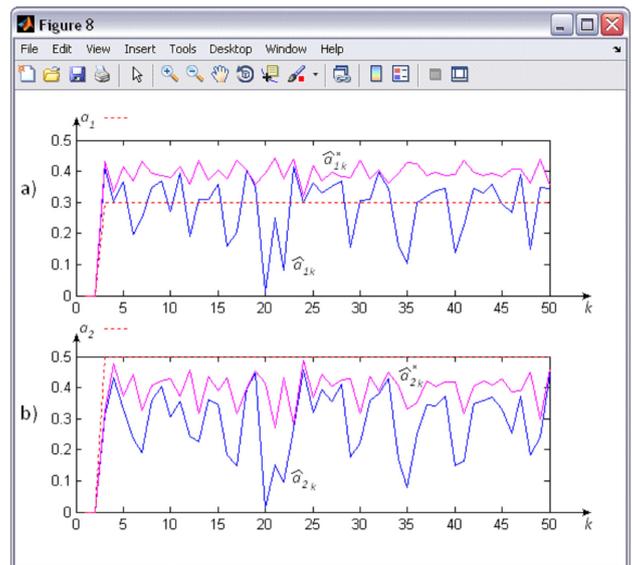


FIGURA 8. La Fig. 8a) Parámetro a_1 de acuerdo con [18] obteniendo $\hat{a}_{1,k}$ y de (9), el parámetro concentrado $\hat{a}_{1,k}^*$. La Fig. 8b) Parámetro a_2 de acuerdo con [18] obteniendo $\hat{a}_{2,k}$ y de (9), el parámetro concentrado $\hat{a}_{2,k}^*$.

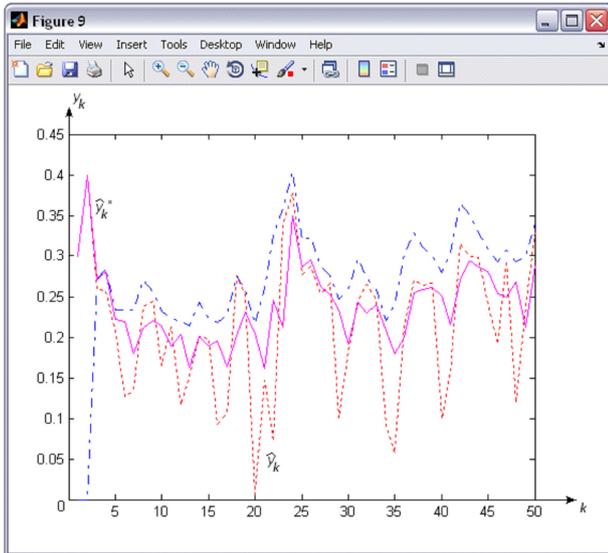


FIGURA 9. El sistema (4) se describe por y_k , el identificador de acuerdo con [18] es \hat{y}_k y de (10), se obtuvo \hat{y}_k^* .

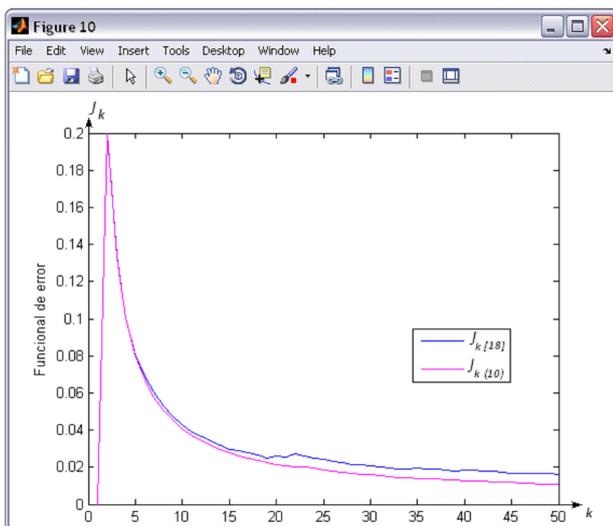


FIGURA 10. El funcional de error $J_{k[18]}$ de acuerdo con [18], se presenta en color azul, y el funcional de error de acuerdo con (10), $J_{k(10)}$, se presenta en color magenta.

hasta 0.8. Lo que permite obtener parámetros desde -0.99 hasta 0.99 para un motor BLDC.

