Invarianza de las ecuaciones de movimiento bajo transformaciones de escala espacio-temporales en la dinámica de Newton modificada (MOND)

R. Acosta[a], E. Tuirán[b], U. Molina Redondo[c]
[a,c]*Departamento de física, Universidad del Atlántico, Km7 vía Puerto Colombia de Barranquilla, Colombia.*
e-mail: ubaldomolina@mail.uniatlantico.edu.co
[b]*Departamento de física y matemáticas, Universidad del Norte, Km5 vía Puerto Colombia de Barranquilla, Colombia.*

Received 3 December 2013; accepted 11 December 2014

Se realiza una exposición de los principios básicos que dieron origen a dinámica de Newton modificada MOND, así como una descripción de los aspectos fundamentales de la teoría como modificación de la gravedad por un lado y la inercia por otro. Además se considera el comportamiento de las ecuaciones de movimiento bajo transformaciones de escala espacio-temporales de las ecuaciones de movimiento, es decir, transformaciones de la forma $(t, \vec{r}) \rightarrow (\lambda t, \vec{r})$. Observando de esta manera que el régimen MOND surge del requerimiento de invarianza de las ecuaciones de movimiento con respecto a estas transformaciones.

Descriptores: MOND; gravedad modificada; inercia modificada; transformaciones de escala; invarianza.

The basic principles that originated the Modified Newtonian Dynamics MOND, are shown, as well as a description of the fundamentals aspects of the theory: modification of gravity and modification of inertia. Also, it is considered the behaviour of the movement equations under space-temporal scale transformations of the movement equations, that is, transformations that have the form $(t, \vec{r}) \rightarrow (\lambda t, \vec{r})$. It was observed in this way that the MOND regime comes from the requirement of the invariance of the movement equations with respect to this transformations.

Keywords: MOND; modified gravity; modified inertia; scale transformation; invariance

PACS: 04.50.Kd; 98.80.Jk

1. Introducción

Para fijar ideas sobre nuestra propuesta, que se exponen en aquí, es necesario resaltar que la aparición de las discrepancias entre la masa dinámica, determinada a partir de la ley de gravitación de Newton, y la masa directamente observada en sistemas galácticos tiene dos posibles explicaciones: una afirma que estos sistemas contienen grandes cantidades de materia invisible, la otra dice que la gravedad a esta escala no es descrita por la teoría Newtoniana. La primera explicación ha tenido la mayor atención por parte de los cosmólogos modernos. En esta, la denominada masa no bariónica desempeña el papel central, no solo en la determinación de la masa dinámica [2,3], sino también en la formación de estructuras a través del colapso gravitacional en los inicios del universo [14,20]. El paradigma de la materia oscura fría (CDM) es ampliamente exitoso en este contexto cosmológico, particularmente en la predicción de la dependencia de escala en las fluctuaciones de la densidad, así como en la explicación de otros hechos que se presentan a escala de galaxias para los cuales ha ganado gran poder de predicción. A pesar de ello, la materia oscura presenta dificultades a la hora de explicar la forma y magnitud de la discrepancia de masa en algunos sistemas particulares [13]. En esta vía, la distribución de materia oscura en sistemas galácticos que plantea el modelo CDM presenta dificultades observacionales [13,16], adicional al hecho de que las partículas candidatas a materia oscura hasta el momento no han sido detectadas a través de ningún medio independiente del efecto gravitacional global que se les atribuye. Siempre y cuando esta sea la única evidencia a favor de la materia oscura, su presunta existencia no es independiente de las leyes de la gravedad o de la inercia asumidas a escalas astronómicas. Si una ley física, cuando es extendida a un régimen en el cual nunca antes ha sido ve- rificada, implica la existencia de un medio que no puede ser detectado por ningún otro procedimiento, entonces parece razonable cuestionarla.

Además, si se elige modificar la dinámica Newtoniana o la gravedad de forma ad hoc entonces el conjunto de posibilidades es amplio. Es una simple cuestión reclamar que la ley de la gravedad de Newton falle a escalas galácticas de modo que para establecer un modelo que explique aspectos particulares de las observaciones realizadas se debe hacer contacto con principios físicos conocidos o al menos hacer una extrapolación razonable de estos.

Hasta la fecha, la única sugerencia que se dirige en cierto modo hacia el cumplimiento de este requerimiento es la dinámica modificada de Milgrom (MOND) [9,10,11]. Los sucesos observacionales de esta hipótesis a escalas que van desde galaxias esferoidales enanas hasta supercúmulos, sus posibles bases físicas y su extensión al contexto cosmológico es actualmente objeto de revisión.

