

EL TEOREMA DE BELL, LA NO-LOCALIDAD Y LAS VARIABLES OCULTAS EN LA MECANICA CUANTICA

H. Arce

Departamento de Física. Facultad de Ciencias, UNAM
Apartado Postal 70-542. 04510 - México, D.F.

(recibido octubre 21, 1982; aceptado mayo 17, 1983)

RESUMEN

El teorema de Bell es un intento de probar por reducción al absurdo la imposibilidad de completar la descripción cuántica con variables ocultas.

En este trabajo se muestra que las variables ocultas no son esenciales al resultado de Bell, y además que en las demostraciones típicas de este teorema está implícita una hipótesis que la mecánica cuántica no satisface para los casos experimentales propuestos.

ABSTRACT

Bell's theorem is an attempt to prove, by reduction ad absurdum, the impossibility of completing a quantum-mechanical description of reality by means of hidden variables.

In this paper we show that hidden variables are not essential to Bell's result, and moreover that in the typical proof of this theorem there is implicit an hypothesis which quantum mechanics does not satisfy for the proposed experimental situations.

1. INTRODUCCION

1.1) Antecedentes generales

Dentro del aprendizaje de algunas ramas de la física, el de la mecánica cuántica (m.c.) es en la mayoría de los casos un proceso dogmatizante y, a menudo, generador de frustraciones para el alumno.

A un nivel intermedio* la experiencia puede parecer mágica, dependiendo de la habilidad del profesor en la introducción de conceptos como "dualidad onda-partícula", "colapso de la función de onda", etc. Al llegar a los cursos avanzados —en los cuales se supone que los nuevos conceptos quedarán claros— el estudiante encuentra ante sus preguntas que debe aprender toda una serie de principios que no admiten explicación. Para ponerlo en las palabras de F. Dyson⁽¹⁾ citadas por A. Landé⁽²⁾:

"El estudiante empieza por aprender las triquiñuelas del oficio... Luego comienza a preocuparse pues no comprende lo que hace. De repente se dice a sí mismo 'comprendo la mecánica cuántica', o más bien, 'comprendo que no hay nada que comprender'".

Parte de la responsabilidad de esta situación la tienen los profesores de las materias en cuestión. Sin embargo, ellos no hacen más que reflejar la posición que al respecto de la m.c. existe en el medio: es una teoría completa, a la cual la concepción ortodoxa da una interpretación adecuada.

Pero, ¿puede darse por terminado el debate sobre la interpretación de la m.c. iniciado por Heisenberg y Schrödinger en 1926?⁽³⁾ Y en caso de ser así, ¿es el saldo favorable a la interpretación ortodoxa? Me parece que es difícil dar una respuesta categórica a estas cuestiones, sobre todo a la luz del teorema de Einstein, Podolsky y Rosen (E-P-R)⁽⁴⁾ sobre la incompletez de la m.c.

Es claro que la vigencia de dos interpretaciones para la m.c. plantea a la enseñanza de esta disciplina problemas complicados; sin embargo, el que se tome una u otra interpretación implica muy diferentes

* Que en la carrera de Física de la UNAM corresponde a Física Moderna I y II.

actitudes filosóficas ante la física, por lo cual me parece que es una situación difícil de obviar.

Sin que sea el objetivo de este artículo el discutir las diferentes interpretaciones de la m.c., ya que al respecto existen excelentes trabajos como el de Ballantine⁽⁵⁾, el de Bunge⁽⁶⁾ o el de Brody *et al.*⁽⁷⁾, quisiera hacer notar que —entre otras características como aquella que la considera una teoría acabada que describe sistemas individuales— la interpretación ortodoxa limita a la m.c. a la descripción de los resultados experimentales, considerando que es imposible trascender este nivel de conocimiento, dando base con esto a posiciones filosóficas que convierten a la m.c. en "sustento científico" de la telepatía⁽⁸⁾ o la llegada de información del futuro⁽⁹⁾. En tanto al aceptar a la m.c. como una teoría incompleta, la interpretación estadística abre la posibilidad de un conocimiento más profundo en la física.

De todo lo anterior me parece claro que es necesario mostrar a los estudiantes que en la m.c. existen varias interpretaciones posibles, así como puntos que no han sido aclarados definitivamente. Uno de los puntos que ha reavivado la controversia a últimas fechas (han aparecido en 1982 al menos siete artículos al respecto en el *Physical Review Letters*^(10,11)) es el teorema de Bell.

1.2) Antecedentes del Teorema de Bell

En el teorema de Bell confluyen dos problemáticas de los fundamentos de la m.c.: el E-P-R y la existencia de variables ocultas (v.o.) que completen la descripción cuántica. Sobre el problema de las v.o.* daremos algunos antecedentes.

En la m.c. la idea de las v.o. apareció desde una etapa temprana. Cuando Born propuso la interpretación estadística de la función de onda, hizo las siguientes consideraciones: "Desde luego, cualquiera

* Para precisar los términos, hablamos de variables ocultas V' , cuando dada una teoría T podemos obtener los valores de las variables de esta teoría, o de funciones de éstas, promediando sobre las V' . Es claro que no podemos conocer las V' en el marco de T ⁽¹⁴⁾.

que esté inconforme con estas ideas, es libre de suponer que existen parámetros adicionales que todavía no son introducidos a la teoría, y que determinan los resultados individuales"⁽¹²⁾.