El funcional del error cuadrático medio, basado en el segundo momento de probabilidad de forma recursiva, de acuerdo con (11), (12), (13) y, (14), se muestra en la Fig. 6.

La identificación con estimación de los parámetros (9) de acuerdo con [24,25] se realiza con base a (10) y se muestra en la Fig. 7, para el comportamiento de cada una de las fases; es decir, se aplica el modelo filtrado para cada una de las fases.

La señal generada por el motor con respecto a su carga es la señal con rizados y la señal de salida del filtrado es la señal suavizada, ambas mostradas en la Fig. 7.

El método de mínimos cuadrados mostrado en [18] aplicado en el proceso de estimación de acuerdo con (4), se tiene

como resultado lo mostrado en la Fig. 8, resultados que son comparados con el método de parámetros concentrados (9)

De la Fig. 8, los valores de estimación en ambos casos, solo permite tener el valor en promedio de los parámetros, y que se ven afectados por la varianza de los ruidos.

Su identificador, de acuerdo con (9), es descrito en la Fig. 9.

Su correspondiente funcional de error para (4), con respecto a los resultados de la Fig. 6 y de (10), se observan en la Fig. 10.

Los resultados nos permiten observar que la estimación por mínimos cuadrados [18] aplicadas posteriormente al identificador (9), tiene como resultado que el método de parámetros concentrados tiene un mejor desempeño en la Figs. 8, 9 y 10.

7. Conclusiones

El objetivo de estimación con identificación se cumplió cuando los dos parámetros estimados dentro del vector de parámetros concentrados (\hat{a}_k) basados en el algoritmo de estimación descrito tanto en (7) como en (9) y usando el segundo momento de probabilidad convergieron al valor pedido por los parámetros de los estados estocásticos modelados linealmente. Los parámetros estimados encontrados por el segundo momento de probabilidad solamente encontraron la convergencia cuando se invirtió el signo, tal como lo describe (1). El rango de convergencia de los parámetros estimados operaron en $0 < |\hat{a}_{i,k}| < 1, i = 1, 2$. Las trayectorias de los parámetros estimados siempre fueron Supermartín gala.

Una prueba importante fue al sustituir los parámetros estimados (9) con el algoritmo propuesto en la variable de salida (10) y se vio que se logró equiparar perfectamente con los datos aleatorios medibles experimentalmente que se tenían a priori. Con estos resultados se deduce que el algoritmo de estimación basado en el segundo momento aplicado a un modelo experimental aleatorio y representado como un modelo lineal estocástico de segundo orden funcionó adecuadamente en casi todos los puntos.

También fue posible diseñar y experimentar en la simulación un modelo de estimación recursiva para \hat{a}_k , como se describió en (9) a partir del estimador basado en el segundo momento. Se realizó una simulación del identificador con estimador aplicado a cada una de las fases del motor BLDC donde se obtuvieron en línea sus parámetros y al actualizar el estado de este sistema, la señal estaba libre de ruido, tal y como se ve en la Fig. 7.

Este trabajo servirá como base para implementar en un sistema digital el estimador y probarlo con datos experimentales de sistemas aleatorios para construir el estimador del modelo multivariable en el cual operen las tres fases con una matriz de transición.

La comparación del estimador con el método desarrollado en [18], permitió observar en las Figs. 8, 9 y 10, que el estimador de parámetros concentrados tiene un mejor desempeño, que el propuesto en la literatura.

Anexo

Prueba (Teorema 2.1). Dada la dinámica interna del sistema de segundo orden en diferencias finitas de acuerdo con [7,8,10] y, [11], es descrito en (15).

$$x_{k+1} = a_1x_k + a_2x_{k-1} + bw_k \tag{15}$$

Con salida del sistema (16).

$$y_k = cx_k + dv_k \tag{16}$$

Retardando (15), se obtiene (17).

$$x_k = a_1x_{k-1} + a_2x_{k-2} + bw_{k-1} \tag{17}$$

Retardando (16), se obtiene (18).

$$y_{k-1} = cx_{k-1} + dv_{k-1} \tag{18}$$

Despejando de (18), el estado x_{k-1} , se tiene (19).

$$x_{k-1} = c^{-1}y_{k-1} - dc^{-1}v_{k-1} \tag{19}$$

Retardando ahora a (19) se obtiene (20).

