TRATAMIENTO MATRICIAL-TENSORIAL DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO

Francisco M. Fernández y Eduardo A. Castro*

INIFTA, Sección Química Teórica
Sucursal 4 - Casilla de Correo 16. La Plata, Argentina

(recibido enero 20, 1983; aceptado julio 4, 1983)

RESUMEN

Mediante el empleo del formalismo matricial-tensorial, se discuten las propiedades relevantes del movimiento de rotación del cuerpo rígido y se deducen los resultados mecánicos más importantes de un modo muy sencillo y elegante.

ABSTRACT

The most important mechanical results and relevant features of the rotational motion of the rigid body are deduced and discussed in a simple and elegant way by means of the matrix-tensor formalism.

* Toda correspondencia concerniente a este trabajo deberá ser dirigida a E.A. Castro.

1. INTRODUCCION

Un cuerpo rígido que se mueve en el espacio posee 6 grados de libertad, tres de los cuales corresponden al desplazamiento del centro de masa y los tres restantes al movimiento de rotación. Como es bien sabido, ambos tipos de movimiento pueden tratarse por separado. Para estudiar la rotación se utilizan habitualmente dos sistemas de ejes cartesianos ortogonales fijos en el centro de masa 0 del cuerpo. Uno de estos sistemas (Oxyz) se desplaza paralelamente al sistema de referencia inercial (OXYZ), mientras que el otro (Ox'y'z') rota unido al cuerpo rígido.

Los textos habitualmente usados en los cursos de mecánica clásica(1,2) presentan la rotación del cuerpo rígido desde un punto de vista geométrico vectorial y sólo utilizan el formalismo matricial-tensorial en el momento de introducir el tensor de inercia(1). Aun aquellos textos que tratan el movimiento de rotación en forma algebraica, abandonan esta metodología cuando deducen las ecuaciones que rigen el movimiento del sólido(2) perdiendo así la oportunidad de realizar un desarrollo más elegante y ventajoso de dicho problema*. Este hecho ya ha sido discutido en varios trabajos realizados sobre el tema con fines educativos(3-6). No obstante esto, muchas de las ventajas que presenta el formalismo matricial-tensorial no han sido puestas de manifiesto en dichas comunicaciones. Una de tales ventajas es que al efectuar el tratamiento matricial se conoce en todo momento en qué sistema de coordenadas se expresa cada una de las cantidades mecánicas facilitando la comprensión del problema. Por otra parte, el desarrollo matricial-tensorial resulta más rápido y elegante, evitándose el empleo de engorrosos productos vectoriales múltiples y permitiendo obtener los resultados de un modo mucho más sencillo.

El objeto de este trabajo es poner de relieve la gran utilidad del método matricial-tensorial, así como su filosofía, la que aparentemente ha sido omitida en las anteriores publicaciones(3-6)*. Como el trata-

---

* Una excepción la constituye el libro de texto de E.J. Saletan y A.H. Cromer (Theoretical Mechanics, John Wiley & Sons, Inc. (1971) chapter V) cuya lectura se recomienda. Sin embargo, este libro no es de uso habitual, lo que en nuestra opinión justifica la realización de este artículo.

miento exige tan sólo de unos pocos elementos matemáticos que la mayoría de los alumnos adquiere en los cursos introductorios de álgebra lineal, esta comunicación puede resultar, a nuestro entender, de utilidad pedagógica en la enseñanza de la mecánica clásica.

En la sección siguiente expondremos brevemente los elementos matemáticos y la notación que emplearemos, en la sección 3, para desarrollar las ecuaciones que rigen el movimiento de rotación de un sólido en el espacio.