No obstante, las teorías de v.o. para la m.c. no se desarrollaron durante un lapso relativamente largo, debido principalmente a un trabajo de John von Neumann que demostraba su imposibilidad. von Neumann obtuvo esta demostración como un corolario, en el que se establece que no pueden existir para la m.c. estados de dispersión cero, que corresponderían a ensambles en los cuales los valores de las v.o. estarían fijos.

El punto fue rediscutido por diferentes autores, entre los cuales J.S. Bell⁽¹³⁾ mostró —en base a un modelo de v.o. creado por él— que el trabajo de von Neumann, aunque matemáticamente correcto, tiene entre sus postulados uno que no hay por qué exigir a los estados de dispersión cero: que el valor esperado de la suma de dos (o más) operadores sea igual a la suma de los valores esperados de cada uno.

Existe además otra manera de evadir la demostración de von Neumann que tiene la ventaja de tomarla en positivo⁽¹⁵⁾. Consiste en notar que en el corolario que discutimos las v.o. utilizadas son deterministas, es decir, aquellas en que la situación física hace fijos los valores de las v.o. Desde esta perspectiva lo que el trabajo de von Neumann estaría indicando es que las v.o. en la m.c. tienen naturaleza dispersiva, lo cual por otra parte es enteramente plausible.

Podría esperarse que una vez eliminada la dificultad que representa el corolario de von Neumann, la posibilidad de las v.o. en la m.c. estaría abierta. La realidad no es así, debido al teorema de Bell⁽¹⁶⁾, las v.o. tendrían características no-locales, lo cual las pondría en contradicción con uno de los postulados básicos de la relatividad.

2. TEOREMA DE BELL

2.1) *Demostración*

Para el establecimiento de su teorema, Bell utiliza el dispositivo experimental propuesto por Bohm para el E-P-R. Pensemos en un sistema de spin cero que decae naturalmente en dos partículas. En esta si-

tuación podemos medir la proyección de los spines de cada una de las partículas (con la ayuda de un aparato Stern-Gerlach o algún otro dispositivo) en direcciones arbitrarias \vec{a} y \vec{b} . Bautizamos a los resultados como A y B, que convenimos valgan ± 1 , dependiendo de si las proyecciones son paralelas o antiparalelas a las direcciones correspondientes (Fig. 1).

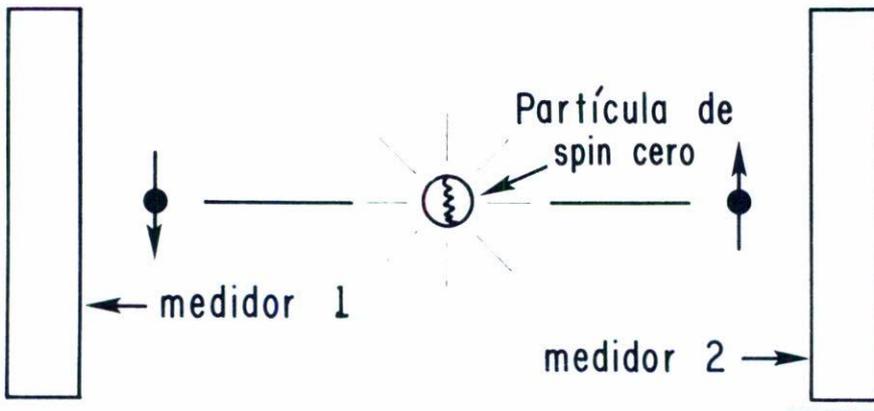


Fig. 1 Esquema sobresimplificado del experimento de Bohm para el E-P-R.

Si antes de hacer las medidas nosotros quisiéramos predecirlas, no estaríamos en condiciones de hacerlo, puesto que la m.c. no puede dar predicciones exactas de eventos individuales. En base a esto, Bell propone estudiar qué sucede al completar la m.c. introduciendo una variable oculta (o conjunto de variables ocultas) " λ ", que agregada a la descripción anterior de cada sistema, nos determine el resultado de las medidas. Esta última proposición la podemos introducir en la notación substituyendo A y B por $A(\vec{a}, \lambda)$ y $B(\vec{b}, \lambda)$.

Es importante suponer que las medidas tienen un carácter local, esto es, que el resultado A del primer medidor no depende de la direc-

ción \bar{b} del segundo, y que el resultado B del segundo medidor no depende de la dirección \bar{a} del primero. A esta hipótesis que estará implícita en la demostración, la llamaremos hipótesis de localidad.

Planteadas las hipótesis anteriores, suponemos que se miden para muchos pares de partículas las proyecciones de sus spines en las direcciones \bar{a} y \bar{b} .