$$x_{k-2} = c^{-1}y_{k-2} - dc^{-1}v_{k-2} \tag{20}$$

Sustituyendo (19) y (20) en (17), se tiene (21).

$$x_k = a_1c^{-1}y_{k-1} + a_2c^{-1}y_{k-2} - a_1dc^{-1}v_{k-1} - a_2dc^{-1}v_{k-2} + bw_{k-1} \tag{21}$$

Sustituyendo (21) en (16) se tiene (22).

$$y_k = a_1y_{k-1} + a_2y_{k-2} - a_1dv_{k-1} - a_2dv_{k-2} + bcw_{k-1} + dv_k \tag{22}$$

De (22) el ruido es definido en (23).

$$V_k := -a_1dv_{k-1} - a_2dv_{k-2} + bcw_{k-1} + dv_k \tag{23}$$

Y que (23) al ser sustituido en (22) se obtiene (24).

$$y_k = a_1y_{k-1} + a_2y_{k-2} + V_k \blacksquare \tag{24}$$

Prueba (Teorema 3.1)

$$E\{y_k\bar{v}_{k-1}^T\} = \bar{a}E\{\bar{z}_{k-1}\bar{v}_{k-1}^T\} + E\{V_k\bar{v}_{k-1}^T\} \tag{25}$$

El proceso de innovación de (25) se describe en (26).

$$E\{y_k\bar{v}_{k-1}^T\} - E\{V_k\bar{v}_{k-1}^T\} = \bar{a}E\{\bar{z}_{k-1}\bar{v}_{k-1}^T\} \tag{26}$$

Y el estimador de acuerdo con (25) y a la varianza de \bar{z}_{k-1} , se describe en (27).

$$\hat{a}_k = (E\{y_k\bar{v}_{k-1}^T\} - E\{V_k\bar{v}_{k-1}^T\})(E\{\bar{z}_{k-1}\bar{v}_{k-1}^T\})^+ \tag{27}$$

De (27) el parámetro estimado está en función directa de la covarianza p_k , e inversamente a la covarianza q_k , como se tiene en (28).

$$\hat{a}_k := \bar{p}_k\bar{q}_k^+ \tag{28}$$

Con

$$\hat{a}_k \in R^{1 \times 2}, \bar{p}_k R^{1 \times 2}, y \bar{q}_k R^{2 \times 2}$$

A continuación se desarrolla el cálculo de las covarianzas p_k, q_k , como se observa en (29). La covarianza estocástica viene representada por la esperanza de los productos internos de la variable de salida convolucionada con la variable \bar{v}_{k-1}^T [11].

$$[p_{1,k} p_{2,k}] = E(\{y_k\bar{v}_{k-1}^T\} - \{V_k\bar{v}_{k-1}^T\}) \tag{29}$$

La esperanza matemática viene representada como una secuencia de k muestreos y se describe en [15] como se puede ver en (30).

$$[p_{1,k} p_{2,k}] = \frac{1}{k} \times \left[\sum_{i=0}^k \begin{pmatrix} y_i y_{i-1} & y_i y_{i-2} \\ -[V_i y_{i-1} & V_i y_{i-2}](k-1) \end{pmatrix} \right] \tag{30}$$

Resolviendo las sumatorias se obtienen los dos vectores de las covarianzas [13], $p_{1,k}$ y $p_{2,k}$. Como se ve en (31).

$$[p_{1,k} p_{2,k}] = \frac{1}{k} \times \left[\sum_{i=0}^k \begin{pmatrix} y_i y_{i-1} & y_i y_{i-2} \\ -[\bar{p}_{i,k} \bar{p}_{2,k}](k-1) \end{pmatrix} \right] \tag{31}$$

Mientras que la covarianza $q_k \in R^{2 \times 2}$, es un caso en que la matriz resulta singular, dando lugar a una matriz pseudoinversa, descrita en (32).

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix} = E\{\bar{z}_{k-1}\bar{v}_{k-1}^T\} \\ &= E\left\{ \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_{k-2} \end{bmatrix} [y_{k-1} y_{k-2}] \right\} \\ &= E \begin{bmatrix} y_{k-1}^2 & y_{k-1} y_{k-2} \\ y_{k-2} y_{k-1} & y_{k-2}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

Resolviendo el operador esperanza sobre el producto interno, se obtiene la matriz de covarianzas (33).

$$\begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} y_{i-1}^2 & y_{i-1} y_{i-2} \\ y_{i-2} y_{i-1} & y_{i-2}^2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Introduciendo las sumatorias en cada de los términos de la matriz pseudoinversa en (34).