2. DEFINICIONES MATEMATICAS Y NOTACION

Como es habitual en muchos libros de álgebra lineal[7], llamaremos R^n al espacio vectorial de las n-uplas reales $\vec{x} = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ y $R^{n\times m}$ al conjunto de matrices reales de n filas por m columnas $(a = (a_{ij}) \varepsilon R^{n\times m})$. Sean $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ dos bases ortonormales en R^3 y $f: R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal tal que

$$f(e_i) = a_{ji} e'_j \quad , \tag{1}$$

entonces diremos que $a = (a_{ij}) \varepsilon R^{3\times 3}$ es la matriz de f en las bases e y e':

$$f_{ee'} = a \quad . \tag{2}$$

En la Ec. (1) se ha utilizado la convención de Einstein sobre la suma de índices repetidos. Para simplificar la notación usaremos esta convención a lo largo de todo el trabajo.

Llamaremos u a la matriz de la transformación idéntica $\mathbb{1}(\vec{x}) = \vec{x}$ en las bases e' y e

$$\mathbb{1}_{e'e} = u \quad . \tag{3}$$

Es fácil ver que $\mathbb{1}_{ee} = U = (\delta_{ij})$.

Cualquier vector $\vec{x} \,\varepsilon\, R^3$ podrá representarse mediante una matriz columna $(R^{3\times 1})$ tanto en la base e como en e':

$$X = X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x} = x_i e_i \quad ; \tag{4a}$$

$$X' = X_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x} = x'_i e'_i \quad . \tag{4b}$$

La imagen de $\vec{x}$ por f puede representarse también en forma matricial:

$$f(\vec{x}) = f(x_i e_i) = x_i f(e_i) = x_j a_{ji} e'_j \quad , \tag{5a}$$

$$f(\vec{x})_{e'} = f_{ee'} X_e = aX \quad . \tag{5b}$$

Si f y g son dos transformaciones lineales de R^3 en R^3 y e, e', e'' tres bases ortonormales de R^3, es fácil verificar que la matriz de la composición $f*g = f(g)$ en las bases e y e'' está dada por

$$(f*g)_{ee''} = f_{e'e''} g_{ee'} \quad . \tag{6}$$

Cuando f es un isomorfismo, $g = f^{-1}$ y e = e'' se deduce inmediatamente de (6) que

$$(f*f^{-1})_{ee} = \mathbb{1}_{ee} = U = f_{e'e}(f^{-1})_{ee'} \tag{7a}$$

y

$$(f^{-1})_{ee'} = (f_{e'e})^{-1} \quad . \tag{7b}$$

Como caso particular tenemos(7)

$$\mathbb{1}_{ee'} = u^{-1} = u^t \quad , \tag{8}$$

donde u^t representa la matriz traspuesta de u.

La matriz $f_e = f_{ee}$ se relaciona con $f_{e'} = f_{e'e'}$ de un modo muy sencillo:

$$(\mathbb{1}*f*\mathbb{1})_{e'e'} = f_{e'} = \mathbb{1}_{ee'}f_e\mathbb{1}_{e'e} = u^t au \quad . \tag{9}$$

Análogamente podemos vincular las matrices columna X y X' mediante una fórmula que se deduce de (5):

$$\mathbb{1}(\vec{x})_{e'} = X' = \mathbb{1}_{ee'}X = u^t X \quad . \tag{10}$$

Si los elementos a_{ij} de una matriz $a\varepsilon R^{n\times m}$ son funciones derivables de un cierto parámetro real t, podemos definir la matriz derivada $\dot{a}$ en la forma siguiente:

$$\dot{a} = da/dt = (da_{ij}/dt) = (\dot{a}_{ij}) \quad . \tag{11}$$

Para nuestro tratamiento de la rotación del cuerpo rígido, resulta particularmente importante la derivada de una matriz ortogonal $C(t)\varepsilon R^{3\times 3}$:

$$CC^t = C^tC = U \quad . \tag{12}$$

Derivando (12) respecto de t se deduce que la matriz

$$A(t) = \dot{C}(t)C(t)^t \quad , \tag{13}$$

es antisimétrica:

$$A(t) = -A(t)^t \quad . \tag{14}$$

Entre el conjunto $\mathcal{A}\varepsilon R^{3\times 3}$ de las matrices antisimétricas y R^3, podemos establecer un isomorfismo

