

## Solitones no autónomos en fibras ópticas

M. Pérez Maldonado y H.C. Rosu

IPICYT, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica,  
Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico  
e-mail: maximino.perez@ipicyt.edu.mx; hcr@ipicyt.edu.mx

Received 28 May 2015; accepted 17 June 2015

Soluciones solitónicas de las ecuaciones de Schrödinger no lineales de coeficientes variables que describen muchas situaciones reales de propagación solitónica se pueden obtener usando el mapeo de ‘integrabilidad diseñada’ a la ecuación estandar de Schrödinger no lineal de coeficientes constantes propuesto por He y Li. En este trabajo se presenta este método para el caso de fibras con ganancia/pérdida y se aplica a los casos de los solitones en fibras ópticas con amplificadores y los solitones brillantes en fibras no amplificadas.

*Descriptores:* Solitón; ecuación de Schrödinger no lineal; no autónomo; fibra óptica.

Soliton solutions of the non-linear Schrödinger equation of variable coefficients which describe many real cases of solitonic propagation can be obtained by means of the ‘designable integrability’ mapping to the standard non-linear Schrödinger equation of constant coefficients proposed by He and Li. In this paper, this method of obtaining the non-autonomous soliton solutions is presented for the general case of optical fibers with gain/loss, and applied to fibers with amplifiers, and those allowing the propagation of bright solitons.

*Keywords:* Soliton; non-linear Schrödinger equation; non-autonomous; optical fiber.

PACS: 05.45.Yv; 42.65.Tg; 42.81.Dp

### 1. Introducción

Es bien conocido que para la propagación de pulsos en fibras ópticas una influencia muy significativa tienen la dispersión y disipación de los pulsos y la no linealidad de las fibras. Estas crean una distorsión y pérdida de señal [1–3], fenómenos que han sido estudiados desde finales de los años 60s, aunque fue hasta los años 80s que se utilizaron amplificadores para compensar estas pérdidas [2]. Este proceso de amplificación es usualmente obtenido en fibras ópticas dopadas con sílice [3].

Teóricamente, la propagación de pulsos en fibras ópticas se puede describir por ecuaciones no lineales de la siguiente forma

$$i\psi_z + A(z)\psi_{tt} + B(z)|\psi|^2\psi + iC(z)\psi = 0 \quad (1)$$

las cuales son muy parecidas cuando  $C(z) \sim 0$  a la conocida ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS) de coeficientes constantes, que tiene soluciones solitónicas. Por lo tanto, hay la posibilidad de regímenes de propagación, en especial el régimen de dispersión anómala, en los cuales los pulsos ópticos ordinarios se pueden transformar en pulsos solitónicos [1–3].

En este trabajo, realizamos un tratamiento matemático que consiste en transformar la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes variables (ENLS-CV), describiendo un pulso dentro de una fibra óptica que presenta pérdida compensada por una ganancia en una ENLS estandar de coeficientes constantes, ecuación que puede ser resuelta por distintos métodos ya bien conocidos [4,5]. Este mapeo fue introducido por He y Li en 2010 pero para las aplicaciones a las fibras ópticas trabajaremos con una simplificación del método propuesto por ellos. Cabe mencionar que el mapeo de He y Li para la obtención de solitones no autónomos requiere el cumplimiento de una condición (ver las Ecs. (17) y/o (18))

entre los tres coeficientes de una ecuación de tipo (1). Solamente las fibras ópticas para las cuales se cumple esta condición permiten la propagación de los pulsos solitónicos.