Se puede argumentar que MOND es un planteamiento especulativo, pero en ausencia de una detección directa, el tema de la materia oscura no deja de ser menos especulativo, particularmente considerando que el modelo estándar de la Física de partículas no predice partículas candidatas a materia oscura que posean las propiedades convenientes. Extensiones razonables del modelo estándar (supersimetría) pueden, con un ajuste apropiado de parámetros, suministrar tales partículas [5], pero esto también necesita de una extrapolación de las teorías físicas conocidas hasta el momento.

Son muchos los intentos de modificar la gravedad con el fin de explicar la discrepancia de masa astronómica sin invocar a la hipótesis de materia oscura, pero es justo mencionar que ninguno de ellos ha logrado reproducir los sucesos fenomenológicos que MOND alcanza. Cabe anotar que aun cuando diferentes formulaciones se han propuesto con el objeto de establecer fundamentos sólidos para MOND, ninguna ha logrado conducirla a un estatus de teoría completa. Sin embargo, han permitido ahondar en las propiedades de teorías generalizadas sobre gravedad e inercia modificada.

El presente trabajo constituye tan solo una descripción general de la Dinámica de Newton Modificada propuesta por el físico Mordehai Milgrom. No es la intención de realizar nuevos aportes a las ideas de dinámica modificada ni profundizar en un campo tan amplio como el abarcado por esta teoría, tan solo exponer brevemente pero de manera clara, una propuesta que con el pasar de los años ha venido extendiéndose a espacios que antes le eran prohibidos.

Aquí se exponen los aspectos fundamentales de las formulaciones iniciales que se han propuesto para MOND y se lleva a cabo un breve análisis del comportamiento de las ecuaciones de movimiento al someterlas ha transformaciones de escala espacio-temporales en el régimen MOND.

2. MOND no relativista

2.1. Principios básicos de MOND

La aceleración de la gravedad $\vec{a}$ en MOND está relacionada con la aceleración Newtoniana $\vec{g}_N$ mediante [6]:

$$\vec{g}_N = \vec{a} u \left(\frac{a}{a_0} \right) \tag{1}$$

donde a_0 es una constante con dimensiones de aceleración [9], cuyo valor es $a_0 = 1.2 \times 10^8$ cm/s. La función $u(a/a_0)$ admite el siguiente comportamiento asintótico, $u = 1$ para $a \gg a_0$, recuperando de esta manera la expresión Newtoniana en el régimen de campo fuerte, y $u = a/a_0$, cuando $a \ll a_0$. Se ha llegado a la Ec. (1) considerando la posibilidad de que, en el límite de bajas aceleraciones, la fuerza inercial no es proporcional a la aceleración como mecanismo para descartar la necesidad de recurrir a la hipótesis de la materia oscura.

Como simples hipótesis de trabajo en el régimen no relativista, se asume que:

I. La aceleración depende, al igual que en el caso Newtoniano, de la fuerza que actúa en la posición del objeto deducida de su fuente en la forma convencional.

II. La fuerza inercial de un objeto, es aún proporcional a la masa gravitacional del mismo.

III. La fuerza inercial es paralela a la aceleración.

IV. La dinámica Newtoniana de un sistema gravitacional fracasa en el límite de pequeñas aceleraciones.

V. En este límite, la inercia se hace cuadrática en la aceleración, lo cual implica que la aceleración a, de una partícula de prueba viene dada por $a^2/a_0 = g_N$, tal que las curvas de rotación en las galaxias son asintóticamente planas.

VI. En el límite de aceleraciones altas la gravedad retorna al régimen Newtoniano.

Como resultado de la suposición (V) una nueva constante con dimensiones de aceleración a_0 debe ser introducida. Así, definiendo a_0 tal que para $a_0 \to 0$, entonces $m_g(a/a_0)\vec{a} = \vec{F}$ y requiriendo que la dinámica convencional sea restaurada para $a \to \infty$, obtenemos la Ec. (1).

