

Estructura de órbitas periódicas en el problema de Störmer: periodo 3

Lidia Jiménez Lara

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa
Apartado postal 55-534, 09340 México D.F.

(Recibido el 18 de julio de 1990; aceptado el 17 de julio de 1991)

Resumen. Se utilizan las líneas de simetría en el plano de Poincaré (ecuatorial) para estudiar las órbitas periódicas en el problema de Störmer. Se enfoca el estudio a las órbitas periódicas que cruzan el plano de Poincaré tres veces. El seguimiento de una línea de simetría particular (Γ_3) al aumentar el parámetro γ_1 de Störmer (que es esencialmente el valor del momento angular de la partícula en la dirección del dipolo) permite estudiar la aparición y desaparición de las órbitas de periodo tres, obteniéndose así su estructura y clasificación en familias en forma global.

PACS: 03.20.+i; 05.45.+b

1. Introducción

El problema de Störmer consiste en estudiar el movimiento de partículas cargadas en el campo de un dipolo magnético [1]. Sobre este problema hay una gran cantidad de literatura dada su antigüedad y su conexión con los cinturones de Van Allen y la radiación cósmica. En las referencias se encuentran algunas de las más importantes.

El estudio de este problema es difícil debido a que es no integrable [2]. Vallarta y Lemaitre [3,4] estudiaron el problema de Störmer en conexión con la radiación cósmica. Graef y Kusaka [5] resolvieron el caso ecuatorial explícitamente en términos de funciones elípticas.

Es frecuente restringir el estudio del problema de Störmer al movimiento en el plano meridiano usando el hecho de que la variable azimutal es ignorable en el hamiltoniano (véase la Sec. 2). Puede entonces utilizarse la técnica de las líneas de simetría introducida por De Vogelaere [6] para calcular las órbitas periódicas. Esta técnica se ha utilizado recientemente en varios problemas con dos grados de libertad y una constante de movimiento [7,13].

Markellos y sus colaboradores estudiaron el movimiento en el plano meridiano [14,19]. Ellos obtuvieron órbitas periódicas simétricas simples y múltiples, así como sus parámetros de estabilidad, e hicieron una clasificación en familias. Estudiaron también la llamada familia asimétrica principal [22].

En la Ref. [13] se presenta un análisis de la dinámica de ciertas líneas llamadas de simetría para entender la clasificación de las órbitas periódicas en el problema de Störmer, haciendo una correspondencia con los trabajos de Markellos. En ese

trabajo queda manifiesta la importancia de las líneas de simetría, ya que sintetiza muchos trabajos anteriores sobre aparición y bifurcaciones de órbitas periódicas, así como su clasificación en familias, la cual resulta bastante natural.

Este trabajo es una continuación del de Jiménez y Piña [13] en el que se analiza la dinámica de otra línea de simetría (Γ_3) al cambiar un parámetro para entender la estructura de las órbitas de periodo 3 y su clasificación en familias. Por cuestiones de completéz se dará primero un breve resumen: en la Sec. 2 se presentan las ecuaciones de movimiento, y en la Sec. 3 se introducen las líneas de simetría y sus propiedades más importantes. En la cuarta sección se presenta la dinámica de las líneas Γ_1 y Γ_n para entender la bifurcación de un periodo n alrededor del periodo 1. Finalmente, en la última sección se estudia la dinámica de la línea Γ_3 en el plano de Poincaré al aumentar el parámetro γ_1 . Esto permite entender la estructura global de las órbitas de periodo 3, que se presenta en el espacio de parámetros.

2. Ecuaciones de movimiento

Considérese una carga q de masa m moviéndose en el campo de un dipolo magnético de momento dipolar \mathbf{M} . El hamiltoniano es

$$H_1 = \frac{1}{2m}[\mathbf{P} - q\mathbf{A}]^2,$$

con $\mathbf{P} - q\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{r}}$, donde \mathbf{r} es el vector de posición de la carga medido desde el dipolo (supuesto puntual), \mathbf{P} es su momento conjugado y $\mathbf{A} = (\mathbf{M} \times \mathbf{r})/r^3$ es el potencial del dipolo con momento magnético dipolar \mathbf{M} .

Introduciendo la transformación a variables adimensionales:

$$\mathbf{r} = u\mathbf{C}_1, \quad vt = s\mathbf{C}_1, \quad (1)$$

donde

$$C_1 = \sqrt{\frac{M|q|}{mv}},$$

se obtiene el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \left[p_u^2 + \frac{p_\lambda^2}{u^2} + \frac{(p_\varphi - \cos^2(\lambda)/u)^2}{u^2 \cos^2(\lambda)} \right] = \frac{1}{2}, \quad (2)$$

escrito en coordenadas esféricas con la dirección del eje z en la dirección del momento magnético dipolar (Fig. 1) y cuyo valor numérico es $1/2$.

Se tienen 2 constantes de movimiento: H y p_φ . El movimiento en φ está resuelto hasta una cuadratura:

$$p_\varphi = u^2 \cos^2(\lambda) \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\cos^2(\lambda)}{u} = 2\gamma_1. \quad (3)$$

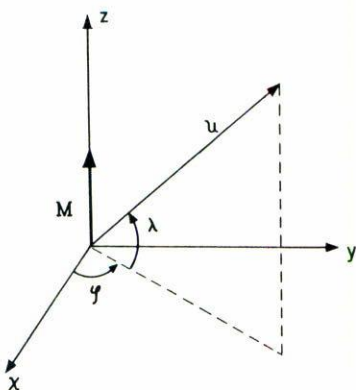


FIGURA 1. Coordenadas de la carga en el campo magnético dipolar.

A p_φ se le denota por $2\gamma_1$, donde γ_1 se conoce como el parámetro de Störmer.

Si el movimiento se limita al plano ecuatorial ($\lambda = 0$) el sistema es integrable y la solución se expresa en términos de funciones elípticas [5]. Por otro lado, se puede pensar que el hamiltoniano en la Ec. (2) solo depende de las variables u y λ y resolver el problema equivalente en el plano meridiano, con una constante de movimiento: H . El espacio de configuración será el plano meridiano que en coordenadas esféricas estará definido por las coordenadas (u, λ) y en cilíndricas por (ρ, z) , donde $\rho = u \cos \lambda$ y $z = u \sin \lambda$.

El movimiento de la partícula cargada estará determinado por el hamiltoniano en la Ec. (2) donde el potencial es

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\varphi}{u \cos \lambda} - \frac{\cos \lambda}{u^2} \right)^2. \tag{4}$$

Puesto que el objeto de este estudio son las órbitas periódicas, sólo se considerará el caso $\gamma_1 > 0$, es decir, cuando la fuerza radial es atractiva. V es no negativa y toma el valor cero cuando $2\gamma_1 u = \cos^2 \lambda$, que es la ecuación de una línea de campo conocida como el *thalweg* (valle) desde los trabajos originales de Störmer.