### 2. Mapeo de He y Li para solitones en fibras ópticas

#### 2.1. Fibras con ganancia variable y tasa de pérdida constante

Este tipo de fibras son productos regulares de la tecnología actual y por esto presentamos el mapeo de He y Li directamente para este ejemplo aplicando los resultados obtenidos a dos casos que aunque sencillos son relevantes en las otras subsecciones. En general, las fibras ópticas modernas tienen no linealidad conocida y la dispersión es un parámetro controlado de manera tecnológica, lo que implica que la ganancia debe cumplir con una condición de compatibilidad así como mencionamos al final de la introducción, la cual se obtiene de manera natural por el mapeo de He y Li. La ecuación no autónoma ENLS-CV que describe la propagación de un pulso solitónico en estas fibras es

$$i\frac{\partial\psi(t,z)}{\partial z} + \frac{\beta(z)}{2}\frac{\partial^2\psi(t,z)}{\partial t^2} - i[g(z) - \Gamma]\psi(t,z) + \hat{\gamma}(z)|\psi(t,z)|^2\psi(t,z) = 0, \quad (2)$$

donde  $\psi$  es la envolvente del campo eléctrico del pulso,  $\beta(z)$  es la dispersión de la velocidad de grupo,  $\hat{\gamma}(z)$  es el coeficiente de no linealidad, parámetros que son dependientes de  $z$ , la coordenada en la longitud de la fibra y variable natural de evolución de los pulsos mientras que  $t$  es la coordenada transversal. La propagación de la onda se ve afectada por una tasa de pérdida constante  $\Gamma$  y una ganancia distribuida  $g(z)$ .

Una manera de garantizar la integrabilidad de (2), es por relacionarla con la ENLS estandar de coeficientes constantes

$$i \frac{\partial q}{\partial \mathcal{Z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \mathcal{T}^2} + \gamma |q|^2 q = 0, \tag{3}$$

donde  $\gamma = \pm 1$ ,  $q = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$ , y los coeficientes  $\beta(z)$  y  $\hat{\gamma}(z)$  se obtienen analíticamente bajo el mapeo. Proponiendo el ansatz

$$\psi(t, z) = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) p(z) e^{-i\phi(t, z)}, \tag{4}$$

tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(z, t)$  y  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(z)$ , se encontrará la forma específica para  $\beta, \hat{\gamma}, \mathcal{T}, \mathcal{Z}, p, \phi$ , donde  $q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$  es solución de (3). He y Li consideran el caso más general con  $p(z, t)$ , sin embargo para la propagación de solitones en fibras ópticas es suficiente tomar  $p$  solamente como función de  $z$  [4].

Sustituyendo (4) en (2), sin pérdida de generalidad, hacemos que  $\beta(z) = (\mathcal{Z}_z / \mathcal{T}_t^2)$  y  $\hat{\gamma}(z) = (\gamma \mathcal{Z}_z / p^2)$ , de donde se obtiene la siguiente ecuación para  $q$

$$i q_{\mathcal{Z}} + \frac{1}{2} q_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \gamma |q|^2 q + (k_1 + i k_2) q_{\mathcal{T}} + (k_3 + i k_4) q = 0, \tag{5}$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}_{tt}}{\mathcal{T}_t^2}, \\ k_2 &= \frac{\mathcal{T}_z}{\mathcal{Z}_z} - \frac{\phi_t}{\mathcal{T}_t}, \\ k_3 &= \frac{\phi_z}{\mathcal{Z}_z} - \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\mathcal{T}_t^2}, \\ k_4 &= \frac{p_z}{p \mathcal{Z}_z} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{tt}}{\mathcal{T}_t^2} - \frac{1}{\mathcal{Z}_z} [g(z) - \Gamma]. \end{aligned}$$

Dado que  $q$  también satisface (3), debemos imponer  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , para que (5) se vuelva (3). Esto se satisface cuando

$$\mathcal{T}(z, t) = F(z)t + F_1(z), \tag{6}$$

$$\mathcal{Z}(z) = f_0 F(z) + f_1, \tag{7}$$

$$\phi(z, t) = a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z), \tag{8}$$

$$p(z) = \sqrt{f_3 F} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz}, \tag{9}$$

$$\beta(z) = \frac{f_0 F_z(z)}{F^2}, \tag{10}$$

$$\hat{\gamma}(z) = \frac{\gamma f_0 F_z(z)}{f_3 F} e^{-\int 2[g(z) - \Gamma] dz}, \tag{11}$$

donde  $F_1(z) = f_2 F(z) + f_4$  y los parámetros de la fase son

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{F(z)}{f_0}, \quad b(z) = f_2 \frac{F(z)}{f_0}, \\ c(z) &= \frac{f_2^2 F(z)}{2 f_0} + f_5. \end{aligned} \tag{12}$$