2.2. Curvas de rotación

Las curvas de velocidad de las galaxias espiral suministran tal vez, la mayor restricción a las teorías que proponen la inexistencia de materia oculta en cantidades apreciables. Si la masa observada es toda la existente, las curvas de rotación pueden ser calculadas con base en la distribución de aque- lla y la teoría, lo cual se puede comparar luego con las curvas observadas. La característica más destacada en las curvas de rotación parece ser su aplanamiento asintótico evidenciado en diferentes estudios llevados a cabo por Krumm y Salpeter [8], Salpeter [15], Bosma [1] entre otros. Con la modificación propuesta para la dinámica Newtoniana el aplanamiento asintótico de las curvas de rotación de un cuerpo masivo finito es asegurado por la linealidad requerida en $u(a/a_0)$ para pequeños valores en el argumento, o de la suposición (V) de MOND. En realidad, esta propiedad de las galaxias representa uno de los principios guía en la constru- cción de MOND tal que fue tomado como un axioma fundamental para esta.

Para grandes distancias radiales desde el centro de las galaxias, se puede asumir que, $g_N = MGr^{-2}$ y con $a = V^2/r$ obtenemos:

$$V^4 = MGa_0 \tag{2}$$

Siendo, M la masa total de la galaxia.

2.3. Relación $M - V_\infty$ y la relación de Tully- Fisher

Tully y Fisher [19] fueron los primeros en encontrar una relación entre la luminosidad de las galaxias y su velocidad rotacional, conocida comúnmente como la relación de Tully-Fisher. Dicha relación es de la forma:

$$L \alpha V^\alpha. \tag{3}$$

Dónde: L es la luminosidad de la galaxia y V es la velocidad orbital de algún punto definido en la curva de rotación. El valor de α se encuentra en el intervalo 3-4 y depende de la longitud de onda de la banda en la cual es medido L. La estrecha cercanía entre el resultado expresado en la Ec. (2) y la relación (3) es alentador; pero, para llevar a cabo una evaluación de MOND en este sentido, hay que establecer un enlace entre ellas dos. Se debe utilizar entonces, la luminosidad en una banda donde sea una buena representación de la masa total del sistema galáctico, teniendo en cuenta no solo la masa estelar, sino la contribución de la masa del gas interestelar, y usar la velocidad asintótica, en lugar de otros mecanismos para determinar dicha velocidad. Se ha precisado recientemente que si se hace esto [12], realmente se obtiene una relación ajustada y precisa con la forma predicha por MOND.

2.4. Predicciones generales

Hay otras consecuencias observacionales de la dinámica modificada que caen en la categoría de predicciones en el sentido de que ellas no forman parte de las bases proposicionales de MOND. Estas son:

1. Galaxias con densidad de masa superficial alta, correspondientes a aceleraciones mayores que a_0, mostrarían una discrepancia de masa muy pequeña en las zonas internas. La discrepancia se presenta solamente más allá de cierto radio $r_t \equiv (MG/a_0)^{1/2}$, pero siempre y cuando la aceleración sea comparable con a_0.

2. En galaxias LSB, las cuales poseen baja densidad de masa superficial y aceleraciones internas pequeñas, deben presentarse grandes discrepancias de masa.

3. Existe una diferencia en la dinámica, y por lo tanto en las propiedades de estabilidad de discos galácticos con densidad superficial de masa $\Sigma \leq (a_0/G)$ y $\Sigma \geq (a_0/G)$. Lo cual se evidencia en la formación de barras y rápido calentamiento de los sistemas en el primer caso.

4. Para sistemas esferoidales, la relación entre la velocidad de dispersión y la masa viene dada por:

$$\sigma^4 \sim MGa_0. \tag{4}$$

De acuerdo a MOND, este es el hecho fundamental de la relación de Faber-Jackson para galaxias elípticas, las cuales son aproximadamente esferas isotérmicas.

3. MOND como modificación de la gravedad

Al igual que en la gravedad Newtoniana, la dinámica modificada también puede ser derivada de un lagrangiano que conserva aún la noción de un potencial único φ, a partir del cual se deriva la aceleración. Este lagrangiano tiene la siguiente forma:

$$L = -\int d^3r \left\{ \rho\varphi + (8\pi G)^{-1} a_0^2 F\left[\frac{(\nabla\varphi)^2}{a_0^2}\right]\right\}. \tag{5}$$

En donde $F(x^2)$ es una función arbitraria. Se observa que una escala de aceleración a_0 es necesaria a menos que nos encontremos en el régimen Newtoniano.