Para manejar los resultados, se obtiene el coeficiente de correlación entre las medidas tomadas a las partículas 1's y las medidas tomadas a las partículas 2's. Este coeficiente para una serie de N experimentos tendría la siguiente forma:

$$C_{ab} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) \quad .$$

Si el número de experimentos es muy grande y la descripción adecuada:

$$C_{ab} \longrightarrow \gamma_{ab} = \int_{\Gamma} A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad * \quad . \quad (2.1.1)$$

Nos planteamos ahora establecer relaciones entre los coeficientes, para lo cual medimos proyecciones en \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} , de tal manera que podamos obtener γ_{ab} y γ_{ac} . Con estos coeficientes tomaremos su diferencia:

$$\gamma_{ab} - \gamma_{ac} = \int_{\Gamma} A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda - \int_{\Gamma} A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad , \quad (2.1.2)$$

y usando que $B^2(\bar{b}, \lambda) = 1$, reescribimos el segundo término como

$$\int_{\Gamma} A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) B(\bar{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad ,$$

lo que nos permite establecer que

$$\gamma_{ab} - \gamma_{ac} = \int A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) [1 - B(\bar{b}, \lambda) B(\bar{c}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \quad ; \quad (2.1.3)$$

* Donde $\rho(\lambda)$ es la distribución que obedecen los λ 's y Γ es su espacio.

luego, tomando valores absolutos y usando la desigualdad del triángulo, esta última relación nos permite plantear que

$$|\gamma_{ab} - \gamma_{ac}| \leq \int_{\Gamma} |A(\bar{a}, \lambda)B(\bar{b}, \lambda)| |1 - B(\bar{b}, \lambda)B(\bar{c}, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda \quad , \quad (2.1.4)$$

y como A y B valen ± 1 , tenemos

$$|\gamma_{ab} - \gamma_{ac}| \leq 1 - \int_{\Gamma} B(\bar{b}, \lambda)B(\bar{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad . \quad (2.1.5)$$

Ahora debemos convertir la última integral en un coeficiente de correlación. Para lograr esto recordemos que partimos de un estado de spin cero, de tal manera que si medimos la proyección del spin en la misma dirección para ambas subpartículas, los resultados tendrán signos opuestos:

$$B(\bar{b}, \lambda) = -A(\bar{b}, \lambda) \quad . \quad (2.1.6)$$

Utilizando (2.1.6), podemos cambiar el integrando de (2.1.5):

$$\int_{\Gamma} B(\bar{b}, \lambda)B(\bar{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda = - \int_{\Gamma} A(\bar{b}, \lambda)B(\bar{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad , \quad (2.1.7)$$

y llegamos a la desigualdad de Bell:

$$|\gamma_{ab} - \gamma_{ac}| \leq 1 + \gamma_{bc} \quad . \quad (2.1.8)$$

Esta fue la primera de toda una serie de relaciones que al ser comparadas con la m.c. llevaron a contradicciones, lo cual inmediatamente conduce a refutar la hipótesis de trabajo. Antes de discutir esto último, compararemos la desigualdad (2.1.8) con la m.c.

2.2) Comparación entre la mecánica cuántica y la desigualdad de Bell

Supongamos que nuestro sistema físico es descrito por una función de onda Ψ . Esto quiere decir que Ψ nos describe un conjunto de sistemas (o ensamble) de dos partículas preparadas en las mismas condicio-

nes* y al cual representamos por el ket $|\psi\rangle$. Como queremos averiguar una propiedad estadística de todo el ensamble, buscamos el valor esperado del operador correspondiente a esa propiedad. En este caso el operador es el producto de las variables de proyección de spin, para la partícula 1 en la dirección \vec{a} y de la proyección del spin de 2 en la dirección \vec{b} :

$$\gamma_{ab} = \langle \psi | (\hat{S}_1 \cdot \vec{a}) \otimes (\hat{S}_2 \cdot \vec{b}) | \psi \rangle \quad .$$

Para facilitar el cálculo de este coeficiente, supongamos que \vec{a} y \vec{b} son coplanares y unitarios, y además que \vec{a} coincide con el eje z, tal como se representa en la Fig. 2.

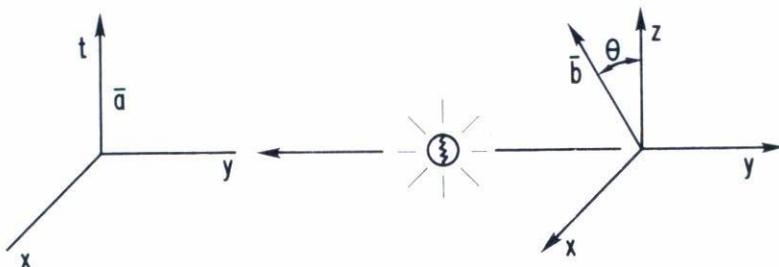


Fig. 2 Ubicación del sistema de referencia en que se realiza el cálculo de γ_{ab} .

El coeficiente de correlación quedará como

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} &= \langle \psi | \hat{S}_{1z} \otimes (\sin \theta \hat{S}_{2x} + \cos \theta \hat{S}_{2z}) | \psi \rangle \\ &= \sin \theta \langle \psi | \hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2x} | \psi \rangle + \cos \theta \langle \psi | \hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2z} | \psi \rangle \quad . \end{aligned}$$

Substituyendo Ψ por la función de onda correspondiente a un sistema de dos partículas acopladas con spin cero, y los operadores de spin por las matrices adecuadas, se obtienen los siguientes valores:

* Nos estamos apegando a la interpretación estadística de la función de onda.

$$\langle \Psi | \hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2x} | \Psi \rangle = 0 \quad , \quad \langle \Psi | \hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2z} | \Psi \rangle = -1 \quad ;$$

de tal manera que el coeficiente de correlación queda como

$$\gamma_{ab} = -\cos \theta_{ab} \quad .$$

Si substituímos este resultado en (2.1.8) obtenemos

$$| -\cos \theta_{ab} + \cos \theta_{ac} | \leq 1 - \cos \theta_{bc} \quad .$$

Esta desigualdad no se cumple para todos los valores de los ángulos. En particular podemos proponer que $\theta_{ab} = \pi/2$, $\theta_{ac} = \theta$ y $\theta_{bc} = \pi/2 - \theta$, que representaría el arreglo de vectores (Fig. 3).

