

# Aproximando el flujo de fluidos viscoelásticos mediante ecuaciones diferenciales con retardo

L. G. Virues-Delgadillo y A. E. Chávez-Castellanos

*Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, D.F., 04510, México.*

Received 17 February 2014; accepted 26 November 2014

El uso de modelos sencillos para obtener respuestas útiles, que inclusive acepten un grado de error conocido, tienen alta importancia cuando se requieren hacer estimaciones de datos que no se conocen pero se requieren en diseños de experimentos, equipos o inclusive hasta propiedades que no dependen de algún proceso en específico. La capacidad de cálculo de las computadoras modernas hacen en ocasiones ver las aproximaciones como métodos arcaicos, pero hay algunos casos en que es la única forma de hacer evaluaciones de posibilidades que pueden ocurrir al pasar de la fase teórica a la práctica en algún procedimiento. Por ello, este trabajo presenta una forma de aproximar ecuaciones de fluidos viscoelásticos por medio de ecuaciones diferenciales con retardo.

*Descriptores:* Fluido no Newtoniano; fluido de Maxwell; método de atajo; ecuación diferencial con retardo; ecuación diferencial ordinaria.

Using simple models to obtain useful answers, including those dealing with an acceptable error degree, are mainly important when data estimation is required for purposes such as experiment and equipment design, or even some properties that are non-process oriented. Modern computers currently have data handling capabilities that lead to see shortcut methods as archaic solutions, yet from time to time it remains as the only way to perform assessment evaluations that may occur from the theoretical phase to the experimental one at some procedure point. Therefore, this work features one shortcut method through delay differential equations to shortcut viscoelastic fluid equations.

*Keywords:* Non-Newtonian fluid; Maxwell fluid Shortcut method delay; differential equation; ordinary differential equation.

PACS: 83.60.Bc; 83.60.Df; 47.50.-d

## 1. Introducción

Las características o propiedades viscoelásticas se presentan en la mayoría de los fluidos reales y por lo general no son fáciles de evaluar y tienen un comportamiento complicado [1]. El fluido de Maxwell [2] a pesar de sus limitaciones, resulta ser el fluido no newtoniano más sencillo de evaluar. Los fluidos con comportamientos que difieren de estos modelos de referencia son los que resultan de interés en este trabajo. Muchos ejemplos de fluidos viscoelásticos reportados, difieren del comportamiento predicho por el fluido newtoniano y por el de Maxwell, por lo que aún resulta de interés obtener otros modelos que cumplan con ser sencillos y útiles para una evaluación rápida y más acertada para cada fluido.

Por otro lado la evaluación computacional del flujo de fluidos no newtonianos ha ayudado al modelado y entendimiento de sus comportamientos, sin embargo el tiempo computacional requerido es muy grande, por lo que modelos más simples siguen resultando atractivos a quienes pueden permitirse trabajar con ecuaciones aproximadas. De igual manera, cabe resaltar que en muchos casos las soluciones numéricas no siempre son fáciles de encontrar debido a problemas de selección y convergencia del método numérico, pues muchas veces se requiere de realizar pruebas hasta encontrar el método numérico más adecuado para el flujo deseado.

Las ecuaciones diferenciales con retardo poseen la ventaja de poder introducir distintos tipos de retardo, tanto discretos como continuos, aunque los primeros resultan de más fácil uso para su programación [3]. Por ese motivo, ya que el

método que se desarrolla en este trabajo plantea ser fácil de emplear, se emplean los retardos anteriormente citados.

El objetivo de este trabajo es comparar diferentes respuestas generadas por propuestas de esfuerzo cortante, comenzando por el fluido newtoniano como referencia ampliamente estudiada [4], pasando por el modelo de Maxwell simple ya reportado en la literatura [5] y partiendo de dichos modelos, presentar soluciones aproximadas obtenidas a partir del modelo propuesto.

## 2. Ecuaciones que permiten obtener soluciones aproximadas

Antes de postular las ecuaciones que llevan a las soluciones aproximadas deseadas, se exponen las limitaciones y suposiciones que se deben cumplir para que al usar tales ecuaciones, las diferencias que se obtengan con los datos experimentales disponibles deben ser aceptables para el intervalo de operación especificado en cada caso particular.