3.1. La ecuación de campo

Se puede determinar una expresión análoga a la ecuación de Poisson; para ello, se considera la variación de L con respecto a φ:

$$\delta L = -\int d^3r \Big\{ \rho\delta\varphi + (4\pi G)^{-1} \times F'\left[\frac{(\nabla\varphi)^2}{a_0^2}\right] \cdot [\nabla\varphi\nabla\delta\varphi] \Big\}. \tag{6}$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (f) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$$

de modo tal que al hacer los cambios $f = \nabla\varphi$ y $\vec{A} = F'[(\nabla\varphi)^2/a_0^2]\nabla\varphi$, y además teniendo en cuenta que la variación de φ en el infinito es cero, desarrollando se llega a la relación:

$$\nabla \cdot \left[u\left(\frac{|\nabla\varphi|}{a_0}\right)\nabla\varphi\right] = 4\pi G\rho. \tag{7}$$

La Ec. (7) es la expresión que determina el potencial modificado, de modo que representa la ecuación de campo en MOND dentro del contexto de la formulación lagrangiana. Una partícula de prueba tiene entonces una aceleración gravitacional $\vec{a} = -\nabla\varphi$. La Ec. (7) es complementada con la condición: $|\nabla\varphi| \to 0$ cuando $r \to \infty$.

3.2. Fenomenología observacional y predicciones

En primer lugar es interesante tener en cuenta las sugerencias y discusiones que proponen Benoit Famaey y Stacy McGaugh[4], en su trabajo sobre MOND: (Observational Phenomenology and Relativistic Extensions), en donde se hace unas predicciones generales como paradigmas, basándose en las observaciones de cúmulos de galaxias. Para ellos una descripción matemática de la ley de la fuerza efectiva, MOND funciona muy bien en las galaxias individuales, enfrentando este método unos retos agudos, sobre todo con la cosmología y en los cúmulos de galaxias, los cuales no se pueden abordar de manera concluyente sin que exista una teoría viable que abarque la mayor cantidad de fenómenos.

Los autores Benoit Famaey y Stacy McGaugh hacen una revisión exhaustiva los éxitos observacionales y problemas actuales de este paradigma alternativo a todas las escalas de la astrofísica, y un resumen de los diversos intentos teóricos hechos, de integrar de manera efectiva esta modificación de la dinámica de Newton dentro de una teoría relativista de la gravedad. Mediante datos de observación moderna, al compararlas con las teorías sobre MOND se pueden resumir las siguientes predicciones:

I. "Las curvas de velocidad calculada con la dinámica modificada, MOND, sobre la base de la masa observada en galaxias deben estar de acuerdo con las curvas observadas en las mismas".

II. "La relación entre la velocidad asintótica y la masa de la galaxia es absoluta".

III. "El análisis de los corrimientos dinámicos de las galaxias de disco utilizando la dinámica modificada debe ceder superficie densidades que concuerdan con los observados".

IV. "Con los efectos de la modificación se prevé que son particularmente fuerte en galaxias enanas, con bajo brillo de superficie".

V. "Las galaxias de disco con un bajo brillo superficial proporcionan pruebas particularmente fuertes".

VI. "Una correlación entre el valor de la densidad media de la superficie de una galaxia y la inclinación con la que la velocidad de rotación se eleva a su valor asintótico".

Las predicciones originales que se han mencionado anteriormente cubren muchas situaciones según sus autores, pero no todos. De hecho, una vez que uno escribe una ley de fuerza específica, su aplicación debe ser totalmente general. Esta hipótesis está fácilmente sujeto a la falsificación, a condición de datos suficientemente precisos para poner a prueba un desafío perpetuo para la astronomía.

En general, las pruebas de MOND que involucran galaxias de disco en rotación soportada son bastante positivos, como se detalla en gran medida en las predicciones resaltadas anteriormente, por la construcción de las observaciones, no hay ningún problema mayor, y proporcionan una consecuencia directa, según ellos, de la ley de Milgrom.

En segundo lugar se destaca los trabajos de Sascha Trippe [17,18], sobre la relación empírica de la discrepancia masa-aceleración (MDA), de las galaxias en forma de disco proporciona una prueba clave para modelos de dinámica galáctica. En términos de las leyes de gravedad modificada como también de la inercia modificada, la relación MDA cuantifica la transición de la dinámica newtoniana modificada a bajas aceleraciones centrípetas. Hasta ahora, ni los modelos dinámicos basados en la materia oscura, ni las modificaciones propuestos de las leyes de la gravedad e inercia han predicho la forma funcional de la relación MDA. En sus trabajos, Sascha Trippe, hace una revisión de los datos de MDA y compararlos con cuatro leyes de escala teórica diferentes. Tres de estas leyes de escala son totalmente empírica, y la cuarta una función "simple μ" de la Dinámica Newtoniana Modificada, que se deriva de un modelo de juego de la gravedad sobre la base de los gravitones masivos. Las relaciones de MDA comprenden un parámetro libre de la dimensión de una aceleración, "constante de Milgrom", y supone que la función "simple μ" proporciona un buen ajuste a los datos observados. Estas predicciones proporcionan un éxito de la forma funcional de la relación MDA, para describir la dinámica galáctica en todas las escalas mucho más allá de la escala del sistema solar. Esto sugiere que, al menos en escalas galácticas, la gravedad se comporta como si estuviera mediado por partículas masivas.

