Investigación *Revista Mexicana de Física* **37** *No. 4 (1991) 638–647*

Espíntensor para espacio-tiempos vacíos tipo D

V. Gaftoi N., J.L. López B., J. Morales R.*
T.D. Navarrete G. y G. Ovando Z.
Area de Física, Departamento de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F.

(Recibido el 7 de agosto de 1990; aceptado el 29 de mayo de 1991)

Resumen. Obtenemos el superpotencial de Lanczos para las once métricas vacías tipo D de Kinnersley.

PACS: 04.20.–q; 04.90.+e

1. Introducción

En la Ref. [1] se expuso la importancia del espíntensor K_{ijk} de Lanczos [2] en teorías geométricas de la gravedad, pero aquí podemos agregar dos hechos recientes: Dolan-Choudhury-Wheatley [3] utilizaron a K_{ijk} para el estudio de la radiación gravitacional y Novello *et al.* [4,5] construyeron una teoría cuántica de la gravedad donde las componentes del potencial de Lanczos son las correspondientes variables de Fierz. Estas investigaciones quizás permitan descubrir el significado físico de K_{rjc}.

En las Refs. [1] y [6] se logró obtener K_{rbc} para cualquier espacio-tiempo con tipos Petrov O, N y III, mostrándose así la utilidad del formalismo de Newman-Penrose (NP) [7]; en las Refs. [8] y [9] también se encuentra K_{ijr} para $\mathbf{R}_4$ arbitrario tipo O mediante las técnicas tensorial y espinorial, respectivamente. En la Ref. [10] se obtuvo el espíntensor para la métrica de Kerr [11] (hoyo negro rotando). Aún subsiste el problema de construir el espíntensor para los tipos I, II y D en el caso general.

En este trabajo probaremos que la técnica de NP también permite determinar K_{ijr} para *todo* $\mathbf{R}_4$ vacío tipo D. En efecto: Kinnersley [12,13] encontró que sólo existen *once* clases de métricas con $R_{ij} = 0.$ y tipo Petrov D, además dio la forma explícita de cada una de ellas. Logramos, también, resolver las ecuaciones de Weyl-Lanczos (WL) [1,6] para estos once casos, demostrándose una vez más que los coeficientes de espín de NP generan a las proyecciones de K_{abc} sobre la tétrada nula.

Kinnersley [12] emplea la signatura -2 y ordena las coordenadas en la forma (u, r, x, y), aquí utilizamos (x, y, r, u) con signatura $+2$, además su vector n^c corresponde a nuestro ℓ^c y viceversa; nuestras convenciones y notación del método de NP pueden encontrarse en la Ref. [14]. En todos los once casos sólo indicaremos la

*Instituto Mexicano del Petróleo, Departamento de Investigación Básica de Procesos, México, D.F.

tétrada $(m^c, \bar{m}^c, \ell^c, n^c)$ (la cual permite obtener la correspondiente métrica vía $g^{ab} = m^a\bar{m}^b + m^b\bar{m}^a - \ell^a n^b - \ell^b n^a$) y los respectivos coeficientes de espín. Además, los vectores ℓ^c y n^c siempre estarán alineados con las direcciones de Debever-Penrose [15], entonces $\psi_a = 0, a \neq 2$, y por el teorema de Goldberg-Sachs [16]

$$x = \sigma = \lambda = \nu = 0 \tag{1}$$

para todas las métricas de Kinnersley.

2. Métricas de clase IV

Aquí se tienen dos casos:

a) IV.A $(i = \sqrt{-1})$

$$\begin{aligned} &(n^b) = (0,0,1,0), && (\ell^b) = \left(0, \frac{4ar}{a^2+x^2}, -\frac{r^2 l}{2a(a^2+x^2)}, 1\right) \\ &(m^b) = \left(\xi, \frac{i}{\xi}, \frac{2rx\xi}{a^2+x^2}, 0\right), && \xi^2 = \frac{2amx + l(a^2-x^2)}{2a(a^2+x^2)}, \end{aligned} \tag{2.a}$$