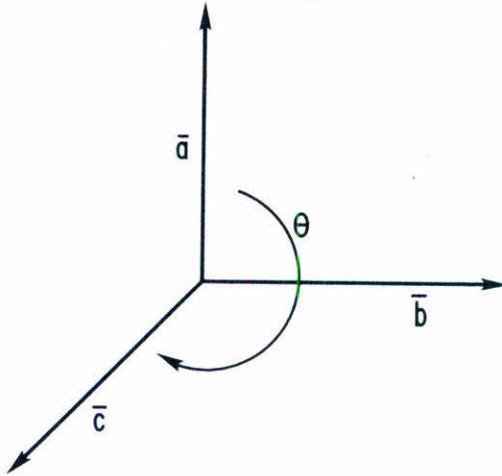


Fig. 3 Con esta disposición vectorial, la desigualdad de Bell se viola para $\theta \in (\pi, 2\pi)$.

Bajo estas condiciones la desigualdad de Bell quedaría como

$$|\cos \theta| \leq 1 - \sin \theta \quad ,$$

que se viola para $\theta \in (\pi, 2\pi)$, con lo que hemos llegado a una contradicción.

Bell concluye de esta contradicción que no se puede completar la m.c. con variables ocultas locales. Así, en caso de existir las va-

riables ocultas, deben tener una naturaleza tal que los resultados de un medidor dependan instantáneamente de la posición del otro. Esto obligaría a la teoría que las describiese a no ser invariante bajo transformaciones de Lorentz. Se ha generado alguna discusión en torno a este punto⁽¹⁷⁾, pero como veremos en la siguiente sección, ésta no es necesaria con respecto a las v.o., porque estas variables no son el motivo de la contradicción encontrada por Bell.

3. TEOREMA DE BELL SIN VARIABLES OCULTAS

Como podrá comprobar el lector, en la sección anterior hay tres hipótesis explícitamente formuladas en el teorema de Bell: a) La existencia de v.o. que determinen los resultados individuales; b) que exista localidad; c) que los resultados experimentales coincidan estadísticamente con la m.c.

Utilizando el esquema experimental de Bell, eliminaremos la hipótesis de v.o., llegando nuevamente a una contradicción, para lo cual nos apoyaremos en un trabajo de Peres⁽¹⁸⁾.

Supongamos que se miden las proyecciones del spin en 1 para las direcciones \bar{a} y \bar{a}' , y en 2 para las direcciones \bar{b} y \bar{b}' . Tendremos entonces una colección de 4 resultados que se denotarán como $A_{\bar{a}}$, $A_{\bar{a}'}$, $A_{\bar{b}}$ y $A_{\bar{b}'}$, respectivamente. Debido a que los resultados sólo pueden tomar los valores ± 1 , existirán tan sólo 16 posibles combinaciones de resultados experimentales (que hemos enlistado en el Apéndice). Construyamos ahora la siguiente expresión:

$$A_{\bar{a}} B_{\bar{b}} + A_{\bar{a}} B_{\bar{b}'} + A_{\bar{a}'} B_{\bar{b}} - A_{\bar{a}'} B_{\bar{b}'} \quad . \quad (3.1.1)$$

Substituyendo cualquiera de las 16 posibles combinaciones, encontramos que la expresión (3.1.1) tan sólo puede valer ± 2 :

$$A_{\bar{a}} B_{\bar{b}} + A_{\bar{a}} B_{\bar{b}'} + A_{\bar{a}'} B_{\bar{b}} - A_{\bar{a}'} B_{\bar{b}'} = \pm 2 \quad . \quad (3.1.2)$$

Tomando valores absolutos:

$$|A_{\bar{a}} B_{\bar{b}} + A_{\bar{a}} B_{\bar{b}'} + A_{\bar{a}'} B_{\bar{b}} - A_{\bar{a}'} B_{\bar{b}'}| = 2 \quad , \quad (3.1.3)$$

y si realizamos un número de experimentos tal que encontremos N colecciones de resultados —cada uno de los cuales etiquetaremos por el índice j — podemos sumarlos:

$$\sum_{j=1}^N |A_{a_j} B_{b_j} + A_{a_j} B_{b'_j} + A_{a'_j} B_{b_j} - A_{a'_j} B_{b'_j}| = 2N_j \quad (3.1.4)$$

Luego, por la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (A_{a_j} B_{b_j} + A_{a_j} B_{b'_j} + A_{a'_j} B_{b_j} - A_{a'_j} B_{b'_j}) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |A_{a_j} B_{b_j} + A_{a_j} B_{b'_j} + A_{a'_j} B_{b_j} - A_{a'_j} B_{b'_j}| \quad , \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

de lo que se concluye que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a_j} B_{b_j} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a_j} B_{b'_j} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a'_j} B_{b_j} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a'_j} B_{b'_j} \right| \leq 2 \quad (3.1.6)$$