Por otro lado en sus trabajos X. Hernandez, A. Jiménez, and C. Allen [6] hacen una revisión de las observaciones de tres tipos de sistemas astrofísicos, y desafían seriamente la Teoría General de la Relatividad TGR. Además algunos escenario de la materia oscura, que muestra una fenomenología que modifican teorías que predicen la gravedad modificada en cuanto a los aspectos dinámicos de tipo MOND al cruzar el umbral de la aceleración.

Estos resultados son consistentes con la gravedad extendida, pero requeriría explicaciones más bien ideadas bajo los argumentos de la TGR, a partir de las observaciones nos ponen en una situación en la cual la modificación de la gravedad a escalas de baja aceleración deja de ser una cuestión de elección de la teoría y se convierte en algo inevitable.

Son muchos los autores, que han realizado valiosos aportes tanto teóricos como en los observacionales, como es el caso de los trabajos de Pavel Kroupa[7], en los cuales expone la existencia de otras soluciones teóricas a las observaciones cosmológicas. En particular, se puede resaltar la predicción donde asevera que la sola empírica correlación de discrepancia masa y aceleración, constituye una prueba convincente de que la dinámica a escala galáctica, que deben ser explicadas mediante las teorías de Mordehai Milgrom. Asegura que los principales problemas de la cosmología surgidos con la gran explosión inflacionaria siguen sin resolverse.

4. MOND como modificación de la inercia

Se presenta una formulación de MOND que involucra un lagrangiano e implica una modificación del potencial gravitacional. Esta formulación alternativa plantea la modificación de la acción cinética de una partícula de prueba no relativista bajo la influencia de un campo gravitacional, lo cual conlleva a una modificación de la ley de la inercia.

Para empezar, se asume que el movimiento de la partícula en un campo de potencial φ estático, está gobernado por una ecuación de movimiento de la forma:

$$m\vec{A} = -\nabla\varphi. \tag{8}$$

Donde m es la masa de la partícula y $\vec{A}$ (que reemplaza a la aceleración en la dinámica Newtoniana) depende solamente de la trayectoria $\vec{r}(t)$ (no del potencial); su valor es, en general, un funcional de la trayectoria completa, parametrizada por el tiempo t. De $\vec{A}$ se requiere que:

I. Que sea independiente de m, así se conserva el principio de equivalencia débil.

II. De acuerdo a las suposiciones de MOND, $\vec{A}$ puede ser construido a partir de la constante de aceleración a_0 como única constante dimensional.

III. Tiene que aproximarse a la expresión Newtoniana $\vec{a}$, en el límite $a_0 \to 0$, alcanzando de esta manera la correspondencia con la dinámica Newtoniana.

IV. Sea invariante bajo traslaciones y transformaciones como vector bajo rotaciones de la trayectoria.

V. a_0 debe ser independiente del tiempo, así estamos en libertad de asumir que $\vec{A}$ no depende explícitamente del tiempo.

El principio de acción en la formulación en cuestión se enuncia como sigue: Existe una acción cinética $S_K = [\vec{r}(t), t_1, t_2, a_0]$ que es funcional de la trayectoria $\vec{r}(t)$ dada entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2, cuya variación bajo un cambio $\delta_{\vec{r}}$ viene definida por:

$$\delta S_k = -T^{-1} \int_{t_1}^{t_2} m\vec{A}\delta\vec{r}(t) + T^{-1} \left[\hat{\vec{F}} \cdot \delta\vec{r}(t)\right]_{t_1}^{t_2}. \quad (9)$$

Dónde $\hat{\vec{F}}$: es un operador lineal que actúa sobre funciones de t y $T = t_2 - t_1$: es una constante de normalización que se introduce por conveniencia con el fin de mantener la a- cción finita cuando $t \to \infty$, lo cual no afecta la ecuación de movimiento.

5. Transformaciones de escala espacio-temporales

5.1. Invarianza bajo transformaciones de escala espacio-temporales y el límite MOND

Inicialmente la modificación asociada a MOND se realiza a través de la Ec. (1), haciendo uso de la función u y sus características específicas. Esto basado en el comportamiento asintótico de las curvas de rotación.