$$F : \mathcal{A} \to R^3 \tag{15a}$$

en la forma siguiente:

$$F(A) = \vec{x} \quad , \qquad A\varepsilon\mathcal{A} \quad , \qquad \vec{x}\varepsilon R^3 \quad , \tag{15b}$$

$$x_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}A_{jk} \quad , \tag{15c}$$

donde ε_{ijk} es un tensor, conocido en mecánica como densidad de Levi-Civita[2], cuyas componentes no nulas son:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{132} = 1 \quad . \tag{16}$$

La transformación inversa

$$F^{-1} : R^3 \to A \quad , \tag{17a}$$

está dada por

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk} x_k \quad . \tag{17b}$$

Las ecuaciones (15c) y (17b) representan también un isomorfismo entre A y $R^{3\times 1}$ (por comodidad usaremos el mismo símbolo F):

$$F : A \to R^{3\times 1} \quad , \tag{18a}$$

$$F(A) = X \quad ; \tag{18b}$$

$$F^{-1} : R^{3\times 1} \to A \quad , \tag{18c}$$

$$F^{-1}(X) = A \quad . \tag{18d}$$

Sean A y $A' \varepsilon A$ las matrices de una cierta transformación g en las bases e y e' respectivamente:

$$A = g_e \quad , \tag{19a}$$

$$A' = g_{e'} \quad . \tag{19b}$$

Si

$$X = F(A) \quad , \tag{20a}$$

$$X' = F(A') \quad , \tag{20b}$$

y $u = \mathbb{1}_{ee'}$ es una rotación, probaremos que

$$X = uX' \quad . \tag{21}$$

De (9), (15c), (17b) y (20) se deduce que

$$x = (1/2)\varepsilon_{ijk}A_{jk} = (1/2)\varepsilon_{ijk}u_{jm}A'_{mn}u_{kn} = (1/2)\varepsilon_{ijk}u_{jm}u_{kn}\varepsilon_{mnp}x'_p \quad . \tag{22}$$

Por lo tanto,

$$u_{ir}x_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}u_{ir}u_{jm}u_{kn}x'_p = (1/2)\det(u)\varepsilon_{rmn}\varepsilon_{mnp}x'_p = \delta_{rp}x'_p = x'_r \quad . \tag{23}$$

El determinante de la matriz u (det(u)) vale 1 ya que por hipótesis esta matriz representa una rotación[7].

El lector podrá verificar que

$$F^{-1}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{24}$$

si $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3)$. Como caso particular, cuando $\vec{x}$ coincide con los vectores coordenados, obtenemos:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \tag{25a}$$

donde

$$E_i = F^{-1}(e_i) \quad . \tag{25b}$$

Algunos autores[2] llaman generadores de rotación infinitesimal a las matrices $-E_i$.

Para concluir esta sección mostraremos cómo puede el producto vectorial de dos vectores $\vec{x},\vec{y}\in R^3$ escribirse en forma matricial. Por definición, la i-ésima componente de dicho producto estará dada por

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \varepsilon_{ijk}x_jy_k \quad . \tag{26}$$

Si A_x y $A_y \varepsilon A$ son las imágenes de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por F^{-1} respectivamente, tendremos que (ver (17b))

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = (A_y)_{ij} x_j = -(A_x)_{ik} y_k \quad . \tag{27}$$

De acuerdo con esta ecuación, la matriz $P_{xy} \varepsilon R^{3\times 1}$ del vector $(\vec{x} \times \vec{y})$ en la base estará dada por

$$P_{xy} = A_y X = A_x^t Y \quad , \tag{28}$$

donde $X, Y \varepsilon R^{3\times 1}$ son las matrices de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, respectivamente, en la base e.

Esta breve disgresión matemática nos suministra los elementos necesarios para que podamos, en la sección siguiente, tratar el problema planteado en la Introducción.

3. MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO

Sean e y e' las bases ortonormales asociadas a los sistemas cartesianos (Oxyz) y (Ox'y'z'), respectivamente. La posición relativa de e' respecto de e cambia con el tiempo, y supondremos que inicialmente ambas bases coinciden:

$$e'(t=0) = e \quad . \tag{29}$$

En todo momento ambas bases están vinculadas por medio de la matriz $\mathbb{1}_{e'e} = u(t)$, cuyos elementos son funciones del tiempo. La naturaleza física del problema exige que la velocidad y aceleración del cuerpo sean funciones continuas de t, lo cual se traduce matemáticamente en que $\dot{u}_{ij}(t)$ y $\ddot{u}_{ij}(t)$ sean funciones continuas de t. La posición del sólido en el espacio queda perfectamente determinada por la posición relativa de $e'(t)$ respecto de e, o lo que es lo mismo, por los elementos $u_{ij}(t)$. Obviamente, la velocidad y la aceleración del cuerpo serán funciones de las cantidades $\dot{u}_{ij}(t)$ y $\ddot{u}_{ij}(t)$. En virtud de esto, podemos decir que el estado del cuerpo rígido, en cualquier instante de tiempo, queda determinado por $u(t)$ y su derivada primera. Por lo tanto, todas las propiedades del movimiento de rotación del sólido deben poder deducirse de las propiedades de la matriz $u(t)$. Como esta matriz representa una rotación en R^3, posee dos propiedades matemáticas que la definen:

$$u^t u = u u^t = U \quad , \tag{30}$$

$$\det(u) = 1 \quad . \tag{31}$$

Uno de los puntos esenciales de nuestro trabajo consiste en revelar cómo es posible deducir toda la mecánica del cuerpo rígido a partir de las Ecs. (30) y (31). Esto no ha sido mostrado con claridad suficiente en los trabajos previamente citados[3-6]*.

Si derivamos (30) respecto de t obtenemos

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad , \tag{32}$$

donde $A(t)\varepsilon A$ es la matriz de una cierta transformación lineal en la base e, ya que

$$A = \dot{u}u^t = \mathbb{1}_{e'e}\mathbb{1}_{ee'} \quad . \tag{33}$$

De aquí en adelante usaremos una tilde para indicar las matrices en la base e'.

Sea $G(t)\varepsilon R^{3\times 1}$ la matriz de una determinada magnitud vectorial $\vec{g}$ en la base e; luego

$$G = uG' \quad . \tag{34}$$

Si derivamos (34) respecto del tiempo (y usamos (32)) obtenemos una expresión que vincula la velocidad de variación de G en ambos sistemas de coordenadas:

$$\dot{G} = AG + uG' \quad . \tag{35}$$

Una conclusión interesante se obtiene al estudiar la velocidad de cambio de la base e':

---

* E.J. Saletan and A.H. Cromer, op. cit.

$$\dot{e}'_i = \dot{u}_{ji} e_j \quad ; \qquad i = 1,2,3 \quad . \tag{36}$$

Como

$$\det(\dot{u}) = \det(A) = 0 \tag{37}$$

se deduce que los vectores $\dot{e}'_i$ no son linealmente independientes. Es más, como el rango (número de filas o columnas linealmente independientes) de la matriz A es dos, estos vectores deben ser coplanares. La elegancia y rapidez con que se obtiene este resultado (bien conocido en mecánica) es uno de los grandes logros del método matricial-tensorial.