El primer requerimiento que se debe cumplir es que el sistema analizado cumpla con los principios de la mecánica del medio continuo, mientras que el segundo es que el flujo deberá suponerse unidireccional o casi unidireccional, la existencia de flujos secundarios indica que pueden ocurrir inestabilidades o transiciones, aunque esto en nada invalida la razón del promedio porque se trata de flujos unidireccionales no homogéneos. Si existen flujos secundarios, deben ser proporcionalmente menores al flujo principal de acuerdo a la aproximación de lubricación de Reynolds [6].

Para estas aproximaciones es que el gradiente de velocidades será supuesto como proporcional al promedio de la velocidad de tal modo que se cumple con:

$$\alpha \mathbf{v}_j \approx e_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} . \tag{1}$$

Donde  $\alpha$  es el parámetro que relaciona al operador gradiente  $\partial/\partial x_i$ , con la velocidad  $\mathbf{v}_j$  de manera aproximada, por lo que debe de tener unidades del inverso de la longitud característica asociada a la dirección del flujo, por lo que está íntimamente asociado a la manera en que el material fluido se deforma. El término  $e_i$  representa al vector unitario que tiene a la misma dirección que el gradiente de velocidades, por lo que si existen flujos secundarios en el proceso, estos deben cumplir con las consideraciones expuestas por la aproximación de lubricación [6]. Tomando en cuenta lo anterior, la Ec. (1) se puede mantener como válida de manera aproximada. Dicha dirección está dada por  $x_i$  donde  $j$  e  $i$  representan las direcciones principal y secundaria que están presentes en el flujo analizado. A su vez, su combinación con la velocidad debe ser similar al gradiente de velocidad principal tanto como sea posible, pero esto es específico de cada caso particular donde esta aproximación se aplique.

Y ya que el flujo de fluidos, de manera general está descrito por la ecuación de Cauchy, en notación de índices:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \mathbf{v}_i = - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{S}_{ij} . \tag{2}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $t$  es el tiempo, el gradiente de presión, que es la fuente del movimiento, está dado por  $\partial P/\partial x_j$  y por último,  $(\partial/\partial x_i)\mathbf{S}_{ij}$  es la divergencia del esfuerzo, que está relacionado con la deformación a la que el fluido es sometido. Es importante identificar que la posición y dirección también son importantes en esta ecuación. Por último cabe señalar que el término del lado izquierdo, la derivada material, contiene un término de inercia (el segundo término). Para poder hacer un análisis de la importancia de la contribución del esfuerzo se supondrá que los términos inerciales no son importantes y por ello, sólo la parte cortante del esfuerzo contribuye al balance de momentum. Dicha suposición es común en estudios reológicos [7], por lo que de la ecuación de Cauchy se simplifica a:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{S}_{ij} . \tag{3}$$

Además, al quedar la ecuación en términos del promedio de la velocidad y el esfuerzo cortante, la ecuación de Cauchy se puede expresar, de manera aproximada, al reducir la dependencia espacial [8,9] únicamente al término de la fuente del movimiento, que es el gradiente de presión, como:

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_j}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{e_i \bar{\mathbf{S}}_{ij}}{\Delta} . \tag{4}$$

La Ec. (4) es la base del presente trabajo, ya que mientras sea válida, el sustituir el término que corresponde al esfuerzo

por los casos señalados a continuación, no se presenta ninguna complicación y puede ayudar a obtener comportamientos diferentes a pesar de la sencillez del sistema. Se puede identificar que el término  $\Delta$  es la longitud característica asociada al flujo analizado.

**2.1. Ecuación constitutiva para el fluido newtoniano**

Esta es probablemente la ecuación más simple para un fluido viscoso [10] y presenta una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que ha sido ampliamente estudiada en sistemas de control, donde al aplicar la suposición de que el gradiente de velocidad es proporcional al promedio de la velocidad, como se expresó en la Ec. (1), se cambia la ecuación del fluido Newtoniano [11] por:

$$e_i \bar{\mathbf{S}}_{ij} = -\mu e_i \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_j}{\partial x_i} \approx -\mu \alpha \bar{\mathbf{v}}_j . \tag{5}$$

Al combinar la ecuación de Cauchy dada en (4) con la aproximación anterior, expuesta en (5), se obtiene la primera ecuación de referencia para el sistema más sencillo, la cual matemáticamente se expresa como:

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}_j}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\alpha \mu \bar{\mathbf{v}}_j}{\Delta} . \tag{6}$$

Donde la Ec. (6) es la primera ecuación que permite obtener una solución aproximada.

