

Introducción al formalismo ADM

Alejandro Corichi y Darío Núñez

*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 70-543, 04510 México, D. F., México*

(Recibido el 18 de abril de 1991; aceptado el 14 de mayo de 1991)

Resumen. Se presentan los conceptos y desarrollos matemáticos que dan lugar a la formulación hamiltoniana de la relatividad general de Einstein introducidos por Arnowitt, Deser y Misner. Se construyen explícitamente los objetos geométricos necesarios y se dan ejemplos de aplicación del formalismo.

PACS: 04.20.Cv; 04.20.Fy

1. Introducción

La formulación de la teoría de la relatividad general dada por Einstein tiene como uno de sus conceptos centrales el Principio de Equivalencia: "las leyes de la física son independientes del estado de movimiento del observador". Este principio implica que dichas leyes deben ser descritas de manera covariante, es decir, independiente del sistema de coordenadas.

Es claro entonces que la formulación covariante es natural y permite expresar a la interacción de la materia con la geometría de manera simple y elegante:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $G^{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía momento.

Una característica de la covariancia de las ecuaciones de Einstein, es que algunas de estas ecuaciones representan constricciones en las variables dinámicas. Dichas constricciones están estrechamente relacionadas con las identidades de Bianchi

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (1.2)$$

que además expresan que estas constricciones se preservan cuando las ecuaciones dinámicas se satisfacen.

A pesar del alto grado estético que da la formulación covariante a las ecuaciones de Einstein en la práctica, el aislar a las ecuaciones con contenido dinámico de las que son constricciones, se ve oscurecido precisamente por esta forma covariante de expresarlas.

Una manera de desentrañar la dinámica de la relatividad general consiste en verla como un problema de Cauchy, es decir, analizar la dinámica como la evolución de una hipersuperficie tridimensional donde estén definidos los campos. Esta manera

de reformular la relatividad general fue desarrollada por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner y tomó su forma completa a principios de los años 60 [1]; se conoce como la formulación ADM de la relatividad general.

Este formalismo ha tenido un desarrollo continuo a lo largo de sus casi 30 años de existencia; sin embargo, el interés por parte de la comunidad de físicos teóricos en la realización de investigaciones sobre aplicaciones del formalismo ADM ha sufrido altibajos. Desde mediados de los años ochenta ha habido nuevamente un creciente interés tanto en el formalismo mismo, como en sus aplicaciones en diferentes áreas. Por mencionar algunos ejemplos: ha servido como base para el desarrollo de las variables de Ashtekar [2]; se ha utilizado en problemas relacionados con la cuantización de la gravedad por medio de integrales de trayectoria [3]; ha servido como medio para determinar, por métodos numéricos, soluciones a las ecuaciones de Einstein [4]; ha sido la base para el desarrollo de la teoría del espacio de espacios [5].

Dada la importancia que ha adquirido la formulación ADM, aunado al hecho de que no se tiene, hasta donde sabemos los autores, una exposición introductoria clara y completa del formalismo y de algunas de sus aplicaciones, los autores decidimos elaborar el presente trabajo que pretende sanar esta carencia. De este modo, en estas páginas se tratará de dar una introducción lo más accesible posible al formalismo de ADM, así como a la formulación hamiltoniana. El presente trabajo tiene la siguiente estructura: en la Sec. 2 se exponen las ideas y conceptos necesarios para la construcción del formalismo ADM, con un mínimo de ecuaciones, con el objeto de ofrecer un panorama global del método. En la Sec. 3 se presenta el desarrollo formal, deduciendo las ecuaciones de manera explícita, y finalmente en la Sec. 4 presentamos algunos ejemplos de aplicación del formalismo y mencionamos algunas áreas que se han desarrollado utilizando el formalismo ADM.

2. Desarrollo conceptual

En esta sección se explican, a grandes rasgos, los pasos a seguir para la construcción del formalismo ADM, con el propósito de tener a este nivel, sin haber entrado en detalles, una idea relativamente clara de cual será el procedimiento a seguir.

Como mencionamos en la introducción, las variables ADM muestran explícitamente el contenido dinámico de las ecuaciones de Einstein y permiten construir un hamiltoniano en el que todos los términos tienen una interpretación relativamente clara, a más de que una vez que se puede definir un hamiltoniano, es posible, en principio, proceder a la cuantización de la teoría una vez que se han aislado los grados de libertad verdaderos. La obtención de las ecuaciones de Einstein a través de la formulación ADM tiene su forma más clara, desde nuestro punto de vista, haciendo uso del principio variacional.

El principio variacional, como uno de los posibles caminos para llegar a las ecuaciones de campo de Einstein, consiste en encontrar los extremales de un funcional de acción, en este caso, de la acción gravitacional. La funcional de acción debe ser expresada como la integral sobre el espacio-tiempo (con el elemento invariante de volumen) de una función escalar. Paralelamente a los trabajos en los que Einstein

diera a conocer su formulación, Hilbert postuló el principio variacional para la teoría gravitacional expresando la acción de la forma

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

donde la densidad lagrangiana está dada por $\mathcal{L} = \sqrt{-g} R$, g es el determinante del tensor métrico y R es el escalar de curvatura.

La integral en (2.1) es sobre la totalidad de la 4-variedad (espacio-tiempo). La acción es un funcional del tensor métrico $S = S[g_{\mu\nu}]$, por lo que el tensor métrico *aceptable* debe ser aquel para el cual la acción sea un extremal. En otras palabras, se debe *variar* la acción respecto a las componentes del tensor $g_{\mu\nu}$ para obtener las ecuaciones de movimiento. Al efectuar tal variación (teniendo cuidado con los términos de frontera) e igualarla a cero, se llega a las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2)$$

La construcción *clásica* de la teoría hamiltoniana a partir de este punto, implicaría la construcción de los momenta canónicamente conjugados a las variables dinámicas, *i.e.* a las 10 componentes del tensor métrico, tomando la derivada parcial de la densidad lagrangiana respecto de las *velocidades*. Pero ¿cómo definimos tales velocidades? Para hacer eso, nos damos cuenta que es necesario privilegiar a alguna de las coordenadas como el *tiempo* para poder definir velocidades. Esto rompe la covariancia, pero además está *cortando* el espacio-tiempo en rebanadas de $x_0 = c$. La complicación algebraica a la que lleva tal procedimiento es enorme. Podemos darnos una idea de dicha complejidad, con el hecho de que P.A.M. Dirac dedicara más de una década en tal intento sin llegar a resultados satisfactorios.

Es relativamente claro que se necesita *separar* en el sentido de hacer diferente, alguna de las coordenadas, o bien una *dirección* en el espacio-tiempo, para la construcción de un hamiltoniano. La manera que se diseñó para hacer esto, fue el considerar *rebanadas* del espacio-tiempo, de manera que cada rebanada sea una hipersuperficie de 3 dimensiones con una métrica positiva definida en ella. Si consideramos el espacio-tiempo como formado por la colección de rebanadas, donde a cada una de éstas se le etiqueta por un número t (no es necesariamente el tiempo, es una etiqueta), donde pedimos que ninguna de las rebanadas se intersecte, podemos entonces pensar en la *evolución* como el cambio de estas hipersuperficies en el parámetro t y cubrir de esta manera el espacio-tiempo completamente. Dotando a cada hipersuperficie de una métrica tridimensional γ_{ij} determinada por la forma como *cortamos* el espacio-tiempo, es posible considerar a la métrica $\gamma_{ij}(t)$ de la hipersuperficie que evoluciona con t , como la variable dinámica.