Se observa también que cuando la velocidad de la partícula es cero, el potencial toma el valor 1/2, obteniéndose las curvas de velocidad cero:

$$\frac{2\gamma_1 u}{\cos \lambda} - \cos \lambda = \epsilon u^2, \tag{5}$$

donde $\epsilon = \pm 1$. Si $w = 2\gamma_1 u$ y $b = 1/(2\gamma_1)^2$, entonces

$$\epsilon b w^2 - \frac{w}{\cos \lambda} + \cos \lambda = 0, \tag{6}$$

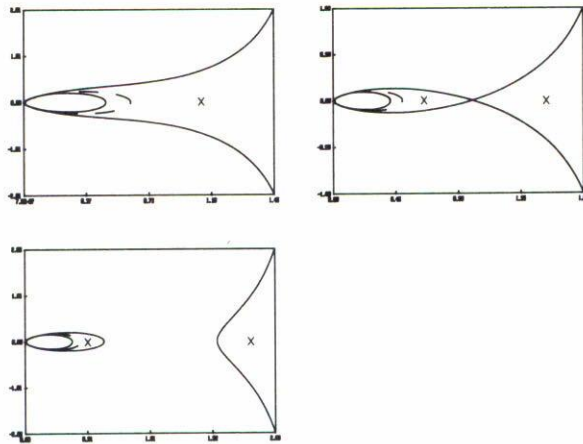


FIGURA 2. Curvas típicas de la región de Hill (marcada con X) en el plano meridiano (u, λ) para $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_1 = 1.1$, respectivamente. El *thalweg* se dibujó con línea interrumpida.

que tiene tres soluciones físicas:

$$w_1 = \frac{1/\cos(\lambda) - \sqrt{1/\cos^2(\lambda) + 4b \cos(\lambda)}}{-2b},$$

$$w_2 = \frac{1/\cos(\lambda) - \sqrt{1/\cos^2(\lambda) - 4b \cos(\lambda)}}{2b},$$

$$w_3 = \frac{1/\cos(\lambda) + \sqrt{1/\cos^2(\lambda) - 4b \cos(\lambda)}}{2b}.$$

En la Fig. 2 se muestran formas típicas de las curvas de velocidad cero para $\gamma_1 < 1$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_1 > 1$. La zona interior es la región del espacio de configuración (u, λ) en donde es posible el movimiento (región de Hill). En la región acotada, cuando $\gamma_1 > 1$, las órbitas están atrapadas para todo tiempo.

Finalmente, para facilitar los cálculos numéricos, se efectúa la transformación

$$u = \frac{1}{2\gamma_1} e^x,$$

$$\lambda = \lambda,$$

$$d\sigma = 8\gamma_1^3 e^{-2x} ds,$$
(7)

para obtener el hamiltoniano

$$E = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_\lambda^2] - \frac{ae^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \lambda} - e^{-x} \cos \lambda \right)^2 = 0,$$
(8)

donde $\dot{x} = p_x$, $\dot{\lambda} = p_\lambda$, $a = 1/(2\gamma_1)^4$. Un punto sobre una letra denota derivada respecto de σ . Las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= ae^{2x} - e^{-x} + e^{-2x} \cos^2(\lambda), \\ \ddot{\lambda} &= \tan(\lambda)[-1 - \tan^2(\lambda) + \cos^2(\lambda)e^{-2x}], \end{aligned} \tag{9}$$

con la integral de movimiento (8).

3. Mapeos de Poincaré y líneas de simetría

Para el estudio de las órbitas periódicas en el plano meridiano (u, λ) se utilizará una técnica desarrollada por De Vogelaere [6]. Primeramente se establece la sección de Poincaré escogiendo el plano $\lambda = 0$ dentro del espacio fase e intersectando la trayectoria fase con él, de manera que cada intersección produce un nuevo punto.

Si $x_1 = x$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \dot{x}$ y $x_4 = \dot{\lambda}$, entonces un punto (x_1, x_3) sobre la superficie de sección será suficiente para definir las condiciones iniciales de una órbita en el espacio fase, ya que $x_2 = 0$ y x_4 se deriva de la ecuación de la energía (8). Se escogerá x_4 positiva para las condiciones iniciales.

Sea \mathbf{x} un punto en el plano de Poincaré, y $T\mathbf{x}$, $T^2\mathbf{x}$, ..., las intersecciones sucesivas de la trayectoria fase con el plano de Poincaré. El operador de evolución temporal T [que se obtiene integrando las ecuaciones diferenciales (9)] define un mapeo del plano en sí mismo que conserva área (pues T es canónica). Si n es el entero positivo más pequeño tal que $T^n\mathbf{x} = \mathbf{x}$, el conjunto $\{\mathbf{x}, T\mathbf{x}, \dots, T^{n-1}\mathbf{x}\}$ es una órbita periódica de periodo n en el plano de Poincaré. T es reversible [6] pues se puede escribir como el producto de dos involuciones:

$$T = I_1 I_0,$$

donde

$$I_1 I_1 = I_0 I_0 = \mathbf{1},$$

ya que el problema de Störmer tiene la simetría

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3, x_4),$$

de manera que si (x_1, x_3) es un punto sobre el plano de Poincaré, $I_0(x_1, x_3) = (x_1, -x_3)$ e $I_1 = T I_0$.

La factorización en el producto de dos involuciones fue introducida inicialmente por Birkhoff [20] y ampliamente estudiada por De Vogelaere [6]. Si para j un entero arbitrario se define

$$I_j = T^j I_0,$$

puede demostrarse que I_j también es involución, y que el conjunto $\{I_j, T^k\}$, con $j, k \in Z$ (como es usual, Z es el conjunto de los enteros), es un grupo discreto [7] con la representación

$$\begin{aligned} I_j^2 &= \mathbf{1}, \\ T^j I_k &= I_{j+k}, \\ I_j I_k &= T^{j-k}, \\ I_j T^k &= I_{j-k}, \end{aligned}$$

Se define además el conjunto de puntos fijos bajo I_j por Γ_j , es decir, $\Gamma_j = \{\mathbf{x} | I_j \mathbf{x} = \mathbf{x}\}$. A Γ_j se le llama la línea de simetría j . Si j, k, l y n son enteros arbitrarios, pueden demostrarse algunas propiedades importantes [6,21]:

1. Si

$$\mathbf{x} \in \Gamma_j \cap \Gamma_k \Rightarrow T^{|j-k|} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

es decir, si un punto está en la intersección de dos líneas de simetría, por ejemplo Γ_j and Γ_k , el punto será periódico y su periodo divide a $|j - k|$.

2. Líneas de simetría se mapean bajo T o I en líneas de simetría:

$$\begin{aligned} T^n \Gamma_k &= \Gamma_{2n+k}, \\ I_n \Gamma_k &= \Gamma_{2n-k}. \end{aligned}$$

Así, Γ_0 , genera todas las líneas pares, y Γ_1 todas las impares.