**2.2. Ecuación constitutiva para el fluido de Maxwell**

Esta es la ecuación más simple [12] para un fluido viscoelástico, donde una ecuación diferencial de primer orden, al ser introducida en la ecuación de Cauchy, permite obtener una ecuación de segundo orden, cuya solución también es conocida, pues se sabe que predice efectos ondulatorios. La ecuación de Maxwell se presenta a continuación con el gradiente de velocidad y con el parámetro con el mismo procedimiento utilizado en el caso newtoniano para continuar con la simplificación a través de la técnica de promedios.

$$\frac{de_i \bar{\mathbf{S}}_{ij}}{dt} + e_i \bar{\mathbf{S}}_{ij} = -\mu e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\mathbf{v}}_j \approx -\mu \alpha \bar{\mathbf{v}}_j . \tag{7}$$

Es importante mencionar que esta ecuación presenta una enorme dependencia sobre la geometría del sistema e investigaciones como la de Oldroyd han resultado en modelos complementarios para poder obtener soluciones independientes del marco de referencia [13]. Este procedimiento complica la ecuación de Maxwell, por lo que será mantenido fuera de este trabajo. La sustitución para el esfuerzo en la ecuación de Cauchy (4) corresponde en la siguiente expresión:

$$t_c \frac{d^2 \bar{\mathbf{v}}_j}{dt^2} + \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}_j}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\mu \alpha \bar{\mathbf{v}}_j}{\Delta} . \tag{8}$$

La Ec. (8) es la segunda ecuación de referencia para el sistema aproximado. Esta ecuación tiene una segunda derivada a diferencia de la ecuación generada por la sustitución del

fluido newtoniano definida en la Ec. (6). Se observa que hay un tiempo característico del material, que a su vez, si es igual a cero, la Ec. (8) regresa a ser la del fluido newtoniano. El tiempo característico será fijado a la unidad para poder tener comportamientos aceptablemente distintos a los generados por la solución (6) sin sobreestimar el posible valor que puedan presentar fluidos conocidos.

**2.3. Ecuación constitutiva para contemplar retardos**

Las ecuaciones diferenciales con retardo [14] se encuentran aún en una etapa de desarrollo, pero su uso y solución ya es variado. En este trabajo se hace uso de métodos numéricos que permitan la obtención de soluciones. El motivo de utilizar términos que contemplan valores anteriores de la solución es para darle a la ecuación la posibilidad de presentar “memoria”, lo que comúnmente se identifica como la capacidad de un material de regresar a un estado anterior y es por ello que se asigna un tiempo de retardo en el fluido para que comience a “responder” a la deformación, por lo que el estado previo es tomado en cuenta mediante la evaluación de la información en un tiempo  $t - t_r$ , por lo que  $t_r$  es el tiempo que todavía tiene relevancia para el flujo del fluido, lo que lo hace similar al tiempo característico  $t_c$  de la ecuación de Maxwell.

La ecuación propuesta que presenta un tiempo de retardo en general será:

$$e_i \bar{S}_{ij} = - \int_{t-t_r}^t \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}_j e_i dt' \approx - \int_{t-t_r}^t \mu \alpha \bar{v}_j dt'. \quad (9)$$

Sin embargo, para realizar una evaluación fácil de aplicar, se requiere intercambiar el término de la integral por términos discretos. Para este trabajo, ya que se trata de una aproximación, se plantea que la velocidad promedio referida al tiempo de retardo [15]  $\bar{v}(t - t_r)$  y el término  $\bar{v}(t)$  que es la velocidad promedio al tiempo actual, son suficientes para aproximar el comportamiento viscoelástico, ya que las características viscoelásticas están relacionadas con el tiempo característico del fluido. Sólo en el último caso a presentar, para observar efectos de combinaciones de velocidades con retardos, se proponen dos tiempos de retardo. De lo expresado anteriormente se toma la Ec. (9) y se sustituye por la Ec. (10):

$$e_i \bar{S}_{ij} = -\mu \alpha [\beta \bar{v}_j - (\beta - 1) \bar{v}_j(t - t_r)]. \quad (10)$$

El valor de  $\beta$  en este trabajo debe encontrarse entre los límites  $0 \leq \beta \leq 1$ , donde si este parámetro toma el valor de la unidad, la ecuación de retardo regresa al sistema newtoniano. Por el otro lado, si toma el valor de cero, el valor de la velocidad promedio en el tiempo de retardo es el único que dicta el esfuerzo promedio, lo cual seguramente provocaría inestabilidades y seguramente no tendría sentido físico [16]. Por ello, se fija el valor de  $\beta = 0.5$  para este trabajo con el fin de que ambas contribuciones sean similares, dejando abierta la posibilidad de proponer otro valor que mejore los datos experimentales con los que se dispongan.