Además de las seis componentes de γ_{ij} que forman dicha variable dinámica, se deben definir otras 4 variables para tener un total de diez, que es el número de componentes de la antigua variable $g_{\mu\nu}$. Estas cuatro variables se definen de manera

natural al considerar la foliación de hipersuperficies en el espacio-tiempo. Estas nuevas variables que se denotan por N , función *Lapse*, de intervalo, que se relaciona con la separación entre cada hipersuperficie y N^i , funciones *Shift*, de desplazamiento, que se relacionan con el movimiento de un punto al pasar a la siguiente hipersuperficie. Estas cuatro funciones describen como *pegar* las hipersuperficies para formar la foliación.

Posteriormente se procede a reescribir el elemento de línea en términos de las nuevas variables $ds^2 = ds^2[\gamma_{ij}, N, N^i]$, relacionando así a las nuevas variables con las antiguas.

El siguiente paso consiste en reescribir la acción gravitacional en términos de las nuevas variables, es decir, necesitamos expresar el escalar de curvatura del espacio-tiempo, 4R , y el invariante de volumen, $\sqrt{-g}d^4x$, como función de objetos geométricos en la hipersuperficie y de las nuevas variables N, N^i . Para esto es necesario estudiar el encajamiento (embedding) de las hipersuperficies, es decir, la manera en que la hipersuperficie hereda la estructura geométrica, tanto del espacio-tiempo como del encajamiento particular realizado, *i.e.* como se efectuó el corte. Así mismo, es necesario estudiar la forma en que los tensores del espacio-tiempo se proyectan sobre la hipersuperficie y sobre la dirección ortogonal a ella.

En este paso, jugará un papel importante la *curvatura extrínseca* K_{ij} a la hipersuperficie: $K_{ij} = K_{ij}[N, N_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}]$, con “ $\dot{}$ ”, la derivada con respecto al parámetro “ t ” y “ $|$ ” la derivada covariante en la hipersuperficie. Con la ayuda de este objeto se logra escribir el tensor de curvatura de Riemann, y por lo tanto el escalar de curvatura R , como funciones de $\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}N$ y N_{ij} . Queremos enfatizar el hecho de que la nueva densidad lagrangiana no dependerá de las derivadas respecto a t de las funciones *Lapse* y *Shift*. Se llega finalmente a expresar la acción de la forma

$$S[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int dt \int d^3x \sqrt{\gamma} N (K^{ij} K_{ij} - K^2 + R) \tag{2.3}$$

donde $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$ es el nuevo elemento invariante de volumen, con respecto a transformaciones en la hipersuperficie.

La no dependencia de la densidad lagrangiana en las velocidades de N y N^i , nos permite entonces considerarlas como variables dinámicas no relevantes. Este hecho nos sugiere entonces que las verdaderas variables dinámicas son las seis componentes de $\gamma_{ij}(t)$.

De esta manera obtenemos la reformulación del principio variacional de la relatividad general con un contenido dinámico más claro, que es lo que se pretendía. Podemos ir más adelante y construir la densidad hamiltoniana, \mathcal{H} , a partir de la nueva densidad lagrangiana de la manera usual, definiendo los momentos canónicamente conjugados a las γ_{ij} de la forma

$$\pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \tag{2.4}$$

y efectuando la transformación de Legendre solamente sobre las variables dinámicas

relevantes y sus momentos:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}. \quad (2.5)$$

Esta densidad hamiltoniana tiene la forma

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i. \quad (2.6)$$

Las densidades escalares \mathcal{H}_0 y \mathcal{H}_i jugarán un papel muy importante al analizar la dinámica de la teoría.

Como se mencionó al principio de esta sección, en la relatividad general existen constricciones entre las variables (causadas por tratarse de una teoría covariante). Ahora, con la introducción del formalismo ADM es clara la forma que tienen las constricciones y las variables que involucran. De esta manera se tienen cuatro constricciones primarias, es decir, aquellas que son consecuencia de la forma de la densidad lagrangiana: los momentos conjugados a las cuatro variables N y N^i . Estos momentos

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_\mu}, \quad (2.7)$$

son débilmente cero, pues L no depende de \dot{N}_μ (llamamos N^μ al conjunto de variables N y N^i , pero no se implica con esto que sean las componentes de un campo vectorial). Podemos, con la densidad hamiltoniana, reescribir a la densidad lagrangiana donde ahora las variables dinámicas sean tanto los γ_{ab} como los momentos π^{ab} y así tener un principio variacional de primer orden. La acción se escribe entonces

$$S[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int dt \int d^3x (\pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i). \quad (2.8)$$

Esta expresión para la acción está en *forma parametrizada* como consecuencia de la covariancia. Las ecuaciones de movimiento se obtienen al variar respecto a las diferentes variables. Si se varían las N^μ , se obtiene que los cuatro \mathcal{H}_μ deben ser cero.

A estas expresiones, que relacionan a las variables dinámicas (γ_{ij}, π^{ij}) entre sí, se les conoce como *constricciones hamiltonianas*.

De esta manera hemos presentado las ideas fundamentales para la construcción del formalismo ADM así como para la formulación hamiltoniana. En la siguiente sección presentaremos el desarrollo formal, explícito, de las ideas aquí presentadas.

3. Desarrollo formal

3.1 Encajamiento de una hipersuperficie en una variedad

Consideremos el espacio-tiempo dado por una variedad 4-dimensional \mathbf{M} con una métrica definida en ella $g_{\mu\nu}$ de signatura $(-, +, +, +)$. Denotemos las coordenadas

de esta variedad por x^λ . Definimos ahora el encajamiento de una hipersuperficie 3-dimensional \mathbf{m} de la siguiente manera:

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a), \tag{3.1}$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $a = 1, 2, 3$. Estas cuatro funciones son las que determinan el encajamiento. Para que se trate de un encajamiento debemos pedir que la hipersuperficie, con coordenadas intrínsecas ξ^a , no se interseque a sí misma, es decir, el mapeo $X : \mathbf{m} \mapsto \mathbf{M}$ debe ser uno a uno [6].