De igual forma, las dos formulaciones presentadas posteriormente fueron asimismo, fundamentadas en términos de funciones que median entre la dinámica Newtoniana y el régimen MOND, tal que de una u otra forma son asociadas con la función de interpolación original.

Se establece ahora la modificación de la dinámica a bajas aceleraciones con base en los siguientes principios:

I. Aparece en la Física una nueva constante, a_0, con las dimensiones de aceleración.

II. Tomando el límite formal $a_0 \to 1$ en todas las ecuaciones se retorna a las ecuaciones de la dinámica estándar.

III. Para sistemas puramente gravitacionales, el límite $a_0 \to \infty$ conduce a ecuaciones de movimiento que pueden ser escritas en tal forma que las constantes a_0 y G y las masas m_i aparezcan solamente como el producto $m_i G a_0$.

Puesto que el conocimiento de MOND viene, actualmente, del estudio de sistemas puramente gravitacionales, y es aún una cuestión abierta a la extensión del tercer principio MOND a sistemas que involucren interacciones arbitrarias. Una posibilidad se requiere es que, para $a_0 \to \infty$, las ecuaciones de movimiento sean llevadas a una forma donde a_0, G y m_i aparezcan como Ga_0 y m_i/a_0.

Por el momento, se puede considerar un sistema puramente gravitacional en el régimen MOND. En nuestro caso se asume que el sistema está constituido por masas discretas m_i. La suposición anterior implica que las únicas constantes que aparecen en la descripción del sistema son a_0, G y las masas m_i. El problema en estudio consiste en determinar las trayectorias de las partículas, de acuerdo con las condiciones iniciales. Estas condiciones son determinadas a partir de las ecuaciones de movimiento de la forma general:

$$F_k[m_i, G, a_0, \vec{r}_i(t)] = 0 \text{ con } k = 1, 2, 3, \ldots \quad (10)$$

Aquí $\vec{r}_i(t)$ representa las trayectorias de las partículas y F_k son funcionales generales de las trayectorias. El enunciado de simetría necesario en el límite MOND es: en el límite $a_0 \to \infty$, si $\vec{r}_i(t)$ constituye una configuración del movimiento de las partículas, entonces también $\vec{r}_i'(t') = \lambda\vec{r}_i(t) = \lambda\vec{r}_i(t'/\lambda)$ lo cual corresponde a la transformación:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{r}_i' = \lambda\vec{r}_i \\ t' = \lambda t \end{array}\right\}. \quad (11)$$

En otras palabras, si la Ec. (10) es válida para alguna trayectoria $\vec{r}_i(t)$, es también cierto que:

$$F_k\left[m_i, G, a_0, \lambda\vec{r}_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right] \text{ con } k = 1, 2, 3, \ldots \quad (12)$$

Se nota que las constantes a_0 y G, al igual que las masas m_i, permanecen intactas. Para relacionar lo anterior con los principios que definen el límite MOND, se puede observar que, de consideraciones dimensionales únicamente, estamos en libertad de multiplicar todas las cantidades con dimensiones de masa, longitud y tiempo por constantes arbitrarias, posiblemente dimensionadas $\alpha, \beta,$ y γ, lo cual no afecta la validez de las ecuaciones. Así, la Ec. (10) puede ser escrita como:

$$F_k\left[\alpha m_i, \beta^3\gamma^{-2}\alpha^{-1}G, \beta\gamma^{-2}a_0, \beta\vec{r}_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right] = 0. \quad (13)$$

Tomando ahora $\gamma = \beta = a_0$ y $\alpha = Ga_0$ e imponiendo la simetría en cuestión, obtenemos:

$$F_k[m_i G a_0, 1, 1, \vec{r}_i] = 0. \quad (14)$$

Esto evidencia que las ecuaciones de movimiento de las partículas pueden ser llevadas a una forma en la que m_i, a_0 y G aparecen como el producto $m_i G a_0$. Esta es la formulación del tercer principio de MOND establecido anteriormente, el cual surge ahora de la invarianza de escala.