Haciendo ahora que N sea muy grande:

$$|\gamma_{ab} + \gamma_{ab'} + \gamma_{a'b} - \gamma_{a'b'}| \leq 2 \quad , \quad (3.1.7)$$

y colocando en lugar de las γ 's los coeficientes predichos por la m.c. llegamos a una contradicción, ya que existen ángulos para los cuales la desigualdad (3.1.7) no se cumple*, de donde se infiere que las v.o. no son la fuente de contradicción en el teorema de Bell pues hemos obtenido los mismos resultados sin apelar a ellas.

Sin embargo nos encontramos ante una situación en la que debemos reconocer como falsa alguna de las dos hipótesis restantes. Como existen experimentos que (según algunos autores) confirman al coeficiente de correlación cuántico como una adecuada descripción para este caso,

* Pueden encontrarse desigualdades con cualquier número de ángulos mayor o igual a tres. F. Selleri encontró un método para hacerlo⁽¹⁹⁾ que además recupera las desigualdades ya encontradas.

es común afirmar que la hipótesis de localidad es falsa *.

Esta conclusión es muy fuerte. Además de contradecir un postulado de la teoría de la relatividad, pone en dificultades nuestra noción de sistema, básica para toda la física **.

Ante estas dificultades parece claro que más que intentar eliminar hipótesis, se debe estudiar cuidadosamente la demostración de este teorema. Aunque no hemos realizado un análisis exhaustivo podemos decir que existe una hipótesis implícita en la demostración, que no es cumplida por la m.c. en las condiciones experimentales propuestas.

4. LA HIPOTESIS IMPLICITA

4.1) *En la demostración sin variables ocultas*

El sujeto principal del teorema de Bell es el coeficiente de correlación.

El coeficiente se construye a partir de las medidas sobre un experimento que se repite N veces: al decaer el sistema de spin cero, medimos la proyección del spin en una dirección para la partícula 1 y en otra para la partícula 2. Una vez obtenidos estos resultados los multiplicamos entre sí, y el producto es el primer término de nuestro coeficiente de correlación. Repetimos este procedimiento N veces, con lo cual obtenemos N productos que sumamos y dividimos entre N .

De lo anterior se advierte que es esencial para el coeficiente de correlación que las medidas que se multipliquen entre sí vayan apareadas, esto es, que provengan de la misma partícula de spin cero, lo cual es natural, pues estamos estudiando el comportamiento estadístico de las proyecciones del spin, medidas en partículas que formaban un solo

* Esta situación de no-localidad ha sido discutida en la literatura llevando a desarrollos interesantes^(20,21).

** Para ver esto, supongamos que aislamos cierta parte del universo en donde deseamos hacer experimentos con algunas partículas. Debido a que el universo es dinámico, estas partículas interactuaron con otras en el pasado, de tal manera que si alguien está haciendo experimentos con esas partículas, debido a la no-localidad, nuestros resultados dependen de ese alguien arbitrariamente lejano.

sistema. Este hecho es de vital importancia.

En la demostración de la sección 3, tenemos en la desigualdad final cuatro coeficientes de correlación:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a_j} B_{b_j} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a_j} B_{b'_j} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a'_j} B_{b_j} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{a'_j} B_{b'_j} \right| \leq 2 \quad .$$

Analizando el primer coeficiente, observamos que cada A_a está asociada con su correspondiente B_b , lo cual está asegurado por el índice j . En el segundo coeficiente nos encontramos también que cada A_a está asociada con su correspondiente $B_{b'}$, pero el hecho interesante es que la A_a del primer coeficiente y la del segundo son necesariamente la misma, sumando por sumando (j por j), lo cual no tan sólo está asegurado por el índice, sino porque sin este hecho, no es válida la relación (3.1.2) en la que está basada toda la demostración.

Luego cada proyección en \bar{a} para la subpartícula 1 está asociada con dos proyecciones para la subpartícula 2, que necesariamente tuvieron que provenir de la misma partícula. Esto es, se debe poder medir la proyección del spin de una partícula en dos direcciones diferentes al mismo tiempo. Esta condición, que llamaron de "medibilidad conjunta" quienes primero la observaron⁽²²⁾, no puede ser asegurada por la m.c.

La hipótesis que hemos encontrado en la demostración de Peres es común a todas las demostraciones del teorema de Bell. Para confirmar esto revisaremos en seguida la demostración original del teorema de Bell discutida en la sección 2*.

4.2) La hipótesis implícita en la demostración con variables ocultas

En la sección 2 lo primero que notamos es que el coeficiente de correlación tiene la forma (2.1.1), en la cual se ha introducido el símbolo λ para poner de manifiesto la hipótesis de v.o. Esto no altera

* Restaría, para completar el análisis de las tres demostraciones típicas que del teorema existen, que estudiáramos la de Holt y Pipkin⁽²³⁾, pero el lector interesado puede hacerlo leyendo el artículo que sobre el tema escribieron Brody y de la Peña en 1979⁽²²⁾.

la discusión que hemos realizado al principio de 4.1 sobre el coeficiente de correlación. Por lo anterior pasaremos directamente a discutir la demostración.