donde a, l y m son constantes reales. Las correspondientes cantidades de NP son

$$\begin{aligned} &\mu = \rho = \epsilon = 0, \quad \gamma = \frac{rl}{2a(a^2+x^2)} \\ &\tau = -\pi = \bar{\alpha} + \beta = -\frac{\xi(x - ia)}{a^2+x^2} \\ &\alpha = \frac{lx^3 - amx^2 + a^2lx - a^3m + ia(lx^2 - 2amx - la^2)}{4a\xi(a^2+x^2)^2}, \ , \\ &\beta = \frac{lx^3 - 3amx^2 - 3a^2lx + a^3m - ia(lx^2 - 2amx - la^2}{4a\xi(a^2+x^2)^2}, \\ &\psi_2 = 2\pi(\alpha - \beta) = \frac{(m+il)}{(x+ia)^3)} \end{aligned} \tag{2.b}$$

que en unión de las ecuaciones de Weyl-Lanczos (WL) (relaciones (4) de la Ref. [6] o expresiones (8.b) de la Ref. [14] permiten obtener las componentes del espíntensor de Lanczos,

$$\begin{aligned} &\Omega_c = 0, \quad c \neq 2,5,6,7, && \Omega_2 = \frac{\alpha}{3} \\ &\Omega_5 = \frac{\beta}{3} - \frac{\pi}{6}, && \Omega_6 = \frac{\gamma}{3}, \\ &\Omega_7 = \frac{\pi\gamma}{2} r. \end{aligned} \tag{2.c}$$

Recuérdese que K_{abc} carece de unicidad, así que (2.c) es una de las múltiples soluciones de las ecuaciones de WL.

b) IV.B

$$
\begin{aligned}
&(n^b) = (0,0,1,0), && (\ell^b) = \left(0, 0, \frac{cr^2}{x^2}, 1\right) \\
&(m^b) = \left(\xi, \frac{i}{\xi}, \frac{2r\xi}{x}, 0\right), && \xi^2 = c + \frac{m}{x},
\end{aligned}
\tag{3.a}
$$

con c y m constantes reales. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\mu = \rho = \epsilon = 0, && \tau = -\pi = \alpha + \beta = -\frac{\xi}{x}, \\
&\gamma = -\frac{cr}{x^2}, && \alpha = -\frac{(m + 2cx)}{4x^2\xi}, \\
&\beta = -\frac{(3m + 2cx)}{4x^2\xi}, && \psi_2 = \frac{m}{x^3},
\end{aligned}
\tag{3.b}
$$

así, las ecuaciones de WL conducen al espíntensor

$$
\Omega_c = 0, \quad c \neq 2, 5, \qquad \Omega_2 = \tfrac{2}{3}\alpha, \qquad \Omega_5 = \tfrac{2}{3}\beta \tag{3.c}
$$

Con (2.c) y (3.c) queda determinado K_{ijk} para las métricas de clase IV, las cuales son las únicas con $\mu = \rho = 0$.

3. Métricas de clase II

Aquí existen seis métricas, y para todas ellas el espíntensor tendrá la misma estructura. En efecto, probaremos que siempre es posible elegir la tétrada (manteniendo (1)) tal que

$$
\begin{aligned}
&\tau = \pi, && \alpha = \beta, && \rho - \bar{\rho} = 2(\epsilon - \bar{\epsilon}), && \pi + \bar{\pi} = 2(\beta + \bar{\beta}), \\
&\mu = Q\rho, && \gamma = Q\epsilon, && \psi_2 = 4Q(\epsilon\rho - Q\pi\beta), && Q = \pm 1,
\end{aligned}
\tag{4.a}
$$

resultado que, al menos de forma explícita, no hemos localizado en la literatura. Entonces (4.a) y las ecuaciones de WL implican el espíntensor

$$
\begin{aligned}
&\Omega_0 = \Omega_7 = Q\frac{\pi}{4}, && \Omega_3 = Q\Omega_4 = Q\frac{\rho}{4}, \\
&\Omega_1 = Q\Omega_6 = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\rho}{12}, && \Omega_2 = \Omega_5 = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
\tag{4.b}
$$

Así, todo es cuestión de mostrar una tétrada con las características (4.a), y el correspondiente potencial de Lanczos estará dado por (4.b).