A la Ec. (10) se le puede hacer una modificación de tal manera que existan dos retardos, con el fin de realizar comparaciones con los otros modelos. El resultado de incluir más retardos lleva a obtener la siguiente expresión:

$$e_i \bar{S}_{ij} = -\mu \alpha \left\{ \beta \bar{v}_j - \frac{(\beta - 1)}{2} [\bar{v}_j(t - t_{r1}) - \bar{v}_j(t - t_{r2})] \right\}, \quad (11)$$

por lo que las ecuaciones para uno y dos retardos quedan expresadas como:

$$\rho \frac{d\bar{v}_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\mu \alpha}{\Delta} [\beta \bar{v}_j - (\beta - 1) \bar{v}_j(t - t_r)] \quad (12)$$

$$\rho \frac{d\bar{v}_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\mu \alpha}{\Delta} \left\{ \beta \bar{v}_j - \frac{(\beta - 1)}{2} \times [\bar{v}_j(t - t_{r1}) - \bar{v}_j(t - t_{r2})] \right\}. \quad (13)$$

Así, para evaluar las ecuaciones obtenidas en esta sección, están disponibles métodos numéricos como los reportados por [17], en especial los métodos que son directos como los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden para ecuaciones diferenciales con retardo. Paquetería informática como MATLAB cuenta con una subrutina específica para ecuaciones con retardo [18,19]. También Mathematica a partir de su versión 7 puede resolver casos muy sencillos de ecuaciones diferenciales con retardo [20].

**2.4. El gradiente de presión**

Recordando que el fluido sólo recibe la fuerza generadora de movimiento en una dirección, se toma en cuenta el gradiente de presión únicamente en su dirección principal. Ya que ésta es la fuerza que provoca el movimiento del fluido, se hacen pruebas para el flujo que inicia y alcanza el estado estacionario (comúnmente usado al iniciar y mantener cualquier proceso en estado estable) dado por:

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \delta_{ji} e_i, \quad (14)$$

donde  $\delta_{ji}$  es la delta de Kronecker y causa que en la única dirección del gradiente de presión distinta de cero, sea la del flujo principal. La otra evaluación es la de un flujo pulsátil propuesto por medio de una serie de Fourier que permite observar el comportamiento del sistema durante un pulso y después de dicho pulso, el gradiente de presión es nulo. Dicha serie se asemeja a la reportada como una de las series notables de Fourier [21], usada en algunos casos para evaluar el flujo sanguíneo arterial [22]. Matemáticamente se puede expresar como:

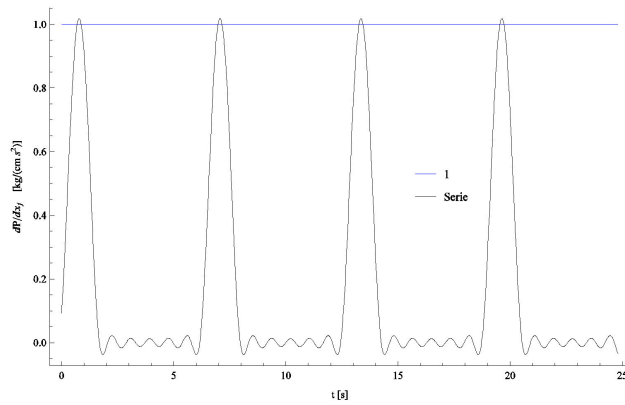


FIGURA 1. Gradientes de presión utilizados en este trabajo correspondientes a los usados en las Ecs. (14) y (15).

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \delta_{ji} e_i \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{2 \operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{cos}(t) - \operatorname{cos}(4t)}{3\pi} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{2 \operatorname{sen}(3t) - 2 \operatorname{cos}(3t)}{5\pi} + \frac{2 \operatorname{sen}(5t) - 2 \operatorname{cos}(5t)}{21\pi} + \frac{2 \operatorname{sen}(7t) - 2 \operatorname{cos}(7t)}{45\pi} \right). \quad (15)$$

Debe tenerse en cuenta que en el sistema sólo la representación gráfica de los gradientes de presión a probar se encuentra en la Fig. 1, donde se aprecia que el valor fijo del primer gradiente es muy parecido al valor máximo del gradiente de presión fijado por la serie de Fourier. La idea es observar la respuesta del sistema para un gradiente de presión constante “que se ha reportado ampliamente en la literatura con motivos de comparación y verificación de que todas las soluciones convergen al mismo estado estacionario” [23]. Para el caso pulsátil, se debe observar cómo afectan los pulsos las respuestas del flujo cuando el valor máximo del gradiente de presión se presenta esporádicamente.