El primer paso es tomar la diferencia entre γ_{ab} y γ_{ac} (Ec. (2.1.1)). En el laboratorio esta expresión la pudimos obtener de dos series experimentales, o dicho de otra forma, pudimos realizar un número N de experimentos (N muy grande) en los cuales medimos las proyecciones en \bar{a} y \bar{b} , y otros N experimentos donde se midiesen las proyecciones en \bar{a} y en \bar{c} . Parecería entonces que la $A(\bar{a}, \lambda)$ en el coeficiente γ_{ab} , no tiene por qué ser la misma que la $A(\bar{a}, \lambda)$ en el coeficiente γ_{ac} .

Sin embargo, en el siguiente paso (Ec. (2.1.3)) hacemos una factorización que obliga a que la $A(\bar{a}, \lambda)$ sea la misma en ambos coeficientes. Dado que el primer coeficiente asocia $A(\bar{a}, \lambda)$ con $B(\bar{b}, \lambda)$ y el segundo asocia $A(\bar{a}, \lambda)$ con $B(\bar{c}, \lambda)$, tenemos que la $A(\bar{a}, \lambda)$ está aparejada a dos medidas en la partícula 2. De aquí estaríamos tentados a decir que para que esto suceda debe cumplirse la medibilidad conjunta, pero en este caso hay que tener más cuidado.

Observando con atención las hipótesis del trabajo de Bell, notamos que al introducir λ se completa la descripción del sistema, por lo que una vez dado \bar{a} , y un valor de λ , $A(\bar{a}, \lambda)$ queda perfectamente determinada sin que la afecte la medida que realicemos en el sistema 2 (debido a la hipótesis de localidad). Lo que asocia a $A(\bar{a}, \lambda)$ dos medidas no es la hipótesis de medibilidad conjunta, sino el valor de la variable λ .

Pasemos a la situación en el laboratorio: tomamos las proyecciones en la dirección \bar{a} en la primera partícula y \bar{b} en la segunda, en las que la variable λ es la misma por venir de una misma partícula de spin cero; luego intentamos medir las proyecciones para \bar{a} en otra partícula 1 y para \bar{c} en otra partícula 2 (que forman un par diferente al anterior), pero con el mismo valor de λ para asegurar la factorización (2.1.3). Nos encontramos con que no podemos hacer esto último por no tener control sobre la variable λ , ya que es una variable oculta (sobre la que no tenemos teoría, ni posibilidad de conocer su valor). La única forma de asegurar que la variable λ tiene el mismo valor para las dos pa-

rejas de medidas es realizarlas sobre la misma pareja de partículas, lo cual sólo es posible si se cumple la condición de medibilidad conjunta. En cuanto a la situación teórica es claro que nos bastaría considerar una λ continua para que la probabilidad de repetir el mismo valor en una secuencia finita de pruebas sea prácticamente cero.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

5.1) Acerca de la situación experimental

Desde la aparición del teorema de Bell se ha realizado un esfuerzo relativamente importante para comprobarlo experimentalmente. El objetivo que se persigue es discriminar entre la validez de la desigualdad de Bell o la de la mecánica cuántica, dando por hecho que el teorema es correcto y haciendo las modificaciones necesarias para el manejo de los datos. Según Clauser y Shimony, hasta 1978⁽²⁴⁾ se realizaron nueve experimentos a los que habría que agregar el realizado recientemente por Aspect⁽¹¹⁾, cinco de éstos han utilizado fotones provenientes de la desexcitación de algún gas, tomándose como la propiedad equivalente al spin, la polarización, que se observa con polarizadores ópticos. Un esquema muy simplificado de este experimento sería el mostrado en la Fig. 4.

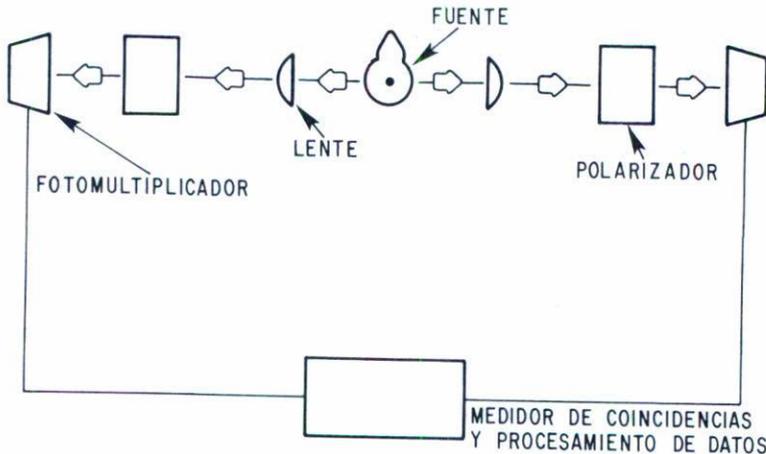


Fig. 4 Esquema experimental para fotones. La fuente generalmente es de mercurio.

Otros cuatro experimentos han utilizado fotones de alta energía provenientes de la aniquilación positrón-electrón calculando su polarización a partir de las medidas que se hacen sobre la dispersión en plástico de centelleo. Por último, se ha realizado un experimento con protones, en el que se observa la dispersión de éstos en láminas de carbón.