La métrica de \mathbf{M} induce una métrica sobre \mathbf{m} si consideramos el elemento de línea restringido a la variedad \mathbf{m} :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu \Big|_{\mathbf{m}} \\ &= g_{\mu\nu}(X^\lambda) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} d\xi^a \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} d\xi^b \\ &= \left[g_{\mu\nu}(X^\lambda) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \right] d\xi^a d\xi^b \\ &\equiv \gamma_{ab} d\xi^a d\xi^b, \end{aligned} \tag{3.2a}$$

donde la métrica inducida es entonces

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}. \tag{3.2b}$$

Definamos

$$X_a^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}; \tag{3.3}$$

nótese que X_a^μ es la μ -ésima componente en las coordenadas x^μ del a -ésimo vector de la base coordenada *natural* sobre \mathbf{m} dada por,

$$\mathbf{e}_a \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^a}, \tag{3.4}$$

ya que el vector debe escribirse formalmente como

$$\begin{aligned} X_a^\mu \partial_\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^a}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tenemos entonces que la definición de las componentes de la métrica γ_{ab} sobre \mathbf{m} es la definición natural dada por

$$\begin{aligned}\gamma_{ab} &= g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu \\ &= (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Para el estudio de la dinámica del espacio-tiempo en el marco que aquí interesa, la hipersuperficie encajada debe ser de tipo espacio (*spacelike*), por lo que pedimos que la métrica en ella γ_{ab} sea positiva definida (+ + +).

Los 3 vectores \mathbf{e}_a forman una base para el espacio tangente a la variedad \mathbf{m} en el punto p denotado por $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$. Este espacio es a su vez un subespacio del espacio tangente a \mathbf{M} , $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$. Para completar la base de este espacio construimos el complemento ortogonal al $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$ definido por la métrica $g_{\mu\nu}$. Este subespacio será generado por el vector ortogonal a los \mathbf{e}_a , que denotaremos por \mathbf{n} . Este vector de componentes η^μ en la base $\hat{\partial}_\mu$ satisface

$$g_{\mu\nu} X_a^\mu \eta^\nu = 0;\tag{3.7}$$

pedimos además que esté normalizado,

$$g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu = -1.\tag{3.8}$$

Estas dos condiciones determinan totalmente el vector \mathbf{n} .

Tenemos entonces que el conjunto de vectores $(\mathbf{e}_a, \mathbf{n})$ forma una base de $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$ para cada punto p . Con ellos podemos expresar a cualquier vector del $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$ como la combinación lineal de la base de la hipersuperficie \mathbf{m} y el vector normal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A})^\mu &= (A^a \mathbf{e}_a + A^\perp \mathbf{n})^\mu \\ &= A^a X_a^\mu + A^\perp \eta^\mu,\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde

$$A^\perp = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}).\tag{3.10}$$

Si el vector \mathbf{A} está sobre la hipersuperficie será entonces de la forma $\mathbf{A} = A^a \mathbf{e}_a$. Los *escalares* A^a se comportan como escalares bajo una transformación de coordenadas del espacio-tiempo $X^\mu \mapsto X'^\mu$, ya que ante tales cambios de coordenadas, tanto los vectores \mathbf{e}_a como el vector \mathbf{A} se mantienen fijos, por lo que los A^a no cambian. Sin embargo, los podemos ver como componentes contravariantes de vectores sobre $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$, dado que se transforman como tales ante cambios de coordenadas $\xi^a \mapsto \xi'^a$ en la hipersuperficie:

$$\begin{aligned}A^a \frac{\partial}{\partial \xi^a} &= A^a \frac{\partial \xi'^b}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial \xi'^b} \\ &= A'^a \mathbf{e}'_a,\end{aligned}\tag{3.11}$$

por lo que las nuevas componentes serán

$$A^{i'a} = \frac{\partial \xi^{i'a}}{\partial \xi^{b'}} A^b. \tag{3.12}$$

Definimos la métrica contravariante en \mathbf{m} como la matriz inversa a γ_{ab} , es decir, $\gamma^{ab} \equiv (\gamma_{ab})^{-1}$, de manera que podemos usar la métrica para bajar y subir índices de las componentes:

$$\begin{aligned} A_a &= \gamma_{ab} A^b \\ A^a &= \gamma^{ab} A_b. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Las componentes contravariantes del vector las podemos reescribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} A^a &= \gamma^{ab} A_b \\ &= \gamma^{ab} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_b) \\ &= \gamma^{ab} g_{\mu\nu} X_b^\mu A^\nu \\ &= X_\nu^a A^\nu, \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde estamos definiendo al objeto

$$X_\nu^a \equiv \gamma^{ab} g_{\mu\nu} X_b^\mu, \tag{3.15}$$

que nos permite encontrar la a -ésima componente contravariante del vector \mathbf{A} .

Dado un vector de espacio-tiempo arbitrario \mathbf{A} con componentes A^μ , sabemos ya la manera de encontrar sus proyecciones en la hipersuperficie [$A_a = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_a)$] en la base natural de $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$. Queremos ahora encontrar una relación que nos exprese a esta misma proyección en componentes de la base $\partial\mu$. Para tal fin, observamos que de la igualdad

$$(\mathbf{A})^\mu = A^a X_a^\mu - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \eta^\mu, \tag{3.16}$$

tenemos que la componente μ -ésima del vector proyectado sobre la hipersuperficie es

$$\begin{aligned} A^a X_a^\mu &= A^\mu + A^\nu \eta_\nu \eta^\mu \\ &= A^\nu (\delta^\mu_\nu + \eta_\nu \eta^\mu). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por lo tanto, hemos encontrado el operador de proyección que manda a un vector de espacio-tiempo a uno sobre la hipersuperficie. A este operador lo denotaremos por

$$h^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + \eta^\mu \eta_\nu. \tag{3.18}$$

Es fácil ver que este operador satisface las siguientes propiedades haciendo uso de (3.7) y (3.8)

$$\begin{aligned}\eta^\nu h^\mu{}_\nu &= 0, \\ h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\rho &= h^\mu{}_\rho, \\ h^\mu{}_\mu &= 3.\end{aligned}\tag{3.19}$$

3.2 Derivadas covariantes inducidas

La derivada covariante, definida por la métrica $g_{\mu\nu}$, de un vector sobre \mathbf{m} , en la dirección de otro vector que también esté en \mathbf{m} no será en general un vector tangente a la hipersuperficie. La forma natural de definir una derivada covariante en \mathbf{m} sería pedir que ésta sea también un vector de $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$ [7]. En este punto es conveniente considerar el caso en que las primeras 3 coordenadas x^μ coinciden con las ξ^a , es decir, tenemos que $x^a = \xi^a$. A estas coordenadas se les denomina *coordenadas adaptadas*. Notemos que en este caso, los vectores \mathbf{e}_a coinciden con tres vectores de la base coordenada de $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$, por lo que sus componentes son triviales: $X_a^\mu = \delta_a^\mu$. El tomar este sistema de coordenadas para \mathbf{m} simplifica en general el análisis, ya que las expresiones obtenidas son más simples, sin perderse generalidad. Esto se debe a que siempre es posible tomar a las tres coordenadas intrínsecas de \mathbf{m} como tres de las coordenadas del espacio tiempo. A partir de ahora, en todo el análisis se usarán coordenadas adaptadas. Podemos entonces considerar la derivada covariante (de espacio-tiempo) de un vector sobre la hipersuperficie $\mathbf{A} = A^a \mathbf{e}_a$ en la dirección de los vectores base de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}{}^4\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{A} &\equiv {}^4\nabla_a\mathbf{A} = {}^4\nabla_a(e_b A^b) \\ &= \mathbf{e}_b \frac{\partial A^b}{\partial X^a} + ({}^4\Gamma^\mu{}_{ba}\mathbf{e}_\mu)A^b, \\ &= \mathbf{e}_b \frac{\partial A^b}{\partial X^a} + ({}^4\Gamma^c{}_{ba}\mathbf{e}_c + {}^4\Gamma^0{}_{ba}\mathbf{e}_0)A^b.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Como caso particular, la derivada covariante de los vectores base está dada por