3. Puesto que

$$I_0 \Gamma_n = \Gamma_{-n},$$

las líneas negativas se obtienen simplemente reflejando a las positivas por I_0 .

4. Si $\mathbf{x} \in \Gamma_j \cap \Gamma_{j+k}$, entonces $\mathbf{x} \in \Gamma_{j+l k}$ para cualquier $l \in Z$. Ahora bien, si el periodo de \mathbf{x} es k , existe un l tal que $j + l k = s$ donde $s = 0, 1, \dots, k - 1$, y entonces se puede demostrar [21] que para cualquier $t \in Z$ dado,

$$T^{(t+k-s)/2} \mathbf{x} = I_t T^{(t+k-s)/2} \mathbf{x}$$

lo cual implica que $T^{(t+k-s)/2} \mathbf{x} \in \Gamma_t$. Así, dados una órbita periódica de periodo k y un entero arbitrario t , algún punto de la órbita periódica estará sobre Γ_t , siendo la única restricción sobre t que $(t + k - s)$ sea par. Como corolario se tiene la siguiente propiedad.

5. Supóngase que \mathbf{x} es un punto de una órbita invariante con respecto a I_0 en el plano de Poincaré y con periodo n , entonces \mathbf{x} está en la intersección de dos líneas de simetría y ocurrirá una y solo una de las siguientes posibilidades:
- a) La órbita tiene dos puntos, y solo dos, sobre Γ_0 y ninguno sobre Γ_1 si n es par.
 - b) La órbita tiene dos puntos, y solo dos, sobre Γ_1 y ninguno sobre Γ_0 si n es par.
 - c) La órbita tiene un punto, y solo uno, sobre Γ_0 y otro punto, y solo uno, sobre Γ_1 si n es impar (excepto en el caso en que $n = 1$, donde el mismo punto está sobre Γ_0 y Γ_1).

En el problema de Störmer, Γ_0 es simplemente la línea $x_3 = 0$. Por otro lado, si un punto fase $(x_1, x_2 = 0, x_3, x_4)$ al tiempo $t = 0$ evoluciona con el flujo al punto $(x_1, x_2 = 0, -x_3, -x_4)$ al tiempo $t = \tau$, esto es, $T\mathbf{x} = T(x_1, x_3) = (x_1, -x_3)$, entonces en $t = \tau/2$ el punto fase toca la curva de velocidad cero, y la partícula regresará por la misma trayectoria con velocidad opuesta. Nótese que $\mathbf{x} \in \Gamma_{-1}$, pues $I_{-1}\mathbf{x} = I_0T\mathbf{x} = I_0(x_1, -x_3) = (x_1, x_3) = \mathbf{x}$. Se sigue también que $T\mathbf{x} \in \Gamma_1$ por la propiedad 2. Por lo tanto, para calcular Γ_1 , simplemente se toman puntos con condiciones iniciales sobre la curva de velocidad cero y se busca su primer cruce con la sección de Poincaré. Las otras líneas se calculan utilizando las propiedades 2 y 3.

Nótese que todas las órbitas de periodo impar n se deben iterar dos veces para obtener la órbita periódica completa en el espacio fase. Cuando la órbita se itera n veces, regresa al mismo punto en el plano de Poincaré pero con x_4 de signo opuesto al original (pues n es impar). Estas órbitas periódicas son trayectorias también simétricas en el espacio de configuración pues contienen un punto sobre Γ_0 , es decir, tienen un punto que cruza perpendicularmente al ecuador. Además, por tener un punto sobre la línea Γ_1 , son órbitas que tocan la curva de velocidad cero y regresan sobre sí mismas, por lo tanto son del tipo abierto [17] en el espacio de configuración.

Las órbitas de periodo par con dos puntos sobre la línea Γ_0 son simétricas en el espacio de configuración, cruzando en dos puntos al ecuador perpendicularmente; éstas son del tipo cerrado.

Las órbitas de periodo par con dos puntos sobre la línea Γ_1 serán en general órbitas asimétricas en el espacio de configuración, aunque son simétricas en el plano de Poincaré. Estas órbitas son del tipo abierto y tocan la curva de velocidad cero en dos puntos no simétricos (en el espacio de configuración) en general.

Puesto que $E = 0$ y $x_4^2 \geq 0$ en la Ec. (8), la región permitida en el plano de Poincaré ($x_2 = 0$) es

$$|x_3| \leq \sqrt{ae^{2x_1} - (1 - e^{-x_1})^2}.$$

Todas las líneas de simetría deben estar dentro de la región anterior.

4. Órbitas periódicas

En la Ref. [13] se presentó un estudio de las líneas de simetría y su dinámica al variar el parámetro γ_1 . En especial fue analizada la dinámica de las líneas Γ_1 y Γ_2 al cambiar el parámetro pues contienen toda la información sobre clasificación en familias de órbitas periódicas simples (*i.e.* periodo 1 y 2), así como nacimiento, bifurcaciones y desaparición de estas familias.

Γ_1 está formada por dos ramas espirales (véase la Fig. 3) que corresponden al primer cruce con el plano de Poincaré de las dos curvas de velocidad cero que convergen a la singularidad $u = 0$, $\lambda = \pm\pi/2$. Malmquist [22] demostró que existe al menos una órbita que llega a la singularidad para cada valor fijo de γ_1 , aunque la demostración de unicidad fue dada posteriormente por Braun [23]. Esto es importante, pues si únicamente una trayectoria τ llega a la singularidad, y si se considera a la trayectoria que sale de la singularidad como la trayectoria τ recorrida en sentido opuesto, las dos espirales de Γ_1 convergen a un punto que se denotará por ξ_1 en el plano de Poincaré (x_1, x_3) . Este punto es la primera intersección con el plano de Poincaré de la trayectoria que sale de la singularidad y que puede ser considerado como un punto de Γ_1 si se define $T^{-1}\xi_1 = I_0\xi_1$. Γ_2 no pasa a través de ξ_1 , ni lo hacen ninguna de las líneas pares. Γ_3 tiene también dos ramas espirales que convergen a un punto, que se denotará por ξ_3 , y que es la segunda intersección con el plano de Poincaré de la órbita que sale de la singularidad, es decir $T\xi_1 = \xi_3$ (este punto alcanzará a apreciarse hasta la Fig. 7). De hecho, todas las líneas impares Γ_{2n-1} (n entero positivo) están formadas por dos ramas espirales que convergen al punto ξ_{2n-1} y que es la enésima intersección con el plano de Poincaré de la órbita que sale de la singularidad.

En la Fig. 3 se muestran las líneas Γ_0 a Γ_6 para $\gamma_1 = 0.7857$. Estas se calcularon utilizando el método Runge Kutta a orden 4 para integrar las ecuaciones de movimiento (8). Las respectivas líneas negativas son su reflexión por el eje x_1 .