La forma analítica de la función  $F(z)$  depende de cada caso particular, mientras que  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$  son constantes de integración, de las cuales  $f_1, f_4$  y  $f_5$  pueden ser nulas. De tal manera que la solución (4) tiene la forma

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &= q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) \sqrt{f_3 F} \\ &\times e^{\int [g(z) - \Gamma] dz} e^{-i(a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z))}. \end{aligned} \tag{13}$$

Notamos que  $f_5$  contribuye a la solución solamente con una rotación de ángulo constante  $\exp(-if_5)$ . Por lo tanto, tomaremos  $f_5 = 0$  sin pérdida de generalidad. Para  $q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$  se puede escoger cualquier solución de la ENLS estandar (3). Aquí usamos la solución  $q$  de Katyshev y colaboradores [6]

$$\begin{aligned} q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) &= A_0 \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} (\mathcal{T} - v \mathcal{Z}) \right) \\ &\times e^{i \left[ \left( \frac{v^2}{4} + \frac{\gamma A_0^2}{2} \right) \mathcal{Z} + \frac{v}{2} (\mathcal{T} - v \mathcal{Z}) \right]} \end{aligned} \tag{14}$$

donde  $A_0$  es la amplitud y  $v$  es la ‘velocidad’ del pulso solitónico, la cual da la oblicuidad  $\theta = -\arctan(4v)$  del solitón con respecto al eje  $\mathcal{Z}$  [7]. Denotando

$$\mathcal{F}(z) = f_0 F(z) + f_1, \quad \tilde{\mathcal{F}}(z, t) = F(z)t + F_1(z),$$

la solución completa es

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &= A(z) \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} [\tilde{\mathcal{F}}(z, t) - v \mathcal{F}(z)] \right) \\ &\times e^{i \left[ \left( \frac{\gamma A_0^2}{2} - \frac{v^2}{4} \right) \mathcal{F}(z) + \frac{v}{2} \tilde{\mathcal{F}}(z, t) - \frac{F(z)}{2f_0} (t + f_2)^2 \right]}, \end{aligned} \tag{15}$$

donde

$$A(z) = A_0 \sqrt{f_3 F(z)} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz}. \tag{16}$$

Se puede observar que la solución y el comportamiento del pulso propagandose en una fibra óptica se obtienen si conocemos los parámetros de dispersión de la velocidad de grupo, de no linealidad y de pérdida y ganancia. De (10) y (11) se obtiene que  $F(z)$  tiene la siguiente forma funcional

$$F(z) = \frac{f_3}{\beta(z)} \frac{\hat{\gamma}(z)}{\gamma} \exp \left[ 2 \int (g(z) - \Gamma) dz \right]. \tag{17}$$

La función  $F(z)$  y también  $F_1(z), \mathcal{F}(z)$  y  $\tilde{\mathcal{F}}(z, t)$  están relacionadas con el inverso del ancho del solitón no autónomo [8,9]. La relación (17) se puede escribir también en forma de la condición

$$\frac{\gamma \beta(z) F(z)}{\hat{\gamma}(z)} \exp \left[ -2 \int (g(z) - \Gamma) dz \right] = f_3. \tag{18}$$

Este tipo de condición fue también obtenido en [8] por el método de separar la ecuación no autónoma en un sistema de dos ecuaciones para la fase y la amplitud.