5.2. Fenomenología MOND

5.2.1. Velocidad rotacional asintótica

Hay diferentes implicaciones para los sistemas gravitacionales en el régimen MOND que pueden deducir directamente de la invarianza de escala asumida. En primer lugar, nos dice que si $\vec{r}(t)$ es una trayectoria de un cuerpo puntual en una configuración de masas puntuales m_i en las posiciones $\vec{r}_i(t)$, entonces $\vec{r}_i' = \lambda\vec{r}_i(t/\lambda)$ es una trayectoria de la configuración donde m_i se encuentra en $\lambda\vec{r}_i(t/\lambda)$. De modo que la velocidad sobre la trayectoria es:

$$\vec{V}'(t) = \vec{V}\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

De esta ecuación, se sigue que la velocidad rotacional alrededor de una masa aislada es independiente del tamaño de la órbita en límite de grandes distancias. Bajo escalamiento, el tamaño de la órbita cambia pero las velocidades no. La extensión de la masa central también cambia bajo escalamiento, pero para radios orbitales grandes, ello no afecta el movimiento de las partículas de prueba. Lo anterior conduce al aplanamiento asintótico de las curvas de rotación de galaxias aisladas. En la presente formulación del límite MOND, el axioma fundamental de MOND es de esta manera una consecuencia del hecho de que la velocidad no cambia bajo escalonamiento espacio-temporal mientras la distancia si lo hace. La aceleración escala como λ^{-1}. Así, en el límite MOND cuando una órbita es escalada, la aceleración escala como el inverso del tamaño de la órbita. Este escalamiento nos dice que la aceleración de una masa de prueba en el campo de una masa puntual decrece como el inverso de la distancia entre ellas. De manera más general, nos dice que la fuerza gravitacional entre dos masas puntuales decrece en proporción al inverso de la distancia entre ellas.

5.2.2. Relación masa-velocidad

Un cambio de las unidades de tiempo por un factor γ en la Ec. (14) conduce a:

$$F_k\left[\gamma m_i G a_0, 1, 1, \vec{r}_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right]. \tag{15}$$

Lo cual expone la manera en que cambian las características orbitales con escalamiento de las masas.

Antes de discutir las implicaciones de esta relación, es posible derivarla de otra manera. Para ello se trabaja en un sistema donde $a_0 = G = 1$. De esta manera, la longitud y la masa tienen unidades de tiempo al cuadrado y a la cuarta potencia respectivamente. Las ecuaciones de movimiento (10) toman ahora la forma:

$$\hat{F}_k[m_i, \vec{r}_i] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

La invarianza de escala puede ser implementada como sigue: bajo cambio de las unidades de tiempo por un factor adimensional γ la Ec. (16) se transforma en:

$$\hat{F}_k[\gamma^{-4} m_i, \gamma^{-2}\vec{r}_i(\gamma t)] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Ahora se aplica la invarianza de escala, la cual nos dice que $\vec{r}_i(\gamma t)$ en la Ec. (17) puede ser reemplazado por $\lambda\vec{r}_i(\gamma(t/\lambda))$ y eligiendo $\lambda = \gamma^2$ llegamos a:

$$\hat{F}_k[\gamma^{-4} m_i, \vec{r}_i(t/\gamma)] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{18}$$

Esta ecuación tiene el mismo contenido que la Ec. (15). En consecuencia, si tiene una solución $\vec{r}_i(t)$ para un conjunto dado de masas, entonces $\vec{r}_i(t/\lambda)$ es un solución para el sistema donde todas las masas son multiplicadas por γ^{-4}. Las órbitas siguen siendo las mismas en el espacio, pero los cuerpos las recorren en unidades de tiempo multiplicadas por un factor γ, las velocidades multiplicadas por un factor γ^{-1} y las aceleraciones multiplicadas por un factor γ^{-2}. Más generalmente, eligiendo $\lambda = \gamma^{\alpha}$ se llega:

$$F_k[\gamma^{-4} m_i, \gamma^{\alpha-2}\vec{r}_i(t\gamma^{1-\alpha})] = 0 \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{19}$$

Las velocidades para estas soluciones aún escalan como la raíz cuadrada de las masas. De este escalonamiento con las masas sigue la relación masa-velocidad asintótica (esencialmente la relación bariónica de Tully-Fisher):

$$V_\infty^4 = M G a_0. \tag{20}$$

6. Conclusiones y perspectivas

Es preciso resaltar que la Dinámica de Newton Modificada (MOND), a pesar de ser una teoría incompleta, explica adecuadamente diferentes aspectos de la dinámica de galaxias y sistemas de galaxias de una manera simple, lo cual ha conducido gradualmente a que sea considerada una alternativa seria al problema de la materia oscura.