a) II.A. Esta métrica es la solución de Kerr-NUT [17]:

$$
\begin{aligned}
(n^b) &= \left(-\frac{QR}{2\Sigma}\right)^{1/2}(0,0,1,0), \\
(\ell^b) &= (-2QR\Sigma)^{-1/2}(0,2a,R,2(r^2+\ell^2+a^2)), \\
(m^b) &= (2\Sigma)^{-1/2}(-i,\csc x,0,a\,\mathrm{sen}\,x+2\ell\cot x),
\end{aligned}
\tag{5.a}
$$

donde $Q=\pm 1$ tal que $-QR>0$ y

$$
A=r-i(\ell-a\cos x),\quad \Sigma=A\bar{A},\quad R=-r^2+2mr+\ell-a^2, \tag{5.b}
$$

con a, ℓ y m constantes reales; cuando $\ell=0$ se obtiene la métrica de Kerr [11] (hoyo negro con rotación) y si $a=\ell=0$, entonces resulta la solución de Schwarzschild.

Con (5.a,b) se cumple (4.a); en efecto:

$$
\begin{aligned}
\rho &= Q\mu=-\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{QR}{2\Sigma}\right)^{1/2}, \quad \tau=\pi-\frac{a}{\bar{A}}\,\mathrm{sen}\,x(2\Sigma)^{-1/2} \\
\alpha &= \beta=\frac{\csc x}{2\bar{A}}(-a+\ell\cos x-ir\cos x)(2\Sigma)^{-1/2} \\
\epsilon &= Q\gamma=-\frac{Q}{2\bar{A}}[a^2-mr-\ell^2+i(m-r)(\ell-a\cos x)](-2Q\Sigma R)^{-1/2} \\
\psi_2 &= 4Q(\epsilon\rho-Q\pi\beta)=-\frac{(m+i\ell)}{\bar{A}^3},
\end{aligned}
$$

así el correspondiente espíntensor está dado por (4.b) con $Q=-1$ cuando $R>0$, y con $Q=1$ en las regiones del espacio-tiempo, donde $R<0$. Si en (4.b) y (5.c) colocamos $a=0$, se obtiene como caso particular el espíntensor construido en [10].

b) II.B. En este caso elegimos la tétrada:

$$
\begin{aligned}
(n^b) &= \left(-\frac{QN}{2\Sigma}\right)^{1/2}(0,0,1,0), \\
(\ell^b) &= (-2QN\Sigma)^{-1/2}(0,2a,N,2(r^2+\ell^2+a^2)), \\
(m^b) &= (2\Sigma)^{-1/2}(-i,\mathrm{csch}\,x,0,-a\,\mathrm{senh}\,x+2\ell\coth x),
\end{aligned}
$$

con $Q=\pm 1$ tal que $QN<0$ y

$$
A=r-i(a\cosh x-\ell),\quad \Sigma=A\bar{A},\quad N=r^2+2mr-\ell^2+a^2. \tag{6.a}
$$

Se verifican (4.a) porque

$$\begin{aligned}
&\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{QN}{2\Sigma}\right)^{1/2}, \qquad \tau = \pi = -\frac{a}{\bar{A}}\operatorname{senh} x(2\Sigma)^{-1/2},\\
&\alpha = \beta = \frac{\operatorname{csch} x}{2\bar{A}}(a - \ell\cosh x - ir\cosh x)(2\Sigma)^{-1/2},\\
&\epsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\bar{A}}[-a^2 - mr + \ell^2 + i(m+r)(acoshx - \ell)](-2Q\Sigma N)^{-1/2},\\
&\psi_2 = -\frac{(m+i\ell)}{\bar{A}^3},
\end{aligned} \tag{6.c}$$

y así las Ω_c se determinan de acuerdo con (4.b).

c) II.C. Para determinar el potencial de Lanczos la tétrada más conveniente es

$$\begin{aligned}
(n^b) &= \left(-\frac{QM}{2\Sigma}\right)^{1/2}(0,0,1,0),\\
(\ell^b) &= (-2QM\Sigma)^{-1/2}(0, 2a, M, 2(r^2+\ell^2+a^2)),\\
(m^b) &= (2\Sigma)^{-1/2}(-i, \operatorname{sech} x, 0, -a\cosh x + 2\ell\tanh x),
\end{aligned} \tag{7.a}$$

donde $Q = \pm 1$ con $-QM > 0$ y

$$A = r - i(a\operatorname{senh} x - \ell), \qquad \Sigma = A\bar{A}, \qquad M = r^2 + 2mr - \ell^2 - a^2. \tag{7.b}$$