En cuanto a sus resultados, ocho de estos experimentos coinciden con la m.c. y dos con la desigualdad de Bell. Sin embargo, como hemos mostrado en la sección 3, las v.o. no son la esencia del resultado de Bell, por lo cual su posible existencia no es afectada por los anteriores resultados experimentales. Por otra parte, estos últimos necesitan de hipótesis adicionales que han recibido severas críticas⁽²⁵⁾.

5.2) Conclusiones

A pesar de su diversidad, todas las experiencias que se han realizado para comprobar el teorema de Bell tienen una característica en común: les resulta imposible tomar en cuenta la hipótesis de medibilidad conjunta, pues al medir la polarización o la proyección del spin en una dirección, el estado del sistema resulta modificado; en particular, para el experimento propuesto por Bell al pasar la partícula por el campo del aparato medidor (un Stern-Gerlach), se orienta con éste, perdiendo sentido el realizar otra medida en la misma partícula. De lo anterior concluimos que los experimentos hasta hoy realizados son irrelevantes con respecto a las v.o. y la no-localidad en la m.c.

Podría argumentarse que el problema es de equipo, y que mientras no se cuente con un aparato capaz de hacer las medidas conjuntas que se requieren, el teorema de Bell es un impedimento teórico para la localidad en la m.c. Pero para argumentar consistentemente en esta dirección, habría que demostrar a partir de la propia m.c. que el sistema físico que se propone cumple con la condición de medibilidad conjunta. Esto no se ha realizado hasta la fecha.

En resumen, después de estudiar con un poco de atención el teorema de Bell, se nota que a pesar de ser matemáticamente correcto, las conclusiones que de él se obtienen son falsas, debido al poco cuidado

que se pone en la discusión de su contenido físico.

5.3) Perspectivas

El aspecto positivo del trabajo de Bell consiste en que su estudio ha motivado nuevos problemas, cuya solución profundizará nuestro conocimiento de la m.c. Al establecer las conclusiones de la sección anterior llegamos naturalmente a varias preguntas: ¿Qué significa la medibilidad conjunta? ¿Será posible diseñar algún tipo de dispositivos para efectuar ese tipo de medidas en microsistemas? ¿Existen sistemas clásicos en que no sea posible hacer "medidas conjuntas"? ¿Cuál es el reflejo teórico de la no-medibilidad conjunta en la teoría cuántica? Podemos enfocar la solución a estas preguntas desde diferentes ángulos, enriqueciendo con ello aspectos relevantes de la teoría, así como la discusión de sus interpretaciones. Por ejemplo, se puede retomar —en este contexto— la discusión de las desigualdades de Heisenberg, o indagar en la naturaleza del spin. Como eso queda fuera de las posibilidades de este artículo, sólo haremos mención de dos líneas de trabajo: la discusión sobre los vectores de estado de segundo tipo y la búsqueda de las características de la función de correlación que cumple con el teorema de Bell.

Capasso *et al.*⁽²⁶⁾ y Baracca *et al.*⁽²⁷⁾ estudiaron la desigualdad de Bell desde un punto de vista formal, aislando el elemento responsable de la violación de esta desigualdad. Su análisis parte del coeficiente de correlación, que en general puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\langle \Psi | \hat{A}^I \otimes \hat{B}^{II} | \Psi \rangle, \quad (5.3.1)$$

donde \hat{A}^I es el operador correspondiente a una observable del subsistema 1 y \hat{B}^{II} es el operador correspondiente al subsistema 2. Por tratarse de un sistema de dos partes, el vector de estado es

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |\phi_i\rangle |\xi_j\rangle, \quad (5.3.2)$$

correspondiendo $|\phi_i\rangle$ al vector que describe al subsistema 1, y $|\xi_j\rangle$ el que describe al subsistema 2. Lo interesante surge al considerar que

pueden tenerse dos tipos de vectores de estado $|\psi\rangle$, dependiendo de si el coeficiente C_{ij} es factorizable como $C_i C_j'$. En caso de ser así, es fácil mostrar que el coeficiente (5.3.1) puede escribirse como

$$\langle \psi | \hat{A}^I \otimes \hat{B}^{II} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^I | \psi \rangle \langle \xi | \hat{B}^{II} | \xi \rangle, \quad (5.3.3)$$

teniendo un término adicional si no es factorizable:

$$\langle \psi | \hat{A}^I \otimes \hat{B}^{II} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^I | \psi \rangle \langle \xi | \hat{B}^{II} | \xi \rangle + \Pi(\psi_i, \xi_j). \quad (5.3.4)$$

A los vectores de estado en los cuales se puede factorizar el término C_{ij} , se les conoce como vectores de estado del primer tipo, siendo los de segundo tipo en los que no se puede hacer esto. A partir de la propiedad (5.3.3) y de algunas hipótesis adicionales, Baracca *et al.* pueden obtener la desigualdad de Bell, mostrando además que algunos vectores de estado de segundo tipo no la cumplen.