Si definimos un vector $\vec{\omega}$ en la forma

$$\vec{\omega} = -F(A) \quad , \tag{38}$$

la Ec. (35) puede ser escrita en una forma alternativa (ver Ec. (28))

$$\dot{G} = P_{\omega g} + u\dot{G}' \quad . \tag{39}$$

Como veremos a continuación, $\vec{\omega}$ es el conocido vector velocidad angular. Sea $\vec{x}$ el vector posición (con origen en 0) de un punto P que se mueve respecto de la terna e', y sean X y $X' \varepsilon R^{3\times 1}$ sus matrices en las bases e y e', respectivamente. Luego

$$\dot{X} = AX + u\dot{X}' \quad , \tag{40}$$

$$\ddot{X} = \dot{A}X + A^2X + 2Au\dot{X}' + u\ddot{X}' \quad . \tag{41}$$

Escritas vectorialmente estas ecuaciones adoptan la forma siguiente:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x} + u_{ij}\dot{x}'_j e_i \quad , \tag{42}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{a}_r \quad . \tag{43}$$

Como es habitual, hemos definido la velocidad $\vec{v}_r$ y la aceleración $\vec{a}_r$ del punto P relativas a la terna (Ox'y'z') en la forma:

$$\vec{v}_r = u_{ij}\dot{x}'_j e_i = \dot{x}'_j e'_j \quad , \tag{44}$$

$$\vec{a}_r = u_{ij}\ddot{x}'_j e_i = \ddot{x}'_j e'_j \quad . \tag{45}$$

Usualmente, en el tratamiento de este problema se introducen otros conceptos mecánicos tales como la aceleración de Coriolis ($\vec{a}_c$), la aceleración centrípeta ($\vec{a}_{ce}$) y la aceleración azimutal o de Euler ($\vec{a}_e$) que facilitan su descripción[1,2]:

$$\vec{a}_c = 2\vec{v}_r \times \vec{\omega} \quad , \tag{46a}$$

$$\vec{a}_{ce} = \vec{\omega} \times (\vec{x} \times \vec{\omega}) \quad , \tag{46b}$$

$$\vec{a}_e = \vec{x} \times \dot{\vec{\omega}} \quad . \tag{46c}$$

Según se aprecia, el método matricial-tensorial nos permite establecer de un modo mucho más sencillo y claro, a qué sistema de coordenadas se están refiriendo las distintas cantidades mecánicas. Por otra parte, y como habíamos anticipado, se ve claramente que el vector $\vec{\omega}$ definido en (38) es realmente el vector velocidad angular. Este vector posee una propiedad que lo distingue de otros y que se obtiene de (39):

$$\dot{\omega}'_i e_i = \dot{\omega}'_i e'_i \quad .$$

Ecuaciones de Euler

Consideremos una partícula, de masa m_h, del sólido, cuya posición esté dada por el vector $\vec{x}_h$ (con origen en 0). Sean X_h la matriz de $\vec{x}_h$ en la base e, y $x_h = F^{-1}(\vec{x}_h)$.

Dado que $x'_{hi} = 0$, la energía cinética T de rotación del cuerpo tendrá la forma siguiente:

$$T = (1/2)m_h\dot{X}_h^t\dot{X}_h = (1/2)W^t m_h x_h \dot{X}_h = -(1/2)W^t m_h x_h^2 W \quad , \tag{48}$$

donde $W\varepsilon R^{3\times 1}$ es la matriz de $\vec{\omega}$ en la base e.

Dado que T es un escalar, y por lo tanto invariante frente a los cambios de base, la Ec. (48) puede escribirse de manera más conveniente:

$$T=(1/2)m_h(u\omega')^t(ux'_hu^t)^t ux'_hu^t u\omega'=(1/2)m_h\omega'^t x_h'^t x'_h\omega'=(1/2)\omega'^t I\omega' \quad . \tag{49}$$

La matriz I definida como

$$I = m_h x_h'^t x'_h \quad , \tag{50a}$$

puede identificarse como el tensor de inercia ya que un cálculo sencillo nos muestra que:

$$I_{ij} = -m_h x'_{hi} x'_{hj} \qquad (i \neq j) \quad , \tag{50b}$$

$$I_{ii} = m_h(X_h'^t X'_h - x_{hi}'^2) \quad . \tag{50c}$$

El momento cinético $\vec{L}$ definido en la forma

$$\vec{L} = m_h \vec{x}_h \times \dot{\vec{x}}_h \quad , \tag{51a}$$

posee una matriz L en la base e dada por

$$L = -m_h x_h^t \dot{X}_h = -m_h x_h A X_h = m_h x_h^t x_h \omega = u m_h x_h'^t x'_h \omega' = uL' \quad , \tag{51b}$$