Las líneas $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, etc., se encuentran una dentro de otra y todas ellas entre los 2 brazos salientes de Γ_1 , de tal forma que no se produce ninguna intersección y no pueden existir órbitas periódicas. El valor crítico debajo del cual no existen órbitas periódicas es $\gamma_1^* = 0.788541$ [14,24], en donde todas las líneas se hacen tangentes en un solo punto parabólico.

Para valores del parámetro un poco mayores que γ_1^* se producirá la intersección. La órbita parabólica bifurca en dos órbitas de periodo 1 que determinan la familia principal de órbitas periódicas (f_0) para cada valor fijo del parámetro γ_1 . Estas dos órbitas nacen en la dirección de la tangente a todas las líneas de simetría (el eje x_1) en el punto de bifurcación. La intersección del lado izquierdo f_0^i es una órbita estable o elíptica y la del lado derecho f_0^d es inestable o hiperbólica.

Cerca del punto elíptico de la familia principal f_0 , las líneas de simetría rotan en el sentido de las manecillas del reloj al aumentar el parámetro γ_1 , generándose órbitas periódicas que nacen de f_0 con número de rotación p/q . Este está determinado por la traza del mapeo linealizado alrededor de la órbita estable de f_0 [7]. En el momento en que una órbita de periodo n está bifurcando de f_0^i , la línea Γ_n es tangente de inflexión con Γ_0 ; si el parámetro aumenta ligeramente, se producirán

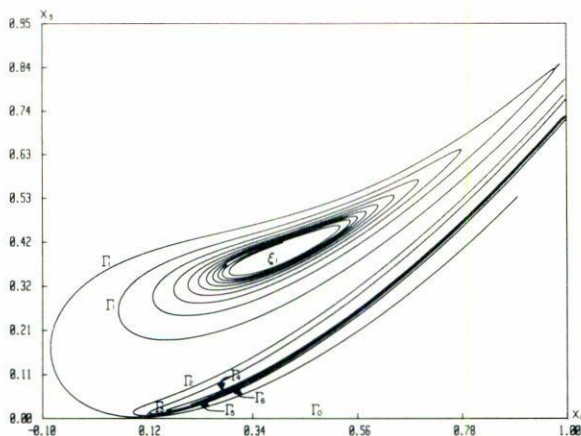


FIGURA 3. Líneas Γ_0 a Γ_6 para $\gamma_1 = 0.7857$. Las líneas negativas se obtienen reflejándolas por el eje $x_3 = 0$.

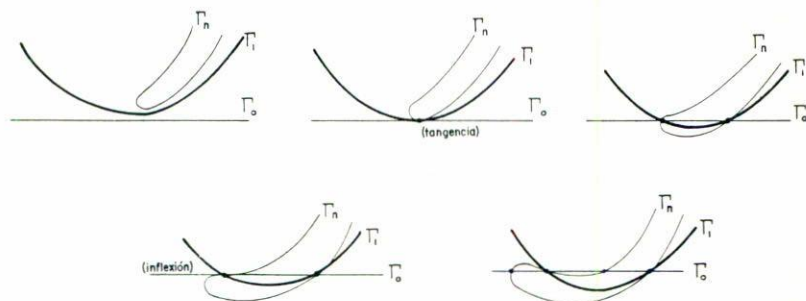


FIGURA 4. Dinámica de la línea Γ_n en una bifurcación del periodo n alrededor del periodo 1.

dos puntos nuevos de intersección entre Γ_n y Γ_0 , que son las dos órbitas de periodo n que acaban de bifurcar de f_0 . Esta pareja de órbitas periódicas forman una familia con la variación del parámetro γ_1 y han sido estudiadas por Markellos *et al* [24], en un pequeño intervalo de valores de γ_1 . En la Fig. 4 se muestra la dinámica de la línea Γ_n en una bifurcación del periodo n alrededor del periodo 1. La última órbita en bifurcar es la de periodo 2, que es la llamada familia f_1 . Cuando esta familia nace, la órbita de periodo 1, *i.e.* la familia f_0^i , se vuelve hiperbólica.

Conforme el parámetro aumenta, el punto ξ_1 baja hacia el eje $x_3 = 0$, generándose nuevas intersecciones entre la doble espiral de Γ_1 y la horizontal Γ_0 . La intersección de la n -ésima vuelta de Γ_1 con Γ_0 dará dos órbitas de periodo 1, una de ellas estable (la del lado izquierdo sobre el eje x_1), que se denotará por f_{2n}^i , y

otra inestable (la del lado derecho), que se denotará por f_{2n}^d , formando la familia f_{2n} . La parte estable bombea órbitas con número de rotación p/q , de la misma manera que lo hace f_0 hasta que desestabiliza cuando nace la familia f_{2n+1} de periodo 2 [13].

5. Órbitas de periodo 3

En este trabajo se hará un seguimiento de la línea Γ_3 al aumentar el parámetro γ_1 para analizar la estructura de las órbitas de periodo 3 y su clasificación en familias. Para ello se introduce el espacio de parámetros utilizado en Markellos *et al.* [18], para que la correspondencia con ese estudio sea clara. El parámetro que se maneja en la Ref. [18] es $C = \frac{1}{2}(1/(2\gamma_1)^4)$ (la energía). Para cada valor de C fijo, y por consiguiente de γ_1 , se grafica la coordenada radial $2\gamma_1 u = e^{x_1}$ de las órbitas periódicas en el punto donde cruzan perpendicularmente al ecuador (*i.e.* $\dot{u} = 0$) lo cual corresponde a los cruces de Γ_3 con Γ_0 , escrito en las coordenadas ($u, \lambda = 0$). Se obtiene así una gráfica global de las órbitas periódicas en el espacio de parámetros llamada la “curva característica”.

Además, los cálculos numéricos muestran que la dinámica y bifurcaciones al aumentar el parámetro γ_1 es esencialmente la misma para las familias pares. Esto se debe a que el punto ξ_3 de Γ_3 orbita alrededor de ξ_1 (en el sentido de las manecillas del reloj cuando γ_1 aumenta) de tal manera que las intersecciones que se producen en conexión con una familia f_{2n} son esencialmente las mismas que se producen en conexión con la f_{2n+2} . Asimismo, para $\gamma_1 > 1$ los puntos terminales de las líneas de simetría en la frontera de la región permitida se “desenredan” (desplazándose en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la frontera al aumentar γ_1), de tal manera que dejan la misma disposición exterior de las líneas al pasar de una familia f_{2n} a la siguiente f_{2n+2} .

Se presentarán aquí las órbitas de periodo 3 conectadas con f_0 al cambiar γ_1 , en el entendido de que esta misma dinámica se presenta para las familias de periodo 3 conectadas con cualquier familia f_{2n} . Algunas de esas familias ya fueron estudiadas por Markellos *et al.* [18] en un pequeño intervalo, llamándoles en forma genérica las ramas j_3, j_3' y k_3 de las familias j y k .