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k^2} \left(\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k y_{i-1}^2 & \sum_{i=0}^k y_{i-2} y_{i-1} \\ \sum_{i=0}^k y_{i-1} y_{i-2} & \sum_{i=0}^k y_{i-2}^2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

Desarrollando los muestreos en cada una de las sumatorias de 0 hasta k muestreos, se llega obtener la forma secuencial de cada uno de los componentes de la matriz pseudoinversa de la covarianza (35).

$$\begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2} E \left\{ \begin{bmatrix} q_{11,i} & q_{12,i} \\ q_{21,i} & q_{22,i} \end{bmatrix} \right\} \quad (35)$$

Donde los componentes de la matriz pseudoinversa se presenta (36).

$$\begin{aligned} q_{11,k} &= y_{k-1}^2 + (k-1)^2 q_{11,k-1} \\ q_{12,k} &= y_{k-2} y_{k-1} + (k-1)^2 q_{12,k-1} \\ q_{21,k} &= y_{k-1} y_{k-2} + (k-1)^2 q_{21,k-1} \\ q_{22,k} &= y_{k-2}^2 + (k-1)^2 q_{22,k-1} \end{aligned} \quad (36)$$

La Ec. (34) se desglosa en dos componentes, de acuerdo con (37).

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k^2} \left(\begin{bmatrix} y_{k-1}^2 & y_{k-1} y_{k-2} \\ y_{k-2} y_{k-1} & y_{k-2}^2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (k-1)^2 \begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

El parámetro es estimado usando el segundo momento expresado en (27) y (30) y (35), como se muestra en (38).

$$\hat{a}_k = \begin{bmatrix} p_{1,k} & p_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix}^+ \quad (38)$$

Con

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \begin{bmatrix} \hat{a}_{k1,k} & \hat{a}_{k2,k} \end{bmatrix}, \\ \bar{p}_k &= \begin{bmatrix} p_{1,k} & p_{2,k} \end{bmatrix}, \\ \bar{q}_k &= \begin{bmatrix} q_{11,k} & q_{12,k} \\ q_{21,k} & q_{22,k} \end{bmatrix}^+ \end{aligned}$$

Donde \hat{a}_k y $\bar{p}_k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ $\bar{q}_k \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Prueba (Teorema 4.1)

La Ec. (28) considerando que \bar{p}_k y \bar{q}_k se son descritos por el segundo momento de probabilidad como son definidas $\bar{p}_k := E\{y_k \vartheta_{k-1}^T\}$, $\bar{q}_k := E\{y_{k-1} \vartheta_{k-1}^T\}$,

En diferencias finitas para \bar{p}_k se tiene (39)

$$\bar{p}_k = \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^k y_i \vartheta_{i-1}^T \quad (39)$$

Que en forma extendida es (40)

$$\bar{p}_k = \frac{1}{k^2} \left(y_k \vartheta_{k-1}^T + \sum_{i=0}^{k-1} y_i \vartheta_{i-1}^T \right) \quad (40)$$

Para condiciones estacionarias $\bar{p}(k-1)$ está definida en (41).

$$\bar{p}_{k-1} = \frac{1}{(k-1)^2} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \vartheta_{i-1}^T \quad (41)$$

Que al ser sustituida $(k-1)^2 \bar{p}_{k-1}$ de (39) en vez de $\sum_{i=0}^{k-1} y_i \vartheta_{i-1}^T$ en (38), se tiene (42)

$$\bar{p}_k = \frac{1}{k^2} (y_k \vartheta_{k-1}^T + (k-1)^2 \bar{p}_{k-1}) \quad (42)$$

Por condiciones estacionarias el estimador tiene la forma (43)

$$\hat{a}_{k-1} := \bar{p}_{k-1} \bar{q}_{k-1}^+ \quad (43)$$

Que al ser considerado $\bar{p}_{k-1} = \hat{a}_{k-1} \bar{q}_{k-1}^+$ en (40), \bar{p}_k es (44)

$$\bar{p}_k = \frac{1}{k^2} (y_k \vartheta_{k-1}^T + (k-1)^2 \hat{a}_{k-1} \bar{q}_{k-1}^+) \quad (44)$$