MOND introduce una nueva constante en la Física, a_0, con dimensiones de aceleración. Esta constante establece el límite entre el régimen MOND válido para campos de aceleración débiles o equivalentemente para aceleraciones menores que a_0, y el régimen Newtoniano o de grandes aceleraciones tal cual lo hacen $\hbar$ en el contexto de la Mecánica Cuántica y C en el de la Relatividad. Para retornar a la dinámica estándar debemos tomar formalmente el límite $a_0 \to 0$ en todas las ecuaciones de movimiento y para alcanzar el régimen MOND es menester tomar el límite $a_0 \to \infty$ en estas.

Por otro lado, varios hechos importantes deben ser mencionados con respecto a las predicciones realizadas por MOND. Esto es:

- Las predicciones son independientes unas de otras.

- Son consistentes con los datos recopilados observacionalmente.

Aun cuando existen diferentes formulaciones e interpretaciones que intentan dar base sólidas a MOND, no ha sido posible disponer de una teoría completa y general que no solo de explicación a hechos particulares de galaxias y sistemas de galaxias sino que además sea capaz de dar res- puesta a interrogantes propios de la Cosmología, tales como la radiación de fondo, la formación y evolución de estructuras, entre otros. Los esfuerzos realizados arrojan resultados cada vez más fructíferos, pero todavía limitados.

Las ideas MOND se pueden clasificar en dos categorías: las formulaciones donde se plantea la modificación de la ecuación de campo, sea a través del potencial o de la métrica dependiendo del dominio que se considere, y las formulaciones de inercia modificada que consisten en la modificación de la acción cinética de las partículas lo cual conlleva consecuentemente a la modificación de la ley de la inercia a diferencia del primer caso donde es modificado el campo gravitacional. La mayoría de los aspectos sobresalientes de la dinámica de las galaxias son muy similares para ambas formulaciones, pero de igual forma existen diferencias importantes que podrían estimular la elección de una sobre la otra.

El régimen MOND sigue de un requerimiento de invarianza bajo transformaciones de escala espaciotemporales de las ecuaciones de movimiento de sistemas gravitacionales en el contexto no relativista, es decir invarianza de las ecuaciones bajo transformaciones $(t, \vec{r}) \rightarrow (\lambda t, \lambda \vec{r})$ en el límite $a_0 \rightarrow \infty$. En esta vía, surgen los siguientes hechos los cuales habían sido planteados partiendo de la formulación inicial de MOND:

- El aplanamiento asintótico de las curvas de rotación.

- La relación masa-velocidad rotacional.

---

1. A. Bosma, *ApJ* **86** (1981) 1791.
2. G.R. Blulmenthal, S.M. Faber J.R., Primack and M.J. Recs, *Nature* **311** (1984) 517-25.
3. S.M. Faber and J.S. Gallagher, *Annun Rev. Astron. Astrophys* **17** (1979) 135-87.
4. B. Famaey and S. McGaugh, (2012). arXiv:1112.3960v2.
5. K. Griest, M. Komionkowski and M.S. Turner, *Phys Rev D* **41** (1990) 3565-82.
6. X. Hernandez, A. Jiménez and C. Allen, (2014) arXiv:1401.7063v1.
7. P. Kroupa, (2012) arXiv:1204.2546v2.
8. N. Krumm and E.E. Salpeter, *Astr. Ap.* **56** (1997) 465.
9. M. Milgrom, *ApJ*. **270** (1983) 371.
10. M. Milgrom, *ApJ*. **270** (1983) 365.
11. M. Milgrom, *ApJ*. **270** (1983) 384.
12. M. Milgrom, *ApJ.* **287** (1984) 571.
13. J.F. Navarro, C.S. Frenk and S.D.M. White, *ApJ*. **462** (1996) 563-75.
14. P.J.E. Peebles, *ApJ.* **263** (1982) L1-5.
15. E.E. Salpenter, In IAU Simposium 77, *Structure and Properties of Nerby Galaxies*, ed. (E. M. Berkhuijsem, 1978) p. 23.
16. J.A. Sellwood and A. Kosowsky, *In Gas and Galaxy Evolution, ASP Conf. Ser.*, ed. J.E Hibard, M.P Rupen, San Francisco: Astron Soc. (2001) pp. 311-18.
17. S. Trippe, (2014) arXiv:1405.7935v1
18. S. Trippe, (2013) arXiv:1305.6354v1
19. R.B. Tully, and J.R. Fisher, *Astr. Ap.* (1977) 661.
20. N. Vittorio and J. Silk, *ApJ.* **285** (1984) L39-43.