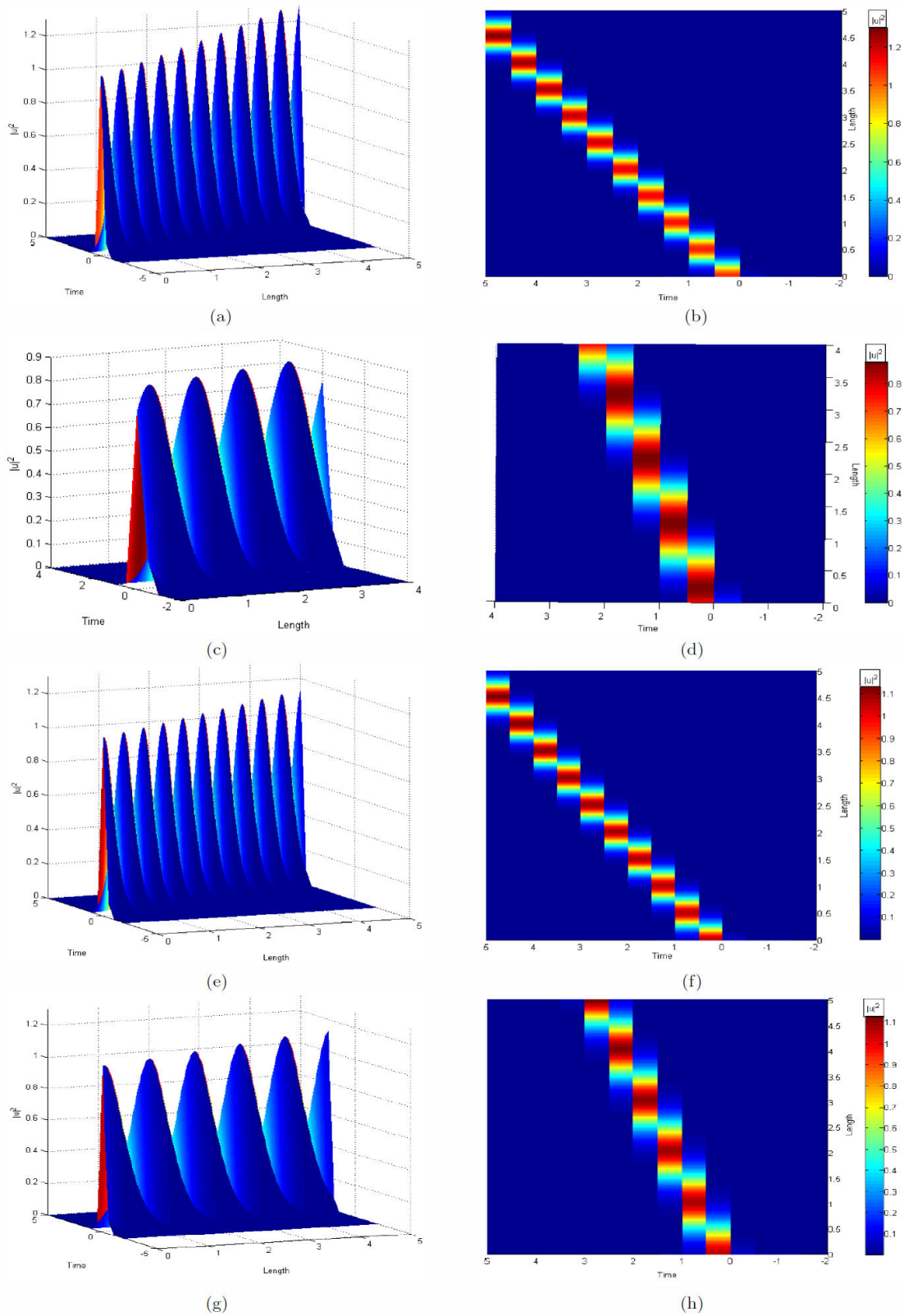


FIGURA 1. Gráficas del solitón no autónomo (21). (a) Propagación del pulso con  $v = 1$  para pérdida/ganancia = 0.6, con  $v_g = 1$ , dispersión de la velocidad de grupo 10, tiempo de relajación 0.2, bajo dispersión anómala; en (b), la gráfica de contorno correspondiente. (c) Propagación del pulso no autónomo con  $v = 2$  para los mismos parámetros de fibra óptica; en (d), la gráfica de contorno del pulso en este caso. (e) Propagación del pulso con  $v = 1$  para pérdida/ganancia = 0.8 con los otros parámetros iguales a los anteriores, (f), gráfica de contorno del pulso. (g) y (h) Propagación del pulso para el mismo cociente pérdida/ganancia de 0.8 y sin cambios en los otros parámetros pero con  $v = 2$  y gráfica de contorno del pulso, respectivamente.