$$\begin{aligned}{}^4\nabla_a\mathbf{e}_b &= {}^4\Gamma^\mu{}_{ba}\mathbf{e}_\mu \\ &= {}^4\Gamma^c{}_{ba}\mathbf{e}_c + {}^4\Gamma^0{}_{ba}\mathbf{e}_0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Tanto en la Ec. (3.20) como en la (3.21), existe un término *fuera* de la hipersuperficie:

$$({}^4\Gamma^0{}_{ba}A^b)(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{n}),\tag{3.22}$$

que, en general, no se anula. Podemos deshacernos de ese término proyectando el vector sobre la hipersuperficie, a manera de tener un vector en $T_p m$. De este modo obtenemos la derivada covariante intrínseca a la 3-geometría de la hipersuperficie. De ahora en adelante, denotaremos al operador asociado a esta derivada por ${}^3\nabla \equiv \nabla$. Tomemos nuevamente un vector sobre la hipersuperficie $\mathbf{A} = A^a \mathbf{e}_a$. En términos de componentes A^a en $T_p m$ la componente contravariante de la derivada covariante se expresa:

$$A^c|_a \equiv {}^3\nabla_a A^c = A^c{}_{,a} + {}^3\Gamma^c{}_{ba} A^b, \tag{3.23}$$

con ${}^3\Gamma^c{}_{ba} = {}^4\Gamma^c{}_{ba}$.

Si ahora consideramos a la c -ésima componente covariante de la derivada del vector \mathbf{A} en la dirección de \mathbf{e}_a , ésta será de la forma

$$({}^3\nabla_a \mathbf{A})_c = \mathbf{e}_c \cdot {}^3\nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{A}, \tag{3.24}$$

que se puede también expresar como

$$\begin{aligned} A_{c|a} &\equiv \mathbf{e}_c \cdot \nabla_a \mathbf{A} \\ &= A_{c,a} - {}^3\Gamma^i{}_{bca} A^b. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Notemos que la forma que toman las expresiones de la derivada tanto en sus componentes covariantes como contravariantes es la misma que las derivadas en el espacio-tiempo. Este hecho se debe a que la derivada covariante en la hipersuperficie está dada por la conexión afín en la variedad m , definida a partir de la métrica en la forma usual [5],

$${}^3\Gamma_{abc} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{ab,c} + \gamma_{ac,b} - \gamma_{bc,a}), \tag{3.26}$$

y con la siguiente interpretación:

$${}^3\Gamma_{abc} \equiv \Gamma_{abc} = \mathbf{e}_a \cdot \nabla_c \mathbf{e}_b. \tag{3.27}$$

Con el objeto de facilitar los cálculos, notemos que la derivada covariante puede igualmente expresarse (para $A^\mu = A^b X_b^\mu$) en términos de componentes de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} A^b|_c &= (A^\mu{}_{;\nu} X_c^\nu)^b \\ &= X_\mu^b (A^\mu{}_{;\nu} X_c^\nu) \\ &= X_\mu^b X_c^\nu A^\mu{}_{;\nu}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Esta expresión puede ser de mayor utilidad práctica. Sin embargo, consideramos que la manera en la que la presentamos inicialmente es conceptualmente más clara.

3.3 Curvatura extrínseca

Definimos ahora la *curvatura extrínseca* a la hipersuperficie como

$$K_{ab} \equiv -\mathbf{e}_b \cdot {}^4\nabla_a \mathbf{n}, \quad (3.29)$$

es decir, la componente (ab) de la curvatura extrínseca es igual a la proyección en la dirección b de la derivada covariante del vector normal en la dirección a (salvo signo). Notemos que la curvatura extrínseca está bien definida sobre la hipersuperficie, ya que el vector ${}^4\nabla_a \mathbf{n}$ es un vector en $\mathbf{T}_p \mathbf{m}$:

$$0 = {}^4\nabla_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}),$$

de donde

$$0 = {}^4\nabla_a \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.30)$$

por lo que K_{ab} es un objeto geométrico de la variedad \mathbf{m} . La noción de curvatura extrínseca no tiene sentido para una variedad en sí misma, sólo toma significado cuando dicha variedad se encuentra encajada en una de dimensión mayor, ya que de la misma definición, la curvatura K_{ab} depende de la geometría de la variedad grande (a través de la derivada covariante de espacio-tiempo y del vector normal a la hipersuperficie).

Una interpretación geométrica de la curvatura extrínseca es que da una medida de qué tanto se *curva* la hipersuperficie respecto de la variedad \mathbf{M} , o en otras palabras, nos dice que tanto los vectores normales para dos puntos cercanos en \mathbf{m} se alejan de ser paralelos (véase la Fig. 1). Existe una forma de reescribir la curvatura que se sigue de la ortogonalidad de \mathbf{n} respecto de la hipersuperficie, es decir, $(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}) = 0$. Tenemos entonces que,

$$K_{ab} = \mathbf{n} \cdot {}^4\nabla_a \mathbf{e}_b. \quad (3.31)$$

Esta última expresión y la Ec. (3.27) nos dicen cómo escribir el vector ${}^4\nabla_a \mathbf{e}_b$ en términos de sus componentes sobre la hipersuperficie y la dirección ortogonal:

$${}^4\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab} \mathbf{n} + {}^3\Gamma_{ba}^c \mathbf{e}_c. \quad (3.32)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Gauss*.

El conocimiento de la derivada covariante de espacio-tiempo de los vectores base \mathbf{e}_a nos permite escribir entonces la derivada de un vector arbitrario sobre $\mathbf{T}_p \mathbf{m}$:

$${}^4\nabla_a \mathbf{A} = A^b|_a \mathbf{e}_b - K_{ab} A^b \mathbf{n}. \quad (3.33)$$

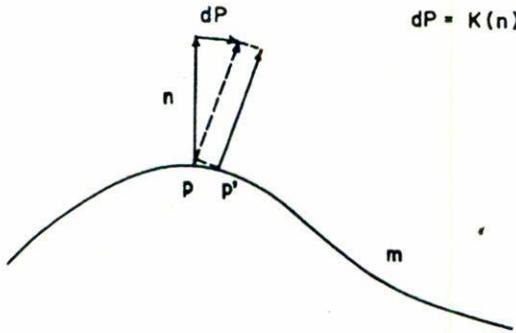


FIGURA 1. Representación esquemática de la curvatura extrínseca. La curvatura extrínseca da una medida de la diferencia entre los vectores normales en puntos cercanos sobre la variedad m .