Aplicando el gradiente que no depende del tiempo, el comportamiento de las ecuaciones de movimiento dadas en (6), (8), (12) y (13), se procede a realizar la evaluación de las soluciones para observar similitudes y diferencias en sus comportamientos.

### 3. Evaluación numérica de las aproximaciones

Para realizar evaluaciones de las ecuaciones constitutivas aproximadas presentadas, se utilizan distintos tipos de métodos numéricos de acuerdo a la ecuación a resolver; para el fluido newtoniano, un método explícito de Runge-Kutta de cuarto orden [24] es más que suficiente; por otro lado, para resolver la ecuación que corresponde al fluido de Maxwell, se selecciona el procedimiento de Runge-Kutta-Niström que lleva a la solución de sistemas con derivadas de segundo orden [25]. Y por último, el procedimiento para resolver las ecuaciones con uno y dos retardos, se utiliza la propuesta presentada en la literatura para tales casos [26].

El sistema se plantea con condiciones iniciales en reposo, lo que lleva a que no sólo los valores iniciales sean cero, sino que el valor de  $\bar{v}(t - t_r)$  con retardo es también cero antes de comenzar con la solución numérica, lo que permite realizar comparaciones objetivas entre los resultados obtenidos por las ecuaciones diferenciales ordinarias y las diferenciales con retardo. A su vez, se fijan los valores de  $\mu$ ,  $\rho$  y  $\Delta$  a la unidad en unidades de centímetro, kilogramo y segundo (de manera correspondiente a cada variable) para observar cómo cambia la velocidad por el cambio de ecuación constitutiva.

#### 3.1. Evaluación del flujo hacia estado estacionario

El estado inicial del sistema es el reposo. Para un tiempo mayor que cero, se debe alcanzar un estado estacionario para todos los sistemas representados por las Ecs. (6), (8), (12) y (13). El flujo del fluido newtoniano presenta un comportamiento ampliamente descrito en la literatura de teoría de control [27]. Comúnmente esta respuesta es conocida como la solución a la función escalón. El fluido de Maxwell presenta un comportamiento cada vez menos oscilante también reportado en la literatura [14]. Por otro lado, las dos ecuaciones englobadas en (12) y la Ec. (13) son casos que se pueden reducir al newtoniano si los retardos se fijan a cero y al modelo de Maxwell cuando el tiempo de retardo es corto y junto con  $\beta$ , es seleccionado adecuadamente. El propósito de introducir los retardos en el sistema es el buscar predicciones diferentes a las dadas por los modelos ya establecidos, por lo que no se presentan los casos que igualan a las ecuaciones de referencia. Resultados distintos se observan en la Fig. 2:

La velocidad con un tiempo de retardo de 1 s, presenta un comportamiento similar al del fluido de Maxwell, pero a su vez, se encuentra el estado estacionario antes de que el fluido modelo lo haga, lo que indica que el tiempo de retardo es similar al de reducir el valor de  $t_c$  para el fluido de Maxwell.

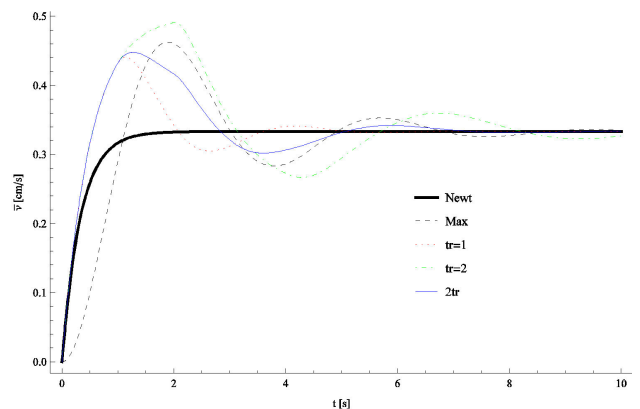


FIGURA 2. Respuesta de la velocidades promedio generadas por el gradiente de presión constante para los fluidos newtoniano, Maxwell, un tiempo de retardo de 1 s, un tiempo de retardo de 2 s y 2 tiempos de retardo correspondientes a las Ecs. (6), (8) (12) para tiempos de retardo iguales a 1 s y 2 s y (13) con ambos tiempos de retardo mencionados.