Las cantidades de NP adquieren los valores

$$\begin{aligned}
&\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{QM}{2\Sigma}\right)^{1/2}, \qquad \tau = \pi = -\frac{a}{\bar{A}}\cosh x(2\Sigma)^{-1/2},\\
&\alpha = \beta = -\frac{\operatorname{sech} x}{2\bar{A}}(a + \ell\operatorname{senh} x + ir\operatorname{senh} x)(2\Sigma)^{-1/2},\\
&\epsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\bar{A}}[+a^2 - mr + \ell^2 + i(m+r)(a\operatorname{senh} x - \ell)](-2QM\Sigma)^{-1/2},\\
&\psi_2 = -\frac{(m+i\ell)}{\bar{A}^3},
\end{aligned} \tag{7.c}$$

cumpliéndose (4.a) y, en consecuencia, (4.b) aporta el correspondiente espíntensor.

d) II.D

$$\begin{aligned}
&(n^b) = \left(-\frac{QF}{2\Sigma}\right)^{1/2} (0,0,1,0),\\
&(\ell^b) = (-2QF\Sigma)^{-1/2}(0,2a,F,2(r^2+\ell^2)), \quad Q = \pm 1,\\
&(m^b) = (2\Sigma)^{-1/2}(-i, e^{-x}, 0, -ae^x + 2\ell), \quad QF < 0,\\
&A = r - i(ae^x - \ell), \qquad \Sigma = A\bar{A}, \qquad F = r^2 + 2mr - \ell^2,
\end{aligned} \tag{8.a}$$

y las condiciones $(4.a)$ se verifican con las expresiones

$$\begin{aligned}
&\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{QF}{2\Sigma}\right)^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{a}{\bar{A}}e^x(2\Sigma)^{-1/2},\\
&\alpha = \beta = \frac{1}{2\bar{A}}(\ell + ir)(2\Sigma)^{-1/2},\\
&\epsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\bar{A}}[-mr + \ell^2 + i(m+r)(ae^x - \ell)](-2QF\Sigma)^{-1/2},\\
&\psi_2 = -\frac{(m+i\ell)}{\bar{A}^3},
\end{aligned} \tag{8.b}$$

de manera que las Ω_j se obtienen con $(4.b)$.

e) II.E. Aquí seleccionamos la tétrada nula

$$\begin{aligned}
&(n^b) = \left(\frac{mr+b}{\Sigma}\right)^{1/2} (0,0,1,0),\\
&(\ell^b) = (\Sigma(mr+b))^{-1/2}(0,1,mr+b,r^2+b^2)),\\
&(m^b) = (2\Sigma)^{-1/2}\left(-i, \frac{1}{x}, 0, -bx - \frac{x^3}{4}\right),\\
&A = r - i(b + \frac{x^2}{2}), \qquad \Sigma = A\bar{A}, \qquad m, b = \text{ctes.},
\end{aligned} \tag{9.a}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho = -\mu &= -\frac{1}{\bar{A}}\left(\frac{mr+b}{\Sigma}\right)^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{x}{\bar{A}}(2\Sigma)^{-1/2}, \\
\alpha = \beta &= \frac{1}{4x\bar{A}}(2b - x^2 - 2ir)(2\Sigma)^{-1/2}, \\
\epsilon = -\gamma &= -\frac{(mA+2b)}{4\bar{A}}(\Sigma(mr+b)^{-1/2}, \\
\psi_2 &= -\frac{(m+i)}{\bar{A}^3},
\end{aligned} \tag{9.b}$$

y el espíntensor está dado por (4.*b*) con $Q = -1$.

f) II.F. La métrica es generada por;

$$\begin{aligned}
(n^b) &= \left(-\frac{QT}{2\Sigma}\right)^{1/2}(0,0,1,0), \\
(\ell^b) &= (-2QT\Sigma)^{-1/2}(0,2,T,2r^2), \quad Q = \pm 1, \\
(m^b) &= (2\Sigma)^{-1/2}(-i,1,0,-x^2), \quad -QT > 0, \\
A &= r - ix, \quad \Sigma = A\bar{A}, \quad TF = 2mr - 1,
\end{aligned} \tag{10.a}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\rho = Q\mu &= -\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{QT}{2\Sigma}\right)^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{1}{\bar{A}}(2\Sigma)^{-1/2}, \\
\alpha = \beta &= \frac{\pi}{2}, \\
\epsilon = Q\gamma &= -\frac{Q}{2\bar{A}}[1 - mr + imx](-2QT\Sigma)^{-1/2}, \\
\psi_2 &= -\frac{m}{\bar{A}^3},
\end{aligned} \tag{10.b}$$

y con (4.*b*) queda determinado el espíntensor de Lanczos.