Para finalizar esta sección escribamos la curvatura extrínseca en componentes,

$$K_{ab} = -X_a^\mu X_b^\nu \eta_{\mu;\nu}, \tag{3.34}$$

de manera que en coordenadas adaptadas toma la forma

$$K_{ab} = -\eta_{a;b}. \tag{3.35}$$

3.4 Descomposición del espacio-tiempo en 3 + 1

Hasta ahora hemos definido de manera precisa la forma de encajar una 3-geometría en el espacio-tiempo, se ha encontrado la métrica γ_{ab} sobre esta hipersuperficie, la derivada covariante sobre ella (por lo tanto la noción de transporte paralelo), así como la descomposición de un vector de espacio-tiempo en componentes proyectadas y ortogonales.

El siguiente paso consiste en afirmar que la totalidad del espacio-tiempo se puede *generar* por las hipersuperficies (cada una de ellas corresponde a un encajamiento) sin que éstas se intersecten. A la totalidad de las hipersuperficies generadoras se le denomina una *foliación*. Como ejemplo, el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 se puede ver como generado por esferas de radio a ; cada esfera es una hipersuperficie ($\dim = 2$) encajada en \mathbb{R}^3 ($\dim = 3$) y la totalidad de las esferas constituye una foliación de \mathbb{R}^3 .

La foliación estará dada por una función t en el espacio-tiempo de forma tal que a cada hipersuperficie le corresponda un valor contante de t , es decir, las hipersuperficies están definidas por $t = \text{cte}$. Recordemos que t es simplemente una etiqueta. En el ejemplo de las esferas, tal función puede ser la función radio $r = r(x, y, z)$ que a cada esfera le asigna $r = a$.

Dada una hipersuperficie con etiqueta $t = t_0$, un punto p sobre ella está caracterizado por sus tres coordenadas ξ^a ; este punto representa un evento. A este

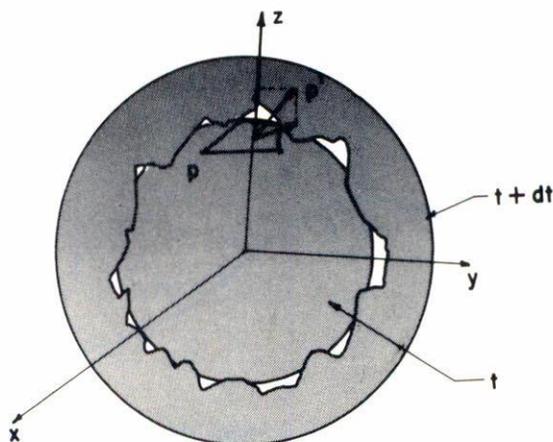


FIGURA 2. Se representan dos esferas de la foliación de \mathbb{R}^3 en las que los puntos p y p' están identificados. Se hace notar que el punto p' no se encuentra necesariamente sobre el polo norte de la esfera exterior.

punto le corresponde un punto p' sobre la hipersuperficie de etiqueta $t_0 + dt$, de tal forma que los dos puntos están *identificados*. La dirección en la que esté el punto p' con respecto a la hipersuperficie t_0 depende de la función t : el punto p' tendrá *las mismas* coordenadas intrínsecas sobre la hipersuperficie $t_0 + dt$ que las que tenía el punto p en la hipersuperficie original, pero sus coordenadas de espacio-tiempo serán diferentes según sea la función t .

Para ilustrar esta idea tomemos al punto p sobre la esfera de radio a como el polo norte (Véase Fig. 2). Este punto tendrá sobre la esfera las coordenadas $(\theta = 0)$. El punto p' , sobre la esfera de radio $a + dr$ que le corresponde a p no tiene porque ser también el polo norte de la esfera (visto como el punto sobre el eje z de \mathbb{R}^3), aunque le correspondan las mismas coordenadas intrínsecas $(\theta = 0)$ sobre su esfera. Habrá entonces un vector que *conecte* a los puntos p y p' basado en el punto p (estamos considerando que dt es *infinitesimal*), que no es necesariamente ortogonal a la hipersuperficie. Para las esferas, el vector será ortogonal sólo si p' es también el polo norte.

La foliación está dada analíticamente por las funciones

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a, t), \tag{3.36}$$

donde el vector que *conecta* los puntos de dos hipersuperficies está dado por ∂_t , con componentes en la base ∂_μ dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{dX^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

sus componentes son por lo tanto $t^\mu \equiv dX^\mu/dt$. De la Sec. 3.1, sabemos cómo descomponer un vector en parte proyectada sobre la hipersuperficie y en parte normal (3.9) y (3.10), por lo que podemos escribir en esa forma al vector ∂_t :

$$\begin{aligned} t^\mu &= -(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\eta^\mu + \gamma^{ab}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_b)X_a^\mu \\ &= -(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\eta^\mu + \gamma^{ab}g_{\nu\lambda}X_b^\lambda t^\nu X_a^\mu \\ &= -(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\eta^\mu + (X_\nu^a t^\nu)X_a^\mu \\ &\equiv N\eta^\mu + N^a X_a^\mu. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Al escalar N se le denomina función *lapse*, y el vector sobre la hipersuperficie N^a se conoce como vector *shift*. Estas, junto con la métrica γ_{ab} constituyen las llamadas variables *ADM*. Como se puede ver claramente del ejemplo de las esferas, la función *lapse* representa qué tanto se *separa* la nueva esfera; la separación en este caso es la misma para cada punto de la esfera ya que todas las hipersuperficies son esferas, pero en el caso general la separación no será constante. Por otro lado, el vector *shift* indica qué tanto *rotó* la esfera, o en otras palabras, qué tanto se *deformó*. La interpretación para las hipersuperficies tipo espacio es similar y entonces toman sentido los nombres de las nuevas variables N y N^a : la función *lapse* da información del *lapso* de tiempo entre los eventos p y p' (para un observador sería el tiempo propio transcurrido), ya que la dirección normal a la hipersuperficie es en algún sentido la dirección temporal (recordemos que el espacio-tiempo tiene signatura $(-, +, +, +)$); el vector *shift* representa qué tanto se *desplaza* el punto p sobre la propia hipersuperficie y por lo tanto, vista ésta globalmente, qué tanto se deforma.

Es claro de la Ec. (3.38) que al especificar las cuatro funciones N^μ queda determinada completamente la foliación de las hipersuperficies que darán lugar al espacio-tiempo; para que éste quede totalmente determinado es necesario encontrar la métrica inducida sobre cada hipersuperficie, la cual estará dada por las ecuaciones dinámicas que se derivarán más tarde.