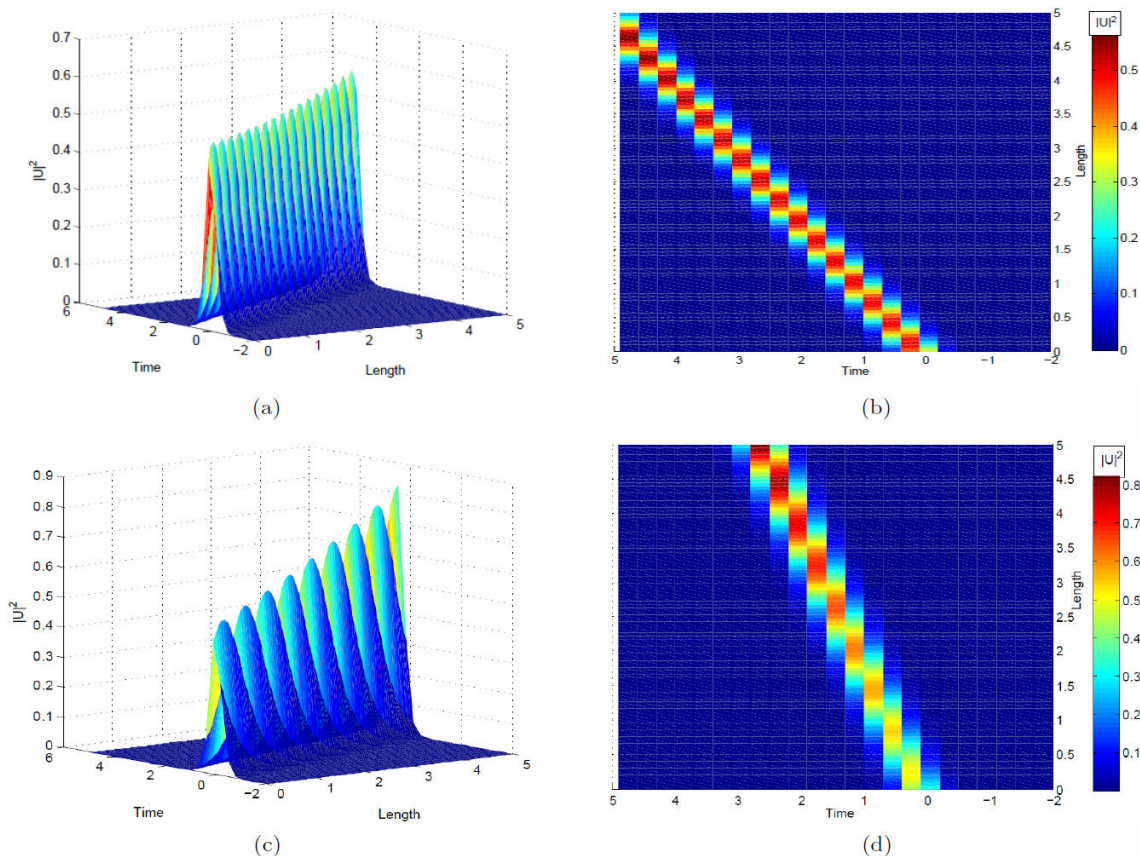


FIGURA 2. Gráficas de la propagación del solitón no autónomo (26) con  $v_g = 1$ , dispersión de la velocidad de grupo 10, tiempo de relajación 0.1, en regimen de dispersión anómala. (a) y (b) Propagación del pulso para  $v = 1$  y coeficiente de ganancia  $G_1(z) = 1$  y la gráfica de contorno del solitón en este caso. (c) y (d) Lo mismo para  $v = 2$ .