donde

$$L' = m_h x_h'^t x'_h \omega' = I\omega' \quad . \tag{51c}$$

La versión matricial-tensorial de las ecuaciones de Euler se obtienen derivando (51b) respecto del tiempo:

$$\dot{L} = AL + u\dot{L}' \quad . \tag{52a}$$

Esta ecuación es más conocida en su forma vectorial[1,2]

$$\dot{L}_i = (\vec{\omega} \times \vec{L})_i + u_{ij} I_{jk} \dot{\omega}'_k \quad . \tag{52b}$$

Traslación del origen de coordenadas

Como el origen 0 de la terna (Ox'y'z') coincide con el centro de masa del cuerpo, las coordenadas x'_{hi} satisfacen la condición

$$m_h x'_{hi} = 0 \quad . \tag{53}$$

Consideremos una nueva terna de ejes (O'x''y''z'') paralela a la anterior. Las coordenadas de los puntos del cuerpo respecto de la segunda terna serán

$$x''_{hi} = x'_{hi} - x_{oi} \quad , \tag{54}$$

donde x_{oi} son las componentes del vector $\vec{x}_o$ con origen en O y extremo en O'. El tensor de inercia relativo a la terna (O'x''y''z'') será, por lo tanto,

$$I_{O'} = m_h x''^t_h x''_h = m_h (x'^t_h x'_h - x^t_o x'_h - x'^t_h x_o) + M x^t_o x_o = I + M x^t_o x_o \quad , \tag{55}$$

donde M es la masa total del cuerpo y $x_o = F^{-1}(\vec{x}_o)$.

Si bien la Ec. (55) constituye un resultado muy conocido[2], debe tenerse en cuenta que aquí la hemos deducido de un modo rápido y sencillo sin necesidad de recurrir a nuevos elementos matemáticos. Esta posibilidad de unificar todo el tratamiento del cuerpo rígido es otro de los atractivos que presenta el formalismo matricial-tensorial.

Angulos de Euler

Es bien sabido que la matriz que expresa una rotación en R^3 posee tan sólo tres parámetros independientes. Este resultado matemático está en perfecto acuerdo con el siguiente hecho físico: un cuerpo rígido fijo en un punto posee únicamente tres grados de libertad.

Los parámetros más convenientes para describir la rotación de un sólido son los denominados ángulos de Euler ϕ, θ, ψ[1,2]. En términos de estos parámetros, la matriz u tiene la forma siguiente:

$$\mathbb{1}_{e'e} = u = R_\phi R_\theta R_\psi \quad , \tag{56}$$

donde

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\mathrm{sen}\phi & 0 \\ \mathrm{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{57a}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \tag{57b}$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\mathrm{sen}\psi & 0 \\ \mathrm{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{57c}$$

La matriz A puede expresarse en función de las matrices antisimétricas

$$A_\phi = \dot{R}_\phi R_\phi^t \quad , \tag{58a}$$

$$A_\theta = \dot{R}_\theta R_\theta^t \quad , \tag{58b}$$

$$A_\psi = \dot{R}_\psi R_\psi^t \quad , \tag{58c}$$

del modo siguiente:

$$A = A_\phi + R_\phi A_\theta R_\phi^t + R_\phi R_\theta A_\psi R_\theta^t R_\phi^t \quad . \tag{59}$$

La Ec. (38) nos suministra una expresión para las componentes de $\vec{\omega}$ en función de los ángulos de Euler y sus derivadas:

$$\omega_1 = A_{32} = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi \quad , \tag{60a}$$

$$\omega_2 = A_{13} = \dot{\theta}\mathrm{sen}\phi - \dot{\psi}\cos\phi\mathrm{sen}\theta \quad , \tag{60b}$$

$$\omega_3 = A_{21} = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \quad . \tag{60c}$$