Veamos ahora la forma de reescribir el elemento de línea del espacio tiempo (es decir, la *distancia* entre dos eventos) en términos de las nuevas variables, es decir, de γ_{ab} y de N, N^a . El elemento de línea entre dos eventos del espacio-tiempo $p(x^a, t)$ y $p'(x^a + dx^a, t + dt)$, lo descompondremos en dos partes: el cuadrado de la distancia sobre la hipersuperficie que contiene a p menos el cuadrado del tiempo propio entre hipersuperficies:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt) - (N dt)^2 \\ &= (N_a N^a - N^2)dt^2 + 2N_a dx^a dt + \gamma_{ab} dx^a dx^b \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde $(dx^a + N^a dt)$ es el desplazamiento sobre la hipersuperficie base y $N dt$ el tiempo propio entre ellas (véase la Fig. 3). Esto se puede ver más claramente si notamos que en el caso en que $N^a = 0$ el elemento de línea tendrá contribuciones de: i) la distancia sobre la hipersuperficie base y ii) el tiempo propio, ya que la

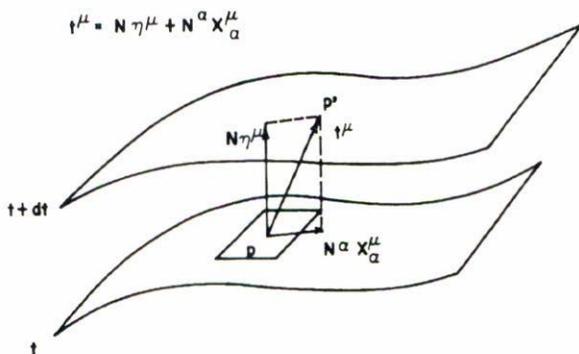


FIGURA 3. Se muestran las proyecciones del vector ∂_t sobre la hipersuperficie t y sobre el vector normal \mathbf{n} , identificándose éstas con las funciones N^a y N , respectivamente.

evolución de las hipersuperficies es meramente temporal (t^μ es en este caso normal a la hipersuperficie). De la última expresión (3.39) se desprende la relación entre las componentes covariantes de la métrica $g_{\mu\nu}$ en coordenadas adaptadas y las variables γ_{ab}, N, N^a :

$$\begin{aligned} g_{00} &= (N^a N_a - N^2), \\ g_{0a} &= N_a, \\ g_{ab} &= \gamma_{ab}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Las componentes contravariantes se encuentran invirtiendo la matriz $g_{\mu\nu}$, de forma que tenemos

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^b}{N^2} \\ \frac{N^a}{N^2} & \gamma^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

El elemento de volumen esta dado por

$$\sqrt{-g} d^4 x = N \sqrt{\gamma} d^3 x dt. \tag{3.42}$$

Las primeras dos ecuaciones de (3.40) nos dicen que las componentes $g_{0\mu}$ de la métrica de espacio-tiempo y las variables N^μ están relacionadas directamente, por lo que podemos reemplazar a las primeras por estas últimas. Se desprende de igual forma que las componentes $g_{0\mu}$ son variables dinámicas no relevantes, puesto que las N^μ deben ser impuestas desde fuera para construir la foliación.

3.5 Escalar de curvatura

Habiendo introducido el nuevo conjunto de variables ADM, estamos ahora en posibilidad de reescribir el escalar de curvatura 4R en términos de estas variables, con el objeto de reescribir el principio variacional. Como primer paso relacionaremos a la curvatura extrínseca definida en la Sec. 3.3 con las variables ADM. De la Ec. (3.35) podemos escribir

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -\eta_{a;b} \\ &= -\eta_{a,b} + {}^4\Gamma^\mu{}_{ab}\eta_\mu \end{aligned} \tag{3.43}$$

en coordenadas adaptadas $\eta_\mu = -N(1, 0, 0, 0)$, por lo que usando las Ecs. (3.41), (3.26) y (3.25) tenemos

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -N{}^4\Gamma^0{}_{ab} \\ &= -N(g^{00}{}^4\Gamma_{0ab} + g^{0c}\Gamma_{cba}) \\ &= -N \left[-\frac{1}{2N^2}(N_{a,b} + N_{b,a} - \dot{\gamma}_{ab}) + \frac{1}{N^2}N^c\Gamma_{cba} \right] \\ &= \frac{1}{2N}(N_{a|b} + N_{b|a} - \dot{\gamma}_{ab}). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Notemos que K_{ab} no depende de las derivadas respecto a t de N^μ .

A continuación reescribiremos al tensor de Riemann ${}^4R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ restringido a la hipersuperficie, es decir, de componentes ${}^4R^a{}_{bcd}$ en términos del tensor de Riemann intrínseco a la hipersuperficie (construido a partir de la derivada covariante intrínseca a ésta), ${}^3R^a{}_{bcd}$, así como de la curvatura extrínseca [8]. Para esto cambiaremos de base del espacio-tiempo; en vez de tomar el vector $\mathbf{e}_0 = \partial_t$ como hasta ahora, tomaremos el vector normal \mathbf{n} .

El tensor de Riemann está definido por

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu, \tag{3.45}$$

por lo que si el vector \mathbf{A} se toma en la hipersuperficie (en particular un vector base) y las derivadas son también en la dirección de los vectores \mathbf{e}_a tenemos, usando la ecuación de Gauss (3.32), que la segunda derivada covariante será

$$\begin{aligned} {}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} {}^4\nabla_{\mathbf{e}_b} \mathbf{e}_c &= {}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} \left[-K_{cb}\mathbf{n} + {}^3\Gamma^d{}_{cb}\mathbf{e}_d \right] \\ &= -K_{cb,a}\mathbf{n} - K_{cb}{}^4\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{n} + {}^3\Gamma^d{}_{cb,a}\mathbf{e}_d + {}^3\Gamma^d{}_{cb}\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{e}_d \\ &= -K_{cb,a}\mathbf{n} + K_{cb}K_a^d\mathbf{e}_d + {}^3\Gamma^d{}_{cb,a}\mathbf{e}_d \\ &\quad + {}^3\Gamma^d{}_{cb} \left[-K_{da}\mathbf{n} + {}^3\Gamma^e{}_{da}\mathbf{e}_e \right]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Calculando de igual forma ${}^4\nabla_{\mathbf{e}_b} {}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{e}_c$ y tomando la diferencia tenemos

$$\begin{aligned} {}^4[\nabla_a, \nabla_b] \mathbf{e}_c &= -\mathbf{n} \left[K_{cb,a} - K_{db} {}^3\Gamma^d_{ca} - K_{dc} {}^3\Gamma^d_{ba} - K_{ca,b} + K_{da} {}^3\Gamma^d_{cb} + K_{dc} {}^3\Gamma^d_{ab} \right] \\ &\quad + \left[K_{cb} K_a^d - K_{ca} K_b^d + {}^3R^d_{cab} \right] \mathbf{e}_d \\ &= \mathbf{n} \left[K_{ca|b} - K_{cb|a} \right] + \left[{}^3R^d_{cab} + K_{cb} K_a^d - K_{ca} K_b^d \right] \mathbf{e}_d. \end{aligned} \quad (3.47)$$

De la Ec. (3.47) tenemos directamente las proyecciones sobre la hipersuperficie y la normal, por lo que podemos escribir

$${}^4R^d_{cab} = {}^3R^d_{cab} + K_{cb} K_a^d - K_{ca} K_b^d, \quad (3.48)$$

que es conocida como la ecuación de *Gauss-Codazzi* y

$${}^4R^\perp_{cab} = K_{ca|b} - K_{cb|a}, \quad (3.49)$$

que es la ecuación de *Codazzi-Mainardi*.