En las Figs. 5–8 se muestran las líneas $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ y Γ_3 para valores crecientes del parámetro. Siguiendo la dinámica de las líneas al aumentar γ_1 , así como los cruces de Γ_3 con Γ_0 , se puede obtener una gráfica cualitativa de las órbitas de periodo 3 y su clasificación en familias en el espacio de parámetros Σ . En la Fig. 9 se muestra el espacio de parámetros Σ para periodos 1, 2 y 3 conectados con f_0 y f_2 , estando la frontera definida por energía cinética igual a cero y $\lambda = 0$ en la ecuación de la energía (9). Como se verá, para cada familia f_{2n} se obtienen seis ramas diferentes, cuatro de las cuales están reportadas en la Ref. [18] aunque no en forma global, sino únicamente en una pequeña vecindad de f_{2n} estable.

Para $\gamma_1 = 0.8$ ($C = 0.07629$), sólo una de las dos espirales de Γ_3 se ha intersectado con Γ_0 , en dos puntos por los que también pasa Γ_1 (véase Fig. 5). Estos puntos son las dos órbitas de periodo 1 que definen a f_0 para ese valor de γ_1 . Al aumentar

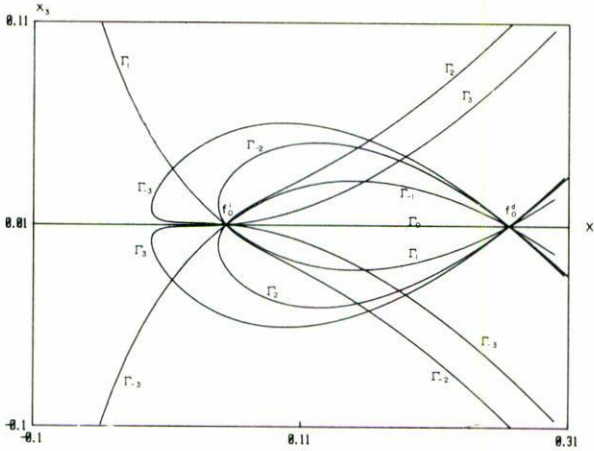


FIGURA 5. Líneas Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 para $\gamma_1 = 0.8$ ($C = 0.076293$).

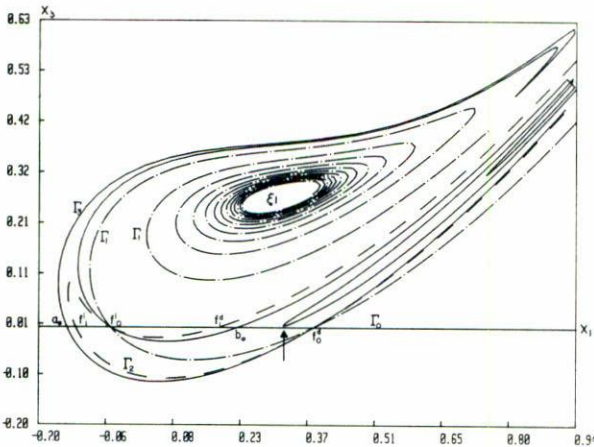


FIGURA 6. $\gamma_1 = 0.85$ ($C = 0.05986$). Una nueva familia indicada con una flecha está próxima a nacer (rama c). Las órbitas de periodo 3 que son miembros de las familias a y b que bifurcaron de f_0^i se encuentran indicadas. También se indican los miembros de las familias f_0 y f_1 .

γ_1 se observa la dinámica ya descrita en la sección anterior, por la cual bifurca una pareja (que da dos órbitas diferentes de periodo 3), una del lado izquierdo de f_0^i (rama a) y otra del lado derecho (rama b). Esta bifurcación es la estudiada en la Ref. [18] como bifurcaciones “ j_3 ” de la rama “ j ” y que se muestra en el recuadro superior de la Fig. 9.

En la Fig. 6 se muestran las mismas líneas cuando $\gamma_1 = 0.85$ ($C = 0.05986$). El punto f_0^i se ha desestabilizado dando nacimiento a la familia f_1 . ξ_3 se ha movido

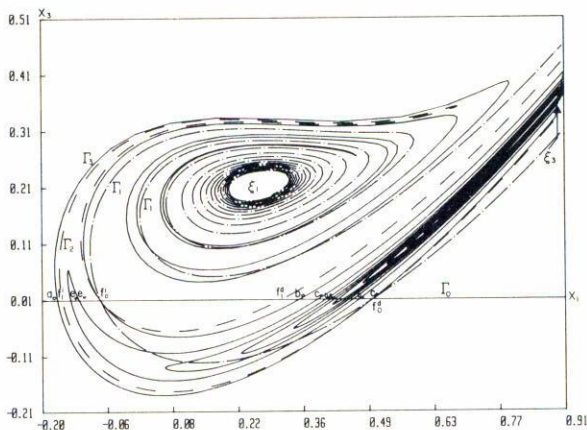


FIGURA 7. Líneas Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 para $\gamma_1 = 0.9$ ($C = 0.04762$). Una nueva familia (rama e) ha nacido entre f_1^i y f_0^i . Las familias a , b , c , e , f_0 y f_1 se encuentran indicadas.

hacia la izquierda y hacia abajo (aunque aún no se ve en la figura), de manera que la otra espiral de Γ_3 está muy próxima a tocar Γ_0 y generar otra familia de periodo 3 que no bifurca de f_0 y que se denotará por la rama c en el espacio de parámetros (marcada con una flecha).

En la Fig. 7 se muestran las líneas Γ_0 a Γ_3 para $\gamma_1 = 0.9$ ($C = 0.04762$). El punto ξ_3 continúa su rotación alrededor de ξ_1 , generándose nuevas intersecciones entre las dos espirales de Γ_3 (alrededor de ξ_3) y Γ_0 . Sin embargo, estas nuevas intersecciones no generan más familias que las ya existentes b y c , como quedará claro un poco más adelante. Obsérvese que entre f_1^i y f_0^i , la parte más externa de la espiral doble de Γ_3 ya se ha intersectado con Γ_0 , generándose una nueva familia denotada por e que, como c , tampoco bifurca de f_0^i . El siguiente brazo o vuelta de Γ_3 dará lugar, cuando aumente γ_1 , a una nueva familia también espiral que se denotará por g , pero que aún no aparece para $\gamma_1 = 0.9$.

El punto ξ_3 orbita alrededor de ξ_1 al aumentar el parámetro, así que eventualmente cruzará por primera vez a Γ_0 . En el espacio de parámetros, R_0^3 denotará a la primera intersección de ξ_3 con Γ_0 , es decir, es el centro del remolino formado por las ramas b y c asociadas a la familia f_0 . Para ese valor del parámetro, infinitas parejas de órbitas habrán nacido entre f_1^d y f_0^d , y en adelante comenzarán a desaparecer también en parejas, tanto de la familia b como c .