4. Métricas de clase III

a) III.A. Este espacio-tiempo también se conoce como "métrica C" [18], y su espíntensor ya fue calculado en la Ref. [14].

b) III.B. Para este $\mathbf{R}_4$ trabajamos con la tétrada nula

$$
\begin{aligned}
(n^b) &= (QE)^{1/2}(0,0,1,0), \\
(\ell^b) &= (QE)^{-1/2}(0,\underline{\bar{X}}^4,U,\underline{\bar{X}}^1), \quad Q=\pm 1, \\
(m^b) &= (2\Sigma)^{-1/2}\left(-4a\pi^0, \frac{\mathrm{dn}\,x}{\pi^0}, \frac{\mathrm{sn}\,x}{\pi^0}, -i\sqrt{2}\pi^0(r^2+3\rho^{02})\right),
\end{aligned}
\tag{11.a}
$$

donde $QE>0$, $A=r-i\rho^0$, $\Sigma=A\bar{A}$, $\rho^0=a\,\mathrm{cn}\,x$,

$$
\begin{aligned}
\pi^0 &= \left[c\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x + \frac{b}{4a^2}\mathrm{cn}^2\,x - \frac{\sqrt{2}}{8a^3}\mathrm{cn}\,x(m\,\mathrm{sn}\,x + \ell\sqrt{2}\,\mathrm{dn}\,x\right]^{1/2}, \\
E &= \frac{1}{\Sigma}\left[\tau\bar{\tau}^0 - \tfrac{1}{2}(A\psi^0+\bar{A}\bar{\psi}^0) + 2\rho\pi^{02}(\rho^0 r^2 - 2rt^0 - 3\rho^{03})\right] \\
&\quad - r^2\pi^{02} - \mu^0 r - U^0 + 2\rho^{02}\pi^{02}, \\
t^0 &= 2a^2\sqrt{2}\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x, \qquad \psi^0 = (m+i\ell)\left(\mathrm{dn}\,x - \frac{i\sqrt{2}}{2}\mathrm{sn}\,x\right)^3, \\
U^0 &= -3\rho^{02}\pi^{02} + \frac{3\sqrt{2}}{4a}\mathrm{cn}\,x(m\,\mathrm{sn}\,x - \ell\sqrt{2}\,\mathrm{dn}\,x), \\
\mu^0 &= -\frac{1}{t^0}(\ell^0 + 2\rho^0 U^0 - 2\rho^{03}\pi^{02}), \\
\ell^0 &= \ell\,\mathrm{dn}\,x(1-2\,\mathrm{sn}^2\,x) - \frac{m}{\sqrt{2}}\mathrm{sn}\,x(3-2\,\mathrm{sn}^2\,x).
\end{aligned}
\tag{11.b}
$$

Las cantidades a, b, c, ℓ y m son constantes arbitrarias y $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ representan funciones elípticas de módulo $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En la Ref. [12] (pág. 1201) pueden consultarse las expresiones para $\underline{\bar{X}}^1$, $\underline{\bar{X}}^4$ y U, las cuales participan en (ℓ^j).

Con (11.a) es posible verificar la validez de (4.a), por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\tau = \pi &= \frac{i\pi^0}{\bar{A}\sqrt{\Sigma}}(r^2 + 2i\rho^0 r + \rho^0 - it^0), \\
\rho = Q\mu &= -\frac{1}{\bar{A}}(QE)^{1/2}, \quad \psi_2 = -\frac{\psi^0}{\bar{A}^3}, \text{ etc.},
\end{aligned}
\tag{11.c}
$$

así, las Ω_c son dadas por (4.b).

Nótese que para las métricas II y III de Kinnersley, el espíntensor tiene la estructura (4.b).