El escalar de curvatura 4R está dado por,

$${}^4R \equiv {}^4R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = {}^4R^{ab}{}_{ab} + 2{}^4R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp}. \quad (3.50)$$

Conocemos ya el primer término de esta última expresión, pero hace falta encontrar el segundo. Utilizaremos el lenguaje de componentes puesto que se simplifican los cálculos.

El conmutador de las derivadas covariantes del vector normal está dado en términos del tensor de Riemann por,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \eta^\nu = {}^4R^\nu{}_{\rho\alpha\beta} \eta^\rho \equiv R^\nu{}_{\perp\alpha\beta}, \quad (3.51)$$

que en componentes se escribe:

$$R^\perp{}_{\nu\alpha\beta} = \eta_{\nu;\alpha\beta} - \eta_{\nu;\beta\alpha}. \quad (3.52)$$

Si ahora proyectamos el tercer índice del tensor sobre la normal, y contraemos los índices segundo y cuarto, obtenemos,

$$\begin{aligned} R^{\perp\mu}{}_{\perp\mu} &\equiv \eta^\nu R^{\perp\mu}{}_{\nu\mu} \\ &= \eta^\nu (\eta^\lambda{}_{;\lambda\nu} - \eta^\lambda{}_{;\nu\lambda}) \\ &= (\eta^\nu \eta^\lambda{}_{;\lambda})_{;\nu} - (\eta^\nu \eta^\lambda{}_{;\nu})_{;\lambda} - \eta^\nu{}_{;\nu} \eta^\lambda{}_{;\lambda} + \eta^\nu{}_{;\mu} \eta^\mu{}_{;\nu} \\ &= (\eta^\lambda \eta^\nu{}_{;\nu} - \eta^\nu \eta^\lambda{}_{;\nu})_{;\lambda} - \eta^\nu{}_{;\nu} \eta^\mu{}_{;\mu} + \eta^\nu{}_{;\mu} \eta^\mu{}_{;\nu}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

sin embargo,

$$\begin{aligned} \eta^\mu{}_{;\mu} &= -K^a{}_a \equiv -K, \\ \eta^\nu{}_{;\mu} \eta^\mu{}_{;\nu} &= K_{ab} K^{ab}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

con lo que podemos escribir,

$$R^\perp{}^\mu{}_{\perp\mu} = K_{ab} K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}, \tag{3.55}$$

con $\Delta^\lambda = \eta^\lambda \eta^\nu{}_{;\nu} - \eta^\nu \eta^\lambda{}_{;\nu}$.

Usando las ecuaciones (3.50), (3.48) y (3.55) expresamos entonces el escalar de curvatura como:

$$\begin{aligned} {}^4R &= {}^3R + K^2 - K_{ab} K^{ab} + 2 \left(K_{ab} K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda} \right) \\ &= {}^3R + K_{ab} K^{ab} - K^2 + 2(\Delta^\lambda)_{;\lambda}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

En esta sección hemos expresado tanto el tensor de Riemann como el escalar de curvatura en función de las nuevas variables, con lo que podemos reescribir el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, y por lo tanto las ecuaciones de Einstein en el vacío: $G_{\mu\nu} = 0$. Este procedimiento se utiliza para resolver las ecuaciones en forma numérica (véase [4]). Nosotros no seguiremos este camino, ya que estamos más interesados en la construcción de un hamiltoniano para lo cual se necesita considerar un principio variacional.

3.6 Principio variacional

Habiendo definido el nuevo conjunto de variables ADM y reescrito el escalar de curvatura, así como el invariante de volumen en términos de ellas, podemos entonces reformular el principio variacional que da lugar a las ecuaciones de campo. La acción del campo gravitacional está dada por la expresión

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} R, \tag{3.57}$$

que se puede, entonces, reexpresar haciendo uso de los resultados de las secciones anteriores como

$$S[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int dt \int d^3x \sqrt{\gamma} N ({}^3R + K_{ab} K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}). \tag{3.58}$$

Es necesario hacer énfasis en el hecho de que no solamente la expresión para el lagrangiano se ha modificado con la nueva formulación, sino que también es necesario hacer una reinterpretación de la integral de acción. En la Ec. (3.57) la integral es sobre la variedad completa, es decir, sobre la totalidad del espacio-tiempo. Esto

implica que cuando se realiza la variación, los términos que están evaluados en la frontera se cancelan por el hecho de que se pide que la variación de la métrica ($\delta g_{\mu\nu}$) y de sus derivadas sean cero sobre la frontera de la variedad (o sea, que el valor de $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas están determinados sobre la frontera). En general, no se tiene *a priori* una topología para la variedad \mathbf{M} , por lo que no está determinado de antemano si ésta tiene frontera o no.

En la expresión (3.58) se tiene una interpretación diferente, ya que en ésta se encuentran dos integraciones de naturaleza distinta: la primera integral es sobre la hipersuperficie \mathbf{m} , de manera que la función lagrangiana está dada por una integral sobre la hipersuperficie de la forma

$$\mathbf{L} = \int d^3x \sqrt{\gamma} N ({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}), \quad (3.59)$$

por lo que la acción está dada por la integral de la función lagrangiana entre un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_1 :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L} dt. \quad (3.60)$$

En otras palabras, se está especificando la métrica sobre la hipersuperficie inicial (t_0) y sobre la final (t_1), por lo que la *variación* será sobre todas las posibles hipersuperficies (sus métricas) que *conecten* a las dos hipersuperficies de los extremos. La divergencia que aparece en la integral que define a la lagrangiana se transforma en una integral sobre la frontera de la variedad \mathbf{m} . Estos términos no aportan ninguna información para la dinámica del sistema, y por lo tanto, pueden despreciarse.

Es conveniente precisar que esta expresión para la acción de la gravitación está limitando la topología del espacio-tiempo, ya que ella será entonces de la forma $(\mathbf{m} \times \mathbf{R})$, misma que se mantiene durante toda la evolución de las hipersuperficies. Es decir, no se permiten cambios de topología de las hipersuperficies (por ejemplo, un universo será siempre cerrado o siempre abierto).

3.7 Formulación hamiltoniana

Hasta ahora hemos reescrito el funcional de acción de manera que podemos encontrar las ecuaciones de campo en el vacío, tomando la variación de la acción e igualándola a cero ($\delta S = 0$). La densidad lagrangiana \mathcal{L} contiene derivadas espaciales de segundo orden de γ_{ab} , por lo que en principio, las ecuaciones de Euler-Lagrange deberían ser de cuarto orden. Al efectuar la variación (véanse [7] y [9]), los términos de derivadas mayores se anulan como términos a la frontera, por lo que las ecuaciones de campo resultantes son de segundo orden (como se esperaba que fuesen las ecuaciones dinámicas).