Por otro lado, cuando el tiempo de retardo es de 2 s, se observa que desde el inicio hasta  $t < 0.1$  s, el fluido sigue comportándose como fluido newtoniano, pero rápidamente alcanza una velocidad mayor que la esperada por el fluido de Maxwell en sus puntos máximos y menor en sus puntos mínimos. Esto es importante porque hace alusión a que un fluido con comportamiento viscoelástico, puede fluir aún más rápido de lo que se esperaba si el sistema se diseñó utilizando la ecuación constitutiva de Maxwell, lo que puede resultar muy importante en desarrollos de microfluídica.

Por último la propuesta de los dos retardos permite tener un comportamiento intermedio entre  $t_r = 1$  s y  $t_r = 2$  s. Esto es previsible si se interpreta a la Ec. (13) como una mezcla de dos ecuaciones de (12), pero también se tienen efectos que no son previsible en base a los resultados anteriormente descritos: se debe observar que el tiempo de retardo de 2 s primero causa que la velocidad se mantenga, en lugar de caer como se observa en la descripción de  $t_r = 1$  s, lo que da la posibilidad de que predicciones teóricas permitan comportamientos inesperados por ninguno de los modelos anteriormente citados, incluyendo el caso de la ecuación constitutiva propuesta en este trabajo en la Ec. (10).

A continuación se evalúa el sistema en estado transitorio con el gradiente de presión expresado en la Ec. (15), donde se observa la diferencia entre una fuente de movimiento continua y una variable. Cabe resaltar que esta serie de Fourier, al ser una modificación de una serie fundamental presentada en [21], no es ampliamente conocida pero tiene su utilidad al presentar dos secciones de comportamiento [22].

### 3.2. Evaluación del flujo en estado transitorio

Las Figs. 3 y 4 contienen gráficamente las comparaciones de las Ecs. (6), (8), (12) y (13), donde el utilizar casos de referencia resulta mucho más útil que en la evaluación anterior debido a que este flujo pulsátil no está tan ampliamente reportado como en el flujo hacia estado estacionario.

Lo primero que se debe observar es que al fluido newtoniano, al permitirle tener un tiempo de alrededor de cuatro unidades de tiempo donde casi no hay bombeo, el fluido puede mantenerse en reposo después de una ligera caída para cada pulso, lo que se observa mejor en la Fig. 4. En cambio, el fluido de Maxwell presenta dos oscilaciones grandes, la primera causada por el gradiente de presión y la segunda, más pequeña y negativa, resultado de las propiedades viscoelásticas del material. La tercera oscilación, también positiva, no termina de oscilar cuando el siguiente pulso provocado por el gradiente de presión ocurre. Esto no pasa así con la solución dada con  $t_r = 1$  s, ya que después de la tercera oscilación, se observa una cuarta sección de valores negativos que también es de menor magnitud, la cual sí alcanza a detenerse antes del siguiente pulso. También se puede notar que esta solución obtiene, junto con  $t_r = 2$  s, el pico de velocidad más positivo de todas las ecuaciones probadas. También se debe identificar que para este tipo de gradiente de presión,  $t_r = 2$  s, genera resultados más similares al caso del fluido de Maxwell que

$t_r = 1$  s, justo lo contrario a los resultados reportados del flujo a estado estacionario que fue presentada en la Fig. 2, pues las oscilaciones de  $t_r = 2$  s, son muy similares al caso del fluido de Maxwell con la excepción de que la última oscilación es interrumpida poco después de que se pasa el pico de la tercera oscilación con el siguiente pulso.

Del mismo modo que en el tipo de flujo anterior, el modelo de dos tiempos de retardo, dado por la Ec. (13) tiene un comportamiento combinado a partir de los tiempos de retardo, debido a que el máximo positivo es similar en los tres casos de ecuaciones que contienen retardos, pero el valor negativo se ve mucho más cerca de cero y el flujo se mantiene más estable que en los casos anteriores en la tercera oscilación, lo cual puede apreciarse en la Fig. 4.