5. Métricas de clase I

Estos espacios vacíos corresponden a las soluciones de NUT [13,19] y su tétrada nula está dada por

$$
\begin{aligned}
(n^b) &= (0,0,1,0),\\
(m^b) &= \frac{1}{A}(-P,-iP,0,\frac{ic}{\sqrt{2}}\eta\\
(\ell^b) &= (0,0,-M_0-\tfrac{1}{2}(\psi^0\rho+\bar{\psi}^0\bar{\rho}),1),
\end{aligned}
\tag{12.a}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&A = r - ic, &&c = \text{cte.}, \quad \rho = -\frac{1}{\bar{A}},\\
&\eta = x+iy, &&P = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{M_0}{2}\eta\bar{\eta}\right),\\
&\psi^0 = \tilde{\psi}^0 + 2iM_0c, &&M_0 = -\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},
\end{aligned}
\tag{12.b}
$$

siendo $\tilde{\psi}^0$ una constante real; entonces las cantidades de NP nos quedan

$$
\begin{aligned}
&x = \sigma = \nu = \lambda = \epsilon = \tau = \pi = 0,\\
&\beta = -\bar{\alpha} = -\frac{M_\circ\bar{\rho}\bar{\eta}}{2\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{\rho^2}{2}\psi^0,\\
&\mu = M_0\bar{\rho} + \tfrac{1}{2}\psi^0(\rho^2+\rho\bar{\rho}), \quad \psi_2 = \rho^3\psi^0 = 2\gamma\rho,
\end{aligned}
\tag{12.c}
$$

y las ecuaciones de Weyl-Lanczos aceptan la solución

$$
\Omega_b = 0, \quad b \neq 1,6, \qquad \Omega_1 = \frac{\rho}{6}, \qquad \Omega_6 = \frac{\gamma}{3} - \frac{M_0}{6}\bar{\rho}, \tag{12.d}
$$

para los tres valores posibles de M_0.

6. Comentarios

Con lo anterior queda determinado K_{ijk} para todo $\mathbb{R}_4$ vacío tipo D, y aún más interesante sería poder asignar sentido físico a los resultados obtenidos, pero hasta ahora no se ha logrado tener éxito al respecto. Investigamos la posibilidad de que el K_{abc} construido en la Ref. [10] se comporte como una densidad de momento angular gravitacional en la métrica de Kerr, en otro trabajo reportaremos avances en esta dirección. También hemos iniciado la búsqueda de K_{ijk} para: a) Todo $\mathbf{R}_4$ vacío tipo II y b) cualquier espacio-tiempo tipo D con $R_{ij} \neq 0$.

Referencias

1. G. Ares de Parga, O. Chavoya A., J.L. López B., J. Morales R. and J.L. Fernández Ch., *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 85.
2. C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 379.
3. P. Dolan, P. Choudhury and N. Wheatley, "Applications for the Lanczos wave equations in gravitational radiation", Abstracts, 12th International Conference on General Relativity and Gravitation, Boulder, Colorado, USA (1989).
4. M. Novello, L.R. de Freitas, N.P. Neto and N.F. Svaiter, "Quantization of spin-two field in terms of Fierz variables. The linear case", Preprint (1990).
5. M. Novello and N.P. Neto, "Theory of gravity in Fierz variables", Preprint (1990).
6. G. Ares de Parga, O. Chavoya A. and J.L. López B., *J. Math. Phys.* **30** (1989) 1294.
7. E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
8. F. Bampi and G. Caviglia, **GRG 15** (1983) 375.
9. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 246.
10. V. Gaftoi N., J.L. López B., J. Morales R., T.D. Navarrete G. and G. Ovando Z., *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 498.
11. R.P. Kerr., *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237.
12. W. Kinnersley, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1195.
13. M. Carmeli, *Group theory and general relativity*, McGraw-Hill, N.Y. (1977) Chap. 11.
14. G. Ares de Parga, J.L. López B., T. Matos Ch. and G. Ovando Z., *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 393.
15. G. Ovando Z., "Clasificación de Petrov del campo gravitacional", Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemátaicas I.P.N., México (1985).
16. J.N. Goldberg and R.K. Sachs, *Acta Phys. Polon. Suppl.* **22** (1962) 13.
17. M. Demiański and E. Newman, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **14** (1966) 653.
18. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum and E. Herlt, *Exact solution of Einstein's field equations*, Cambridge University Press (1980) pág. 188.
19. E. Newman, L. Tamburino and T. Unti, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 915.

Abstract. We obtain the Lanczos superpotential for eleven type D vacuum metrics of Kinnersley.