Sin embargo, las nuevas parejas que nacen entre las órbitas f_1^d y f_0^d no generan nuevas familias, ya que Γ_3 es continua excepto en el punto ξ_3 , con dinámica continua respecto a la variación de γ_1 [6], así que todas las intersecciones que se produzcan entre una sola espiral de Γ_3 con Γ_0 , están conectadas continuamente al cambiar γ_1 y formarán una sola familia. Puesto que Γ_3 consta de dos espirales, habrá dos familias que sólo se tocan en el punto R_0^3 en la Fig. 9. Estas familias son la rama b que bifurcó de f_0^i y que termina en R_0^3 , y la rama c que no bifurca de f_0^i pero

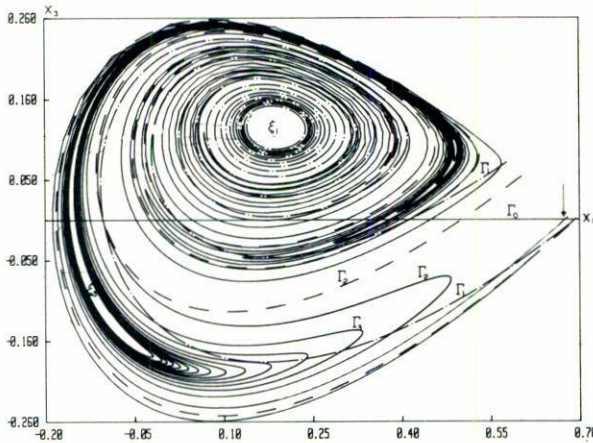


FIGURA 8. Líneas Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 para $\gamma_1 = 1.0$ ($C = 0.03125$). La familia c_0 , marcada con una flecha, está próxima a desaparecer.

que también forma una espiral alrededor de R_0^3 en el espacio de parámetros Σ . Los cálculos numéricos muestran que c termina ecuatorialmente.

Obsérvese también que un par de órbitas que nacen juntas pertenecientes a las ramas espirales b o c , no desaparecerán juntas: la del lado derecho desaparece con una órbita que nació anteriormente (*i.e.* para un valor de γ_1 menor) del lado izquierdo debido a una intersección de una vuelta más externa del mismo brazo de Γ_3 con Γ_0 . Similarmente para las ramas e y g , la órbita del lado izquierdo desaparece con una órbita que nace antes del lado derecho. Esta situación ya se ha analizado con respecto a la familia de órbitas asimétricas simples en la Ref. [13].

El último valor de γ_1 , para el que se presentará en forma gráfica a Γ_3 , es $\gamma_1 = 1.0$ ($C = 0.03125$) en la Fig. 8, ya que para valores superiores la gráfica se vuelve muy compleja. Puesto que aparecerán órbitas de periodo 3 en conexión con f_2 , se denotará por a_{2n} , b_{2n} , c_{2n} , d_{2n} , e_{2n} y g_{2n} a las ramas asociadas a las familias f_{2n} . Este subíndice también se utilizará en R_{2n}^3 (n entero positivo o cero) para denotar el centro de dos espirales en Σ , una de ellas bifurcando del lado derecho de f_{2n}^i (rama b_{2n}) en su parte cercana al máximo.

Cuando $\gamma_1 = 1.0$, el punto ξ_3 ha continuado su movimiento alrededor de ξ_1 de manera que han desaparecido todas las parejas de las familias espirales b_0 y c_0 (entre f_1^d y f_0^d) excepto una órbita perteneciente a c_0 (marcada con una flecha en la Fig. 8) y que está muy próxima a desaparecer ecuatorialmente cuando se desenreden las líneas para $\gamma_1 > 1$.

Por otro lado, entre f_1^i y f_0^i se han producido muchísimas intersecciones entre la doble espiral de Γ_3 y Γ_0 , pues aparentemente el punto ξ_3 se encuentra muy cerca de Γ_0 . Estas intersecciones pertenecen a las ramas e_0 y g_0 que forman espirales alrededor del punto que se denota por L_0^3 en Σ y que corresponde a la segunda intersección de ξ_3 con la línea Γ_0 en su movimiento "orbital" alrededor de ξ_1 al

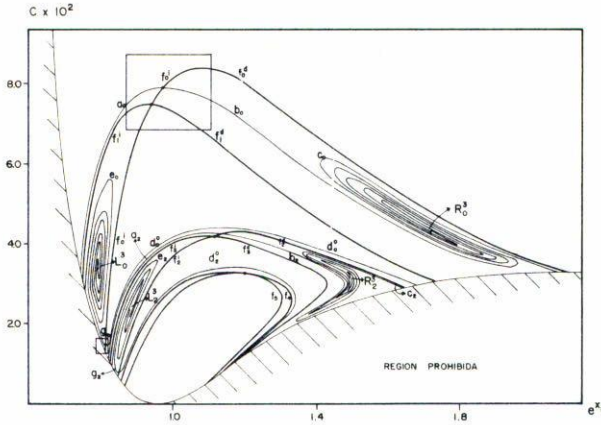


FIGURA 9. Familias $f_0, f_1 \dots f_6$ y las ramas a, b, c, d, e y g de periodo 3 asociadas a f_0 y f_2 en el espacio de parámetros: $C = \frac{1}{2}(1/(2\gamma_1))^4$ (eje vertical) contra $2\gamma_1 u = e^{\sigma_1}$ (eje horizontal). La familia f_{2n+1} bifurca de f_{2n}^i cuando ésta desestabiliza. Entre el máximo de f_{2n} y su bifurcación en f_{2n+1} bifurcan familias de todos los periodos. En particular, las ramas a_0 y b_0 representan la familia de periodo 3 que bifurca de f_0^i cuando γ_1 aumenta (C disminuye). La parte inferior de f_{2n}^i que termina en la frontera de la región prohibida también es estable. Las ramas g y d^0 son dos órbitas de periodo 3 que bifurcan de ella cuando γ_1 disminuye. Las 6 ramas se han dibujado sólo aproximadamente y se han deformado en la espiral para facilitar el dibujo.

aumentar γ_1 . El punto L_{2n}^3 se define en analogía con R_{2n}^3 . Así, la n -ésima intersección de ξ_3 con Γ_0 (n un entero positivo) en el plano de Poincaré corresponderá al punto $R_{(n-1)}^3$ en el espacio de parámetros si n es impar, y al punto $L_{(n-2)}^3$ si n es par.

La órbita perteneciente a la rama a_0 (que bifurcó de f_0^i cerca del máximo en el espacio Σ) está aún presente y es la primera intersección entre Γ_0 y Γ_3 de izquierda a derecha en la Fig. 8. Las familias f_2 y f_3 ya están presentes por un mecanismo descrito en la sección anterior (Fig. 4), así como las ramas a_2 y b_2 de f_2 . Además, la doble espiral de Γ_3 ya ha generado nuevas intersecciones con Γ_0 entre los puntos f_3^d y f_2^d , que son las ramas b_2 y c_2 , así como las ramas e_2 y g_2 entre f_3^i y f_2^i .