Lo inesperado de la respuesta de la ecuación con dos retardos es que después de la oscilación negativa, se puede pensar más en que la velocidad es mantenida si se aproxima alrededor de la velocidad promedio de 0.1 s, hasta que el siguiente pulso vuelve a provocar el flujo. Del mismo modo, en la Fig. 4 se puede identificar que el comportamiento de la

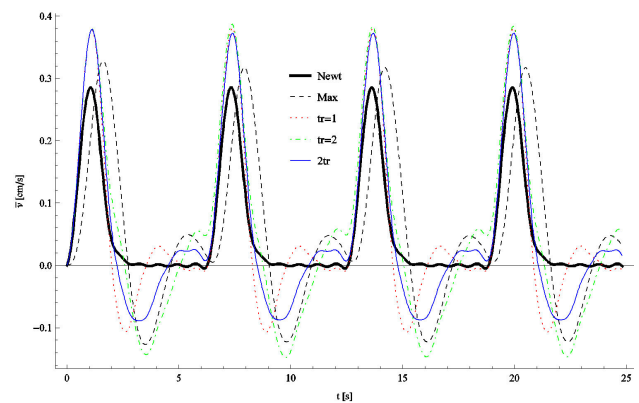


FIGURA 3. Respuesta de las velocidades promedio generadas por el gradiente de presión producido por la serie de Fourier expresada en la Ec. (15) para los fluidos newtoniano, Maxwell, un tiempo de retardo de 1 s, un tiempo de retardo de 2 s y 2 tiempos de retardo correspondientes a las Ecs. (6), (8) (12) para tiempos de retardo iguales a 1 y 2 y (13) con ambos tiempos de retardo.

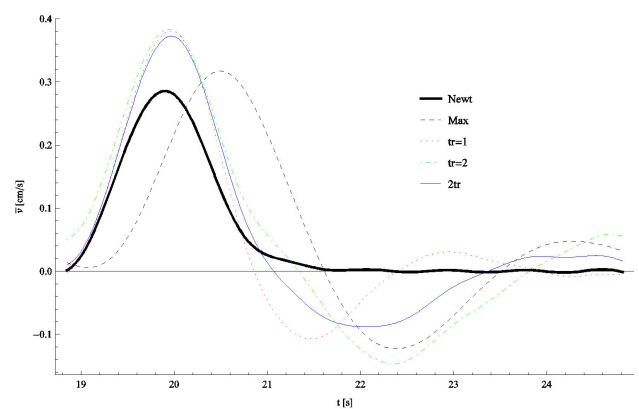


FIGURA 4. Acercamiento en un intervalo de  $2\pi s$  a partir de  $t = 6\pi s$  de la Fig. 3.

Ec. (13) es la que más presenta simetría alrededor de sus picos positivos y negativos, lo que no es previsto por ninguna otra ecuación constitutiva presentada en este trabajo.

Cabe resaltar que todas las ecuaciones, por sí mismas, generan soluciones aproximadas que pueden resultar de utilidad una vez que sus valores sean fijados a fluidos específicos. Sin embargo, en este trabajo se ha expresado que, sin dejar de utilizar ecuaciones sencillas, se pueden obtener mejores estimaciones para comportamientos viscoelásticos a través de un tratamiento aproximado. Para casos específicos de flujo, estas ecuaciones pueden llevar a mejores diseños y predicciones de lo que ecuaciones ya ampliamente aceptadas pueden proveer.

#### 4. Conclusiones

El aproximar tanto la velocidad y el esfuerzo a sus promedios y evaluar modelos de fluidos puede ser tan viable como buscar valores que validen a la ecuación constitutiva del fluido de Maxwell y a la ecuación del fluido newtoniano. Además de que, el presentar un comportamiento híbrido entre los fluidos antes reportados, puede ser muy útil para evaluar intervalos de operación posibles entre fluidos que no están totalmente caracterizados en un tipo de flujo requerido.

La contraparte, como todo modelo empleado en cualquier descripción, es que mientras más parámetros una ecuación contenga, y estos requieran de ser ajustados, más complicado resulta el uso fidedigno de dichas aproximaciones. Además de que el motivo de usar aproximaciones deliberadamente simplificadas sobre modelos más complejos y completos es tratar de evitar todos los impedimentos que surgen al no ha-

cer simplificaciones; por ejemplo, tener en cuenta el término de inercia o mantener en cuenta una geometría complicada. Por lo anterior, se identifica que estos sistemas requieren de todas las consideraciones que usualmente se toman en cuenta cuando se plantea el uso de fluidos, tanto newtonianos como no newtonianos, presentando la posible ventaja de que las predicciones generadas sean más exactas.