**2.2. Solitones en fibras con amplificadores**

La propagación de solitones en fibras amplificadas está descrita por la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes constantes pero no en forma estandar [10]

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2}(s + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u - \frac{i}{2} \mu u = 0 \quad (19)$$

con  $\xi = z/L_D$ ,  $L_D = T_2^2/\beta_2$  es la longitud de dispersión,  $T_2$  es el tiempo de relajación,  $\beta_2$  es el coeficiente de dispersión de la velocidad de grupo,  $\tau = (t - z/v_g)/T_2$  el tiempo normalizado,  $s = \text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ ,  $\delta = g_0 L_D$  es la curvatura del perfil de ganancia,  $\mu = (g_0 - \alpha)L_D$  ganancia neta y  $\alpha$  el coeficiente de pérdida.

En este caso la función  $F$  es compleja

$$F(\xi) = -\frac{f_3(s - i\delta)}{\gamma(s^2 + \delta^2)} e^{\mu\xi} \quad (20)$$

La solución no autónoma de (19) obtenida por el mapeo HeLi, es decir aplicando (15) a este caso, es

$$u(\tau, \xi) = A(\xi) \text{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} \frac{e^{\mu\xi} (s - i\delta)}{s^2 + \delta^2} (\tau - v + 1) \right) \times e^{i \left[ \frac{s e^{\mu\xi}}{2(s^2 + \delta^2)} (\gamma A_0^2 - v^2 + v(\tau + 1) - (\tau + 1)^2) \right]} \quad (21)$$

donde

$$A(\xi) = A_0 \sqrt{\frac{-s + i\delta}{s^2 + \delta^2}} \times e^{\mu\xi + \frac{\delta e^{\mu\xi}}{2(s^2 + \delta^2)} (\gamma A_0^2 - v^2 + v(\tau + 1) - (\tau + 1)^2)} \quad (22)$$

En estas fórmulas,  $\gamma = \pm 1$  es el parámetro de no linealidad en el caso autónomo.

Gráficas tridimensionales de esta solución solitónica se presentan en Fig. (1) para una fibra óptica con perfil de ganancia parabólico, donde el cociente de pérdida/ganancia tiene el valor  $\alpha/g_0 = 0.6$  para las imágenes (a)-(d) y el valor 0.8 para las imágenes (e)-(h). Se consideró el regimen de dispersión anomala  $s = -1$ ,  $\gamma = -1$  y  $\delta = 0.24$  para  $\alpha/g_0 = 0.6$  y  $\delta = 0.32$  para  $\delta = 0.32$  para  $\alpha/g_0 = 0.8$ . Las imágenes (a) y (e) se presentan con velocidad  $v = 1$  y las imágenes (c) y (g) con  $v = 2$ . En las imágenes (b),(d),(f) y (h) se muestra la perspectiva superior del pulso en cada caso. La disminución de la amplitud de los solitones en el caso de la velocidad más alta se puede entender de la expresión (22) donde el término en  $v^2$  es negativo teniendo la contribución principal a este efecto. Por otro lado, en el caso de la pérdida/ganancia=0.8,

este efecto es menos pronunciado debido a que el cociente  $\delta/(s^2 + \delta^2) \sim 0.17$  lo que es menos de 0.20 para el caso de pérdida/ganancia=0.6. Además, estas gráficas muestran que el ancho de los solitones es proporcional al parámetro  $v$  de la oblicuidad.

### 2.3. Solitones brillantes en fibras ópticas con ganancia y no linealidad variables

En este caso, la dinámica de propagación de la envolvente eléctrica del pulso es representada por la siguiente ecuación de coeficientes variables [11, 12]

$$i \frac{\partial U(Z, T)}{\partial Z} + \Omega(Z) \frac{\partial^2 U(Z, T)}{\partial T^2} + \frac{i}{2} G_1(Z) U(Z, T) + R(Z) |U(Z, T)|^2 U(Z, T) = 0, \quad (23)$$

donde  $\Omega(Z)$  es el coeficiente de dispersión,  $R(Z)$  es el parámetro de no linealidad de Kerr, y  $G_1(Z)$  es el coeficiente de ganancia. Después de identificar los coeficientes  $\beta(z)$  y  $\hat{\gamma}(z)$  con  $\Omega(Z)$  y  $R(Z)$  tal que  $z = Z$  y  $t = T$  y al combinar (10) y (11) se obtiene

$$R(Z) = 2\gamma_c \Omega(Z) \exp \left[ - \int G_1(Z) dZ \right]. \quad (24)$$

La dispersión diseñada la escogemos como una función que decae de manera exponencial,  $\Omega(Z) = e^{-Z}$ , porque este tipo de dispersión fue realizada experimentalmente [13].