Por otro lado, una nueva familia d_0 nació antes (en un valor de γ_1 menor) que la familia f_2 , y después que la familia f_1 . Para $\gamma_1 = 1.0$, d_0 tiene un punto entre f_0^i y a_2 y otro entre f_2^d y f_1^d . Los cálculos numéricos muestran que al aumentar el parámetro el lado derecho de la familia d_0 termina ecuatorialmente, mientras que el lado izquierdo bifurca de f_0^i en su parte final, i.e. cerca de la frontera de la región permitida en el espacio Σ , donde f_0^i vuelve a ser estable (bifurcaciones de la rama "k" en la Ref. [18]).

Sin embargo, las familias d_m (aquellas que nacen después que la familia f_m y antes que la f_{m+2} (m par)), no tienen la misma gráfica cualitativa en el espacio de parámetros al pasar de una familia f_m a la f_{m+2} . Por ejemplo, sólo hay una familia d_0 para f_0 , mientras que hay dos independientes para f_2 :

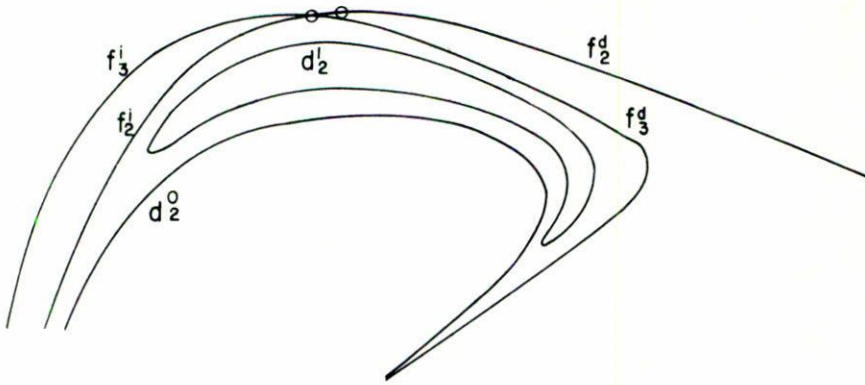


FIGURA 10. Familias d_2^0 y d_2^1 en el espacio de parámetros Σ .

1. La que por la derecha termina ecuatorialmente y por la izquierda bifurca de f_0^i (en su parte final de la gráfica en el espacio de parámetros). Esta rama será denotada por d_2^0 .
2. La que está formada por dos secciones que nacen en valores de γ_1 diferentes, ambas formando un máximo en Σ , pero que al aumentar el parámetro γ_1 se ve que se conectan, primero por la izquierda y después por la derecha. Véase la Fig. 10. Esta familia se denota por d_2^1 y es una familia bastante especial, pues ni bifurca de ninguna familia f , ni termina ecuatorialmente. Además, su curva característica en el espacio Σ tiene forma cerrada o de "burbuja" (véase la Fig. 10). Estas órbitas son llamadas irregulares en la Ref. [25].

Las ramas d del primer tipo (que terminan ecuatorialmente) se denotarán por d^0 , y las del segundo tipo que ni terminan ecuatorialmente ni bifurcan de ninguna familia f , por d^1, d^2, \dots .

Conforme γ_1 aumenta y van naciendo nuevas familias f_m , las ramas a_m, b_m, c_m, e_m y g_m (m par) son esencialmente iguales al cambiar m . Por otro lado, las familias d_m son de los dos tipos mencionados anteriormente: la que bifurca de f_m (en su parte inferior) y que termina ecuatorialmente d_m^0 , y las del tipo cerrado, con la peculiaridad de que éstas forman burbujas anidadas $d_m^1, d_m^2, \dots, d_m^l$ cuyo número l crece conforme aumenta m .

Las familias a las que pertenecen los puntos de intersección de Γ_1, Γ_2 y Γ_3 , con Γ_0 para $\gamma_1 = 1.0$ (Fig. 8) son, de menor a mayor valor para la coordenada horizontal x_1 , las siguientes:

$$a_0 f_1^i e_0 g_0 e_0 g_0 \cdots e_0 g_0 e_0 g_0 e_0 f_0^i d_0^0 a_2 f_3^i e_2 g_2 g_2 e_2 f_2^i d_2^1$$

$$d_2^1 d_2^0 d_2^0 d_2^1 d_2^1 f_3^d b_2 c_2 b_2 c_2 b_2 c_2 f_2^d d_0^0 f_1^d c_0 f_0^d.$$

Se calcularon las líneas Γ_1 a Γ_3 para valores $\gamma_1 > 1$, pero no se presentan aquí debido a su complejidad. Los resultados correspondientes a las familias de periodo

3 en conexión con f_0 y f_2 se muestran cualitativamente en la Fig. 9. No se dibujó la familia d_2^1 .

Algunos hechos importantes que cabe señalar son:

1. La familia f_{2n}^i vuelve a ser estable en su segmento final cercano a la frontera de la región prohibida (recuadro inferior de la Fig. 9). Si ahora se analiza en forma inversa, es decir cuando γ_1 disminuye, se observa esencialmente la misma dinámica que en la parte estable cercana al máximo de f_{2n}^i . La pareja perteneciente a las ramas g_{2n} y d_{2n}^0 que bifurca de f_0^i forman una familia.
2. La familia e termina ecuatorialmente. Esto se debe a que el punto final de la espiral correspondiente de Γ_3 (que es un punto sobre la frontera de la región permitida en el plano de Poincaré) rota en el sentido de las manecillas del reloj al aumentar γ_1 , hasta que pasa por Γ_0 . En ese momento la órbita se vuelve ecuatorial.
3. La rama a termina ecuatorialmente.
4. Las ramas a y b pertenecen a la misma familia.
5. Las ramas b y c podrían considerarse de la misma familia si se considera que se conectan en el punto R^3 . Este punto corresponde, en el caso de b_0 , c_0 y R_0^3 , a la trayectoria que sale de la singularidad y cruza por segunda vez el plano de Poincaré con $x_3 = 0$, es decir, ortogonalmente al ecuador. Lo mismo pueden considerarse c y g de la misma familia si se considera que se conectan en L^3 . Así, a_0 , b_0 y c_0 formarían una sola familia que bifurca de f_0^i cerca de su máximo, y d_0^0 , e_0 y g_0 otra familia que bifurca de f_0^i cerca de la frontera con la región prohibida.
6. Las variedades dibujadas en el espacio de parámetros sólo se intersectan en puntos de bifurcación.
7. En la Ref. [18] sólo se reportan las bifurcaciones que se muestran en los recuadros de la Fig. 9 y que sólo incluyen pequeños segmentos de las ramas a , b y g , d^0 , respectivamente. Aquí se han extendido a todo el espacio de parámetros obteniendo la forma espiral de b y g , así como dos nuevas ramas: la e y la c , también espirales, y que no se habían reportado anteriormente. También se ha visto que a , c , d^0 y e terminan ecuatorialmente, y se han encontrado nuevas familias con curvas características cerradas (burbujas anidadas) d^1 , d^2 , ... etc. que no bifurcan de f_0 ni terminan ecuatorialmente.