Pese a lo anterior, los resultados preliminares obtenidos demuestran que las ecuaciones constitutivas propuestas en este trabajo pueden tener utilidad, sobre todo cuando se ha caracterizado algún fluido en específico y su comportamiento no está comprendido en los casos reportados como el del fluido newtoniano o de Maxwell.

Se debe tener en mente que el motivo de utilizar aproximaciones es que problemas muy complicados tengan una solución más fácil de obtener al ser comparadas con las soluciones más complejas y completas consideradas como exactas, por lo que la propuesta de utilizar retardos parece muy prometedora.

#### Agradecimientos

Este artículo está dedicado a la memoria del Dr. Jorge Virués Vega. Su tiempo y dedicación ayudaron a realizar este trabajo.

Se agradece notablemente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT, México) (Beca de doctorado otorgada a Luis Guillermo Virues Delgadillo L. G. V.-D. con número 303165).

1. R.P. Chhabra, J.F. Richardson "Non-Newtonian Flow in the Process Industries -Fundamentals and Engineering Applications". (Butterworth-Heinemann. Massachusetts 1999).
2. Tschoegl, N.W., *Mechanics of Time-Dependent Materials* **1** (1997) 3-31.
3. R.D. Driver, *Ordinary and Delay Differential Equations* (New York: Springer Verlag. 1977).
4. N.W. Tschoegl, "The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior", (Springer-Verlag, Totens, UK.1989).
5. A.N. Volobuev, *Basis of Nonsymmetrical Hydromechanics*. (Nova Science Publishers, Inc. New York. 2012).
6. W. Deen, "Analysis of Transport Phenomena". 2ed. (Oxford University Press. New York. 2011).
7. C.R. Macosko, *Principles, Measurements and Applications*. (VCH Publisher. New York. 1993).
8. S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. (Springer-Verlag: New York. 1990).
9. A. Mitropolsky, *Int. J. Non-Linear Mechanics* **2** (1967) 69-96.
10. E.H. El Naby, A.E.M. El Misiery, *Applied Mathematics and computation*. **128** (2002) 19-35.
11. R.B. Bird, W.E. Steward, E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. 2 ed. (Wiley and Sons. New York. 2002).
12. J.G. Oldroyd, *Mathematical and Physical Sciences* **200** 1063 (1950) 523-541.
13. D.T. Corr, M.J. Starr, R. Vanderby, Jr and T.M. Best, *Journal of Applied Mechanics*. **68** (2001) 787-790.
14. S. Jafari, J.C. Sprott *Chaos Solitons & Fractals* **57** (2013) 79-84.
15. H.J. Orbele, and H.J. Pesch, *Numer Math*. **37** (1981) 235-255.
16. Bellman, Richard; Cooke, L. Kenneth, *Differential-difference equations*. (New York-London: Academic Press 1963).
17. W.H. Enright and H. Hayashi, *Numer. Alg.*, **16** (1997) 349-364.
18. K.W. Neves y S. Thompson, *Appl. Numer. Math.* **9** (1992) 385-401.
19. L.F. Shampine y S. Thompson, *Applied Numerical Mathematics* **37** (2001) 441-458.
20. [www.wolfram.com/products/mathematica/newin7/content/DelayDifferentialEquations](http://www.wolfram.com/products/mathematica/newin7/content/DelayDifferentialEquations)
21. M.R. Spiegel y J. Liu "Fórmulas y tablas de matemática aplicada" Serie Schaum. (McGraw-Hill. Segunda edición. Madrid. 2000).

22. L.G. Virues-Delgadillo, “*Estudio del flujo sanguíneo arterial por medio de un gradiente de presión variable*” Tesis de Maestría. Facultad de Química. UNAM, 2010.
23. W. Luyben, *Process Modelling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*. 2 sub ed. (New York. McGraw-Hill. 1989).
24. Kutta, W. Beitrag zur näherungsweise *Integration totaler Differentialgleichungen*. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **46** (1901) 435-453. Book digitized by Google and uploaded to the Internet Archive by user tpb.
25. E.J. Nyström, *Acta Mathematica* **54** (1930) 185-204.
26. K.C. Tan, and Y. Li, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **14** (2001) 473-486.
27. Liu, Jie; Wang, Golnaraghi, Kubica. *Fuzzy Sets and Systems* **161** (2010) 2746-2759.