Las componentes de $\vec{\omega}$ en la base e' se obtienen en forma análoga a partir de A':

$$A' = u^t A u = R_\psi^t R_\theta^t A_\phi R_\theta R_\psi + R_\psi^t A_\theta R_\psi + A_\psi \quad . \tag{61}$$

Comparando (59) y (61) se aprecia que para pasar de A a A' debemos intercambiar ϕ y ψ y reemplazar R_ϕ, R_θ y R_ψ por sus traspuestas. Esto último es equivalente a cambiar senβ por -senβ ($\beta = \phi,\theta,\psi$) (ver Ecs. (57)).

Realizando estos cambios en (60) obtenemos:

$$\omega_1' = \dot\theta\cos\psi + \dot\phi\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\psi \quad , \tag{62a}$$

$$\omega_2' = -\dot\theta\,\mathrm{sen}\psi + \dot\phi\cos\psi\,\mathrm{sen}\theta \quad , \tag{62b}$$

$$\omega_3' = \dot\psi + \dot\phi\cos\theta \quad . \tag{62c}$$

Para que el manejo de estas ecuaciones se pueda apreciar con más claridad hemos incluido en este trabajo un ejemplo muy sencillo que se muestra a continuación:

Ejemplo: Eje de rotación

Supongamos que el cuerpo rígido está rotando alrededor del eje z y sea θ el ángulo de rotación. En estas condiciones se verifica que

$$u = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{63}$$

Un cálculo muy sencillo nos permite obtener, a partir de (33), el siguiente resultado:

$$A = \dot\theta E_3^t \quad . \tag{64}$$

Según las Ecs. (25) y (38), el vector $\vec\omega$ estará dirigido a lo largo del eje z y su módulo será $|\dot\theta|$:

$$\vec\omega = \dot\theta e_3 \quad . \tag{65}$$

Obviamente, el sentido de $\vec\omega$ queda determinado por el signo de $\dot\theta$.

4. COMENTARIOS FINALES

Los resultados presentados a lo largo de este trabajo no pretenden ser originales y nuestro objetivo ha sido simplemente deducirlos mediante un formalismo diferente del habitualmente empleado[1,2]*.

No debe olvidarse que los fines del presente artículo son exclusivamente educativos y está dirigido a mostrar a los alumnos de los cursos de mecánica clásica una nueva alternativa en el tratamiento del movimiento de rotación del cuerpo rígido. El método matricial-tensorial utilizado permite obtener estos resultados en forma rápida y elegante y revela varios aspectos del problema que normalmente quedan ocultos. Uno de ellos es el rol relevante que desempeña la matriz ortogonal u de cuyas propiedades matemáticas (Ecs. (30) y (31)) puede deducirse el comportamiento físico del sólido.

En nuestra opinión, este hecho esencial no ha sido puesto de relieve, con claridad suficiente, en los trabajos previos sobre el tema[3-6]. En estas referencias se han discutido las ventajas que presenta este formalismo, aunque sin realizar un tratamiento completo como el reportado aquí.

Para finalizar, cabe señalar que el método puede utilizarse aun para tratar otros aspectos del problema no considerados en este trabajo, completando así la discusión del movimiento de rotación del cuerpo rígido.

REFERENCIAS

1. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Mecánica, Ed. Reverté, S.A. (1965) Cap. VI.
2. H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Reading MA (1959) Chapters 4,5 (ver también la segunda edición de 1980).
3. M.F. Beatty, Am. J. Phys., 34 (1966) 949.
4. D.L. Parker, Am. J. Phys., 37 (1969) 925.
5. D. Hestenes, Am. J. Phys., 39 (1971) 1013.
6. J.L. McCauley Jr., Am. J. Phys., 45 (1977) 94.
7. G.D. Mostow and J.H. Sampson, Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company Inc. (1969).

---

* E.J. Saletan and A.H. Cromer, op. cit.