Si se quiere reducir el orden de las ecuaciones de campo con el objeto de tener exclusivamente ecuaciones de primer orden, existen varios caminos posibles. El primero consiste en tomar la acción *à la Palatini* [7], que consiste en considerar

tanto a las 10 componentes de $g_{\mu\nu}$ como a las 40 componentes de la conexión afín $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ como variables independientes y hacer las variaciones respecto de todas ellas. Con este procedimiento se obtienen las mismas ecuaciones de Einstein así como la relación entre la métrica y las conexiones.

El otro camino consiste en definir nuevas variables, los momentos, a partir de la lagrangiana, y tratar de reescribir la lagrangiana en términos de las variables originales y los momentos, tomándolas como variables independientes (el número de variables independientes se duplica), donde uno de los pasos intermedios involucra la construcción de la función hamiltoniana. Este último paso en general no se puede hacer cuando existen constricciones que ligan a las variables, por lo que se ha desarrollado toda una teoría para tratar tales sistemas, conocidos como sistemas singulares o constreñidos (véanse [10], [11] y [12]).

Con el formalismo que hemos desarrollado hasta ahora, la construcción del hamiltoniano se podrá hacer de forma directa, ya que como se ha mencionado anteriormente, la densidad lagrangiana no depende de las derivadas temporales de las N^μ , haciendo que estas variables no formen parte de la dinámica del campo.

Definimos entonces a los momentos canónicamente conjugados a las seis γ_{ab} por la siguiente expresión,

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}}, \tag{3.61}$$

Los momentos asociados a las variables N^μ serán claramente iguales a cero,

$$P^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_\mu} = 0. \tag{3.62}$$

Con el objeto de calcular los momentos de la definición (3.61), introducimos un objeto con 4 índices de la forma

$$G^{abcd} \equiv \sqrt{\gamma} \left[\frac{1}{2} (\gamma^{ac} \gamma^{bd} + \gamma^{ad} \gamma^{bc}) - \gamma^{ab} \gamma^{cd} \right]. \tag{3.63}$$

A este objeto se le denomina *supermétrica*. Podemos entonces reescribir la lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = N(G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{\gamma}^3 R). \tag{3.63}$$

Construimos entonces a los momentos a partir de su definición y de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} \\ &= N \left(2G^{efcd} K_{cd} \frac{\partial K_{ef}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} \right) \end{aligned}$$

de la Ec. (3.44) se sigue que

$$\frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ef}} = -\frac{1}{2N} \left[\frac{1}{2} (\delta_a^e \delta_b^f + \delta_b^e \delta_a^f) \right] \equiv -\frac{1}{2N} \delta_{ab}^{ef}, \quad (3.64)$$

por lo que se tiene que

$$\pi^{ab} = -G^{abcd} K_{cd}. \quad (3.65)$$

Como se puede ver de la definición de la supermétrica y de la última expresión, los momentos π^{ab} son densidades tensoriales de peso uno sobre la hipersuperficie.

Para realizar la transformada de Legendre de la lagrangiana y definir el hamiltoniano, necesitamos *despejar* las velocidades como funciones de los momentos. Las velocidades \dot{N}^μ son funciones arbitrarias y por lo tanto, no se pueden expresar en términos de las coordenadas y los momentos. Las velocidades de la métrica γ_{ab} se podrán expresar de tal forma si es posible invertir la Ec. (3.65), es decir, expresar K_{ab} en términos de los momentos. Para esto necesitamos encontrar la inversa de la supermétrica, o sea, el objeto G_{abcd} tal que al contraerlo con la supermétrica de la identidad

$$G_{abcd} G^{cdef} = \delta_{ab}^{ef}. \quad (3.66)$$

La forma más general que se puede pedir para la inversa es

$$G_{abcd} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[A \frac{1}{2} (\gamma_{ac} \gamma_{bd} + \gamma_{ad} \gamma_{bc}) + B \gamma_{ab} \gamma_{cd} \right]. \quad (3.67)$$

Insertando (3.67) en (3.66) se encuentra que los valores que deben tomar los coeficientes A y B son $A = 1, B = -\frac{1}{2}$. La curvatura extrínseca se podrá expresar entonces como

$$K_{ab} = -G_{abcd} \pi^{cd}. \quad (3.68)$$

De las Ecs. (3.44) y (3.68) escribimos las velocidades $\dot{\gamma}_{ab}$ de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ab} &= N_{a|b} + N_{b|a} - 2NK_{ab} \\ &= N_{a|b} + N_{b|a} + 2NG_{abcd} \pi^{cd}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Estamos entonces en posibilidad de escribir el hamiltoniano donde la transformación de Legendre se hará solamente sobre las variables $\dot{\gamma}_{ab}$ tomando entonces el hamiltoniano la siguiente forma,

$$\mathbf{H} = \int d^3x (\pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - \mathcal{L}). \quad (3.70)$$

La densidad hamiltoniana es entonces

$$\begin{aligned}
 (\pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - \mathcal{L}) &= -G^{abcd} K_{cd} (N_{a|b} + N_{b|a} - 2N K_{ab}) - N (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{\gamma}^3 R) \\
 &= N \sqrt{\gamma} (K_{ab} K^{ab} - K^2 - R) - 2\pi^{ab} N_{a|b}.
 \end{aligned}
 \tag{3.71}$$

El segundo término se puede integrar por partes (teniendo en cuenta que se trata de densidades tensoriales) quedando el hamiltoniano de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \int d^3x \left[N \sqrt{\gamma} (K_{ab} K^{ab} - K^2 - R) + N^a (2\pi_{a|b}^b) \right] \\
 &\equiv \int d^3x [N \mathcal{H}_0 + N^a \mathcal{H}_a].
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0 &= \sqrt{\gamma} (K_{ab} K^{ab} - K^2 - R), \\
 \mathcal{H}_a &= 2\pi_{a|b}^b.
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

Podemos entonces escribir la densidad lagrangiana de primer orden a partir de (3.70) y (3.72)

$$\mathcal{L}(\gamma_{ab}, \dot{\gamma}_{ab}, \pi^{ab}, N, N^a) = \pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - N \mathcal{H}_0 + N^a \mathcal{H}_a.
 \tag{3.74}$$

La integral de acción a partir de esta lagrangiana, será funcional de la métrica espacial γ_{ab} así como de los momentos π^{ab} y las funciones N^μ . De la forma de la lagrangiana (3.74) son de notarse dos puntos: las funciones N^μ juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y la acción está escrita en forma ya parametrizada. Aclaremos estos puntos. Si variamos respecto a las funciones N^μ encontramos que tanto \mathcal{H}_0 como \mathcal{H}_a son cero por lo que las N^μ al estar multiplicando a funciones que toman el valor cero tienen la función de los multiplicadores que introdujo Lagrange y son, en principio, funciones arbitrarias. Las ecuaciones de movimiento para las demás variables dinámicas estarán dadas a partir de las variaciones de la acción respecto de ellas. Las variables γ_{