Sustituyendo (44) en (28) y desarrollando, se tienen (45)

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \left(\hat{a}_{k-1} \left(\frac{(k-1)^2}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times (\bar{q}_{k-1}^+)^+ \bar{q}_{k-1}^+ + \frac{1}{k^2} y_k \vartheta_{k-1}^T \right) \end{aligned} \quad (45)$$

Y sustituyendo a

$$\frac{(k-1)^2}{k^2} (\bar{q}_{k-1}^+)^+ \bar{q}_{k-1}^+$$

por β_k así como

$$\frac{y_k \vartheta_{k-1}^T}{k^2} \bar{q}_k^+)^+$$

por γ_k , el estimador es (46).

1. J. Abonyi, *Fuzzy Model Identification for Control* (Ed. Birkhauser, 2003).
 2. I. Rivals y L. Personnaz, *Black Box Modeling with State Space Neural Networks* (World Scientific 1996), pp. 237-264.
 3. A. Sinha, *Optimal and Robust Control* (CRC Press 2007). pp. 179-228.
 4. F. L. Lewis, L. Xie y D. Popa, *Optimal Estimation, Optimal and Robust Estimation* (CRC Press 2008), pp. 3-50.
 5. J.J. Medel J. y C.V. García M., *Rev. Mex. Fís.* **56** (2009) 54-60.
 6. A. A. Behar y M. M. Iranzo, *Identificación y Control Adaptivo*, (Prentice-Hall, 2003).

7. E. Schiavi y A. Isabel Muñoz, *Métodos en Diferencias Finitas para la Resolución de Problemas de Contorno* (Curso URJC 2007) Madrid.
8. R. A. Rivero, *Identificación de Sistemas de Segundo Orden*. (Ed. de la Universidad Tecnológica Nacional) Argentina.
9. W. Zucchini y I. L. MacDonald, *Hidden Markov Models for Time Series - An Introduction Using R*, (Ed. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2009), pp. 118-126.
10. G. H. Dehling, T. Gottschalk y A. C. Hoffmann, *Stochastic Modeling in Process Technology*, (Elsevier, 2007) pp. 2.
11. M. Gerdin, *Identification and Estimation for Models Described by Differential-Algebraic Equations*, (LiU-Tryck, 2006) Sweden, pp. 12-13.
12. R. J. Elliot, L. Aggoun y J. B. Moore, *Hidden Markov Models. Estimation and Control*. (Springer 2008), pp. 19.
13. C. Heij, A. Ran y F. Schagen, *Introduction to Mathematical System Theory, Linear Systems, Identification and Control*. (Birkhauser-Verlag, 2007), pp. 75.
14. P. G. Hoel, S. C. Port, y C. J. Stone, *Introduction to Probability Theory*. (Ed. Houghton Mifflin Company 1971), pp. 92-95.
15. J. A. Domínguez, G. González, y R. M. Rodríguez, *Un procedimiento práctico para estimar el parámetro de forma de la distribución Gaussiana Generalizada*. (CIMAT, 2001). pp. 6, México.
16. W. Dominguez, *PESQUIMAT Revista de la F.C.M.* 2 (1999) 69-70, Lima- Perú.
17. L. Debate y P. Mikusinski, *Hilbert Spaces with Applications* (Elsevier Academy Press 2005). pp 93-135.
18. J. J. Medel y M. T. Zagaceta, *Rev. Mex. Fís.* **56** (2010) 1-8.
19. C. F. Rengifo, *Una Herramienta para Identificación Recursiva de Sistemas Dinámicos*. (Softident, UNICAUCA, 2004). pp. 1-12.
20. D. S. Orcero, *La Matriz Fundamental y la Matriz esencial. Conceptos y aplicaciones* (Universidad de Malaga, 2002).
21. F. L. Lewis, L. Xie y D. Popa, *Optimal Estimation, Optimal and Robust Estimation* (CRC Press 2008). pp. 423-442.
22. R. Rodríguez, *Gráficas con MatLab* (Ministerio de Educación 2004), pp. 139, Madrid España.
23. R. Dukkippatti, *Analysis and Design of Control Systems Using MatLab*, (New Age Publishers 2006).
24. M. A. Lagunas, *Procesos Estocásticos y Estimación de Parámetros*, Cap. 2. (2007).
25. D. W. Stroock., *Probability Theory an Analytic View* (Cambridge University Press, 1994).