Las órbitas que pertenecen a la misma familia cambian su forma en el espacio de configuración de manera continua. La rama a de f_0^i tiene forma de \propto cuando bifurca de f_0^i , y ésta se mantiene semejante a lo largo de toda la rama. La rama b de f_0^i tiene la forma de ∞ cuando bifurca de f_0^i y la mantiene prácticamente sin cambio a lo largo de la parte externa de la espiral. Las órbitas que se producen por la siguiente intersección de una vuelta más interna de Γ_3 con Γ_0 , tienen una oscilación más alrededor del *thalweg* en sus extremos que tocan la curva de velocidad cero [13]. Esto se debe a que las dos espirales de Γ_3 provienen de las dos curvas de

velocidad cero (la interior y la exterior), así que deben alternarse los puntos de retorno de aquellas órbitas entre las curvas de velocidad cero interior y exterior. Órbitas muy cercanas a R^3 efectuarán un gran número de oscilaciones alrededor del *thalweg* hasta tocar la curva de velocidad cero y regresar sobre sí mismas (en el espacio de configuración).

Aunque los extremos de las órbitas que tocan la curva de velocidad cero pueden tener más o menos oscilaciones alrededor del *thalweg* para una misma familia-espiral de periodo 3, la forma básica de la familia no cambia. Así, para las ramas b_0 y c_0 de f_0^1 la forma básica es ∞ . De hecho, el punto R_0^3 corresponde a una órbita de periodo 3 con la forma básica ∞ que llega a la singularidad.

La forma básica de las ramas e_0 y g_0 de f_0^1 es \bowtie y el punto L_0^3 corresponde a una órbita con esa forma básica que llega a la singularidad después de infinitas oscilaciones alrededor del *thalweg*.

Algunos aspectos que requieren más estudio o quedan por resolver son:

1. Analizar la estabilidad de las ramas aquí presentadas. En la región (o regiones) donde se encuentre estable una familia de periodo 3, ésta bombardeará órbitas con periodo múltiplo de 3.
2. Calcular las líneas Γ_4, Γ_5 , etc y estudiar su dinámica al cambiar el parámetro. Se espera que haya curvas características espirales y burbujas para las familias de periodo impar en el espacio Σ . Es posible que haya un comportamiento común que permita entender en forma global la estructura de órbitas con periodo bajo. También es factible que las curvas características de las familias de periodo m asociadas a f_{2n} tengan la misma forma cualitativa que las de f_0 , excepto tal vez las familias burbujas.
3. Estudiar con precisión el movimiento de $\xi_1, \xi_3 \dots, \xi_{2n+1} \dots$ al aumentar el parámetro, pues esto dará información sobre la posición de los centros de las familias espirales en el espacio de parámetros.
4. Estudiar las líneas de simetría en el límite en que $\gamma_1 \rightarrow \infty$ ($C \rightarrow 0$).

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Eduardo Piña por sus valiosos comentarios y discusiones. También quiero agradecer a Javier Jiménez por su gran ayuda en el aspecto computacional, y muy especialmente a Eduardo Neve por su continuo apoyo durante la elaboración de este trabajo.

Referencias

1. Störmer, C., *Arch. Sc. Phys. Nat.* **24** (1907) 113.
2. Noguera, M., Tesis Doctoral, Univ. de Barcelona (1986).
3. Lemaitre, G. y Vallarta, M.S., *Phys. Rev.* **43** (1933) 87.

4. Vallarta, M.S., *An Outline of the Theory of the Allowed Cone of Cosmic Radiation*, Univ. of Toronto Press (1938).
5. Graef, C. y Kusaka, S., *J. Math. Phys.* **17** (1938) 43.
6. De Vogelaere, R., en Lefschetz S. *Contributions to the Theory of Non-linear Oscillations*, Princeton Univ. Press, vol 4 (1958) 53.
7. Piña, E. y Jiménez-Lara, L., *Physica* **26D** (1987) 369.
8. Jung, C. y Scholz, H. J., *J. Phys. A.: Math. Gen.* **21** (1988) 2301.
9. Chavoya, O. y Piña, E., *Rev. Mex. Fis.* **34** (1988) 32.
10. Chavoya, O. y Piña, E., *Nuov. Cim.* **103B** (1989) 369.
11. Piña, E. y Cantoral, E., *Phys. Lett. A* **135** (1989) 190.
12. Richter, P. H., Scholz, H.J., y Wittek, A., *Nonlinearity* **3** (1990) 45.
13. Jiménez-Lara, L. y Piña, G.E., *Celestial Mech.* **49** (1990) 327.
14. Goudas, C., Halioulas, A., Markellos, V. y Macris, G., *Long Time Predictions in Dynamics*, Szebehely y Tapley eds., Reidel Publ. Co., Dordrecht-Holland (1976) 267.
15. Markellos, V., *Astrophys. and Spa. Sci.* **43** (1976) 449.
16. Markellos, V. y Klimopoulos, S., *Astrophys. and Spa. Sci.* **48** (1977) 471.
17. Markellos, V., Klimopoulos, S. y Hallioulas, A., *Celestial Mech.* **17** (1978) I, 215.
18. Markellos, V., Klimopoulos, S. y Goudas, C., *Celestial Mech.* **17** (1978) II, 233.
19. Mavraganis, A. y Goudas C., *Astrophys. and Spa. Sci.* **32** (1975) 115.
20. Birkhoff, G.D., *Dynamical Systems*, AMS. Coll. Pub. 9 (1927).
21. Jiménez Lara, L., Tesis Doctoral, Univ. Autónoma Metropolitana (1991).
22. Malmquist, J., *Ark. Math. Astr. och Fysik* **30A** (1944) 1.
23. Braun, M., *Ind. Univ. Math. Jour.* **20** (1970) 469.
24. Godart, O., *Ann. Soc. Sci. Bruz.* **58** (1938) 27.
25. Barbanis, B., *Celestial Mech.* **39** (1986) 345.

Abstract. Symmetry lines on the Poincaré plane (equatorial plane) are used for the study of periodic orbits in the Störmer problem. A special study of periodic orbits that cross the Poincaré plane three times is made. The pursuit of a particular symmetry line (Γ_3) as the Störmer parameter (the value of the angular momentum in the dipolar direction) increases, allows for the study of birth and death of period-three orbit families. Their structure and classification in a global way is thus obtained.