Para este caso el pulso inicial se puede transformar en un solitón de ancho constante  $1/F$  donde  $F$  está dado por

$$F = 2f_3 \frac{\gamma_c}{\gamma}. \quad (25)$$

Solitones de otro ancho no se pueden propagar en fibras con las características mencionadas en esta subsección. La solución no autónoma tiene la siguiente forma

$$U(T, Z) = A(Z) \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \gamma_c f_3 A_0 ((T+2) - v) \right) \times e^{i \frac{\gamma_c f_3}{\gamma} \left( (\gamma A_0^2 - \frac{v^2}{2}) + v(T+2) - (T+2)^2 \right)}, \quad (26)$$

donde

$$A(Z) = \sqrt{\frac{2\gamma_c}{\gamma}} f_3 A_0 e^{\frac{1}{2} \int G_1(Z) dZ}. \quad (27)$$

La evolución de este solitón no autónomo se presenta en las gráficas tridimensionales de la Fig. (2) para las velocidades  $v = 1$  y  $v = 2$  en el caso  $G_1 = 1$  mostrando el crecimiento exponencial de la amplitud y la dependencia de oblicuidad del ancho.

### 3. Conclusión

Usando el método de He y Li se han obtenido las formas explícitas de los solitones no autónomos propagándose en una fibra óptica en un par de casos de importancia experimental. En las condiciones apropiadas para el manejo de solitones no autónomos, se puede realizar un mapeo que convierte la ecuación NLS-CV en una ecuación NLS estandar, si se cumple la condición  $F(z) = (f_3/\beta(z))(\hat{\gamma}(z)/\gamma) \exp[\int 2(g(z) - \Gamma) dz]$  donde  $F(z)$  es una función que parametriza el mapeo. Esta condición garantiza la integrabilidad del sistema y muestra que los solitones no autónomos son posibles solo si los parámetros de la fibra óptica cumplen esta condición. En general, los solitones no autónomos difieren del solitón estandar en base al cual se construyen en el método de He y Li por tener una amplitud y un ancho que dependen de los parámetros materiales de la fibra óptica en la cual se propagan.

### 4. Agradecimientos

El primer autor desea agradecer al CONACyT por la beca doctoral otorgada. Además los autores agradecen al revisor por sus comentarios que llevaron a mejorar la calidad de este trabajo.

1. G.P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics" Third Edition, Academic Press, (1995).
2. A. Hasegawa and M. Matsumoto, "Optical Solitons in Fibers" Third Edition, Springer-Verlag, (2003).
3. M.J. Ablowitz, B. Prinari and A.D. Trubatch, "Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems" Cambridge University Press, (2004).
4. V.I. Talanov, *JETP Lett.* **11** (1970) 199.
5. J. He and Y. Li, *Stud. Appl. Math.* **126** (2011) 1.
6. Y.V. Katyshev, N.V. Makhaldiani, and V.G. Makhankov, *Phys. Lett.* **66A** (1978) 456.
7. V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *JETP* **34** (1972) 62.
8. V.I. Kruglov, A.C. Peacock, and J.D. Harvey, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 056619.
9. S.A. Ponomarenko and G.P. Agrawal, *Opt. Express* **15** (2007) 2963.
10. L.W. Liou and G.P. Agrawal, *Opt. Commun.* **124** (1996) 500.
11. Z.Y. Yang, L.Y. Zhao, T. Zhang, and R.H. Yue, *J. Opt. Soc. Am. B.* **28** (2011) 236.
12. V.N. Serkin, A. Hasegawa, and T.L. Belyaeva *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 074102.
13. D.J. Richardson, R.P. Chamberlin, L. Dong, and D.N. Payne, *Electron. Lett.* **31** (1995) 1681.