Es claro que esta violación es debida al término $\Pi(\psi_i, \xi_j)$ de (5.3.4), con lo cual se identifica el elemento al que habría que adjudicar desde un punto de vista formal el resultado de Bell. El problema que se abre es entender por qué hacen falta vectores de estado de segundo tipo para describir ciertos sistemas. Una vía de ataque sería estudiar los procesos de simetrización y antisimetrización de la función de onda.

El segundo problema al que hicimos referencia aparece al estudiar los resultados obtenidos por F. Selleri en 1978⁽¹⁹⁾. Este autor encuentra un procedimiento para generar todas las desigualdades de Bell conocidas, así como desigualdades con un número mayor de coeficientes de correlación. Su método le permite encontrar una serie de características geométricas de la función de correlación que cumple con la desigualdad de Bell:

- 1.- Es simétrica con respecto a $\theta = 0$.
- 2.- En $\theta = \pi/2$ vale 0.
- 3.- Es antisimétrica con respecto a $\theta = \pi/2$.
- 4.- Es simétrica alrededor de π .
- 5.- La curva que describe la función de correlación nunca es

mayor que la recta

$$R(\theta) = -1 + [\gamma'(\theta)] \theta .$$

6.- La derivada de la función de correlación en $\theta = 0$ es mayor que $2/\pi$.

Apoyándose en estas aseveraciones se puede delimitar la región del plano en la que evolucionaría el coeficiente de correlación. Usando hipótesis adicionales se pueden bosquejar algunas gráficas, lo cual muestra que el trabajo de Selleri abre algunas posibilidades para precisar el tipo de coeficiente de correlación que cumple con la desigualdad de Bell.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la paciencia de Tomás Brody y Luis de la Peña, que con sus discusiones le permitieron la comprensión del tema, así como los valiosos comentarios de Gustavo Martínez y Rafael Martínez en la elaboración final del manuscrito.

APENDICE

Conjunto	Aa	Aa'	Bb	Bb'
1.-	+1	+1	+1	+1
2.-	+1	+1	+1	-1
3.-	+1	+1	-1	+1
4.-	+1	+1	-1	-1
5.-	+1	-1	+1	+1
6.-	+1	-1	+1	-1
7.-	+1	-1	-1	+1
8.-	+1	-1	-1	-1
9.-	-1	+1	+1	+1
10.-	-1	+1	+1	-1
11.-	-1	+1	-1	+1
12.-	-1	+1	-1	-1
13.-	-1	-1	+1	+1
14.-	-1	-1	+1	-1
15.-	-1	-1	-1	+1
16.-	-1	-1	-1	-1

REFERENCIAS

- 1.- F. Dyson, *Scient. Amer.*, septiembre de 1958.
- 2.- A. Landé, Nuevos Fundamentos de la Mecánica Cuántica, Tecnos, Madrid (1968).
- 3.- M. Jammer, The Conceptual Development of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1966).
- 4.- A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, *Phys. Rev.*, 47 (1953) 777.
- 5.- L. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.*, 42 (1970) 358.
- 6.- M. Bunge, *Am. J. Phys.*, 24 (1956) 272.
- 7.- T. Brody, R. Cid, J.L. Jiménez, D. Levi, J.R. Martínez, P. Pereyra, R. Rechtman y M. Rosales, *Rev. Mex. Fis.*, 25 (1976) E 31.
- 8.- *Sunday Times*, 24 de abril de 1980.
- 9.- *Le Monde*, 24 de octubre de 1979.
- 10.- A. Fine, *Phys. Rev. Lett.*, 48 (1982) 291; A. Aspect, P. Grangier y G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982) 91; A. Garg y N.D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982) 901; A. Garg y N.D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982) 1220; P.H. Eberhard, *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982) 1474; H.P. Stapp, *Phys. Rev. Lett.*, 44 (1982) 1470.
- 11.- A. Aspect, J. Dalibard y G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982) 1804.
- 12.- M. Jammer, The Philosophy of Quantum Mechanics, Wiley and Sons Inc., New York (1974).
- 13.- J. Bell, *Physics*, 1 (1964) 195.
- 14.- E.C. Stern, Tesis Profesional, Fac. de Ciencias, UNAM (1975).
- 15.- T. Brody, Preprint IFUNAM 80-18.
- 16.- J. Bell, *Rev. Mod. Phys.*, 38 (1966) 447.
- 17.- T. Nordin, Lund Preprint (Philosophy Department) (1977).
- 18.- A. Peres, *Amer. J. Phys.* 46 (1978) 745.
- 19.- F. Selleri, *Foud. Phys.*, 8 (1978) 103.
- 20.- G. Ghirardi, Preprint International Centre of Theoretical Physics, Trieste, Italia.
- 21.- P. Eberhard, *Nuovo Cim.*, 468 (1978) 392.
- 22.- T. Brody y L. de la Peña, *Nuovo Cim.*, 54 B (1974) 455.
- 23.- R. Holt y F. Pipkin, Harvard Preprint (1973).
- 24.- J.F. Clauser y A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.*, 41 (1978) 1881.
- 25.- T.W. Marshall, Preprint Laboratorio de Química Cuántica, París, Francia.
- 26.- V. Capasso, D. Fortunato y F. Selleri, *Int. J. Theor. Phys.*, 7 (1973) 319.
- 27.- A. Baracca, S. Bergia, R. Livi y M. Restignoli, *Int. J. Theor. Phys.*, 15 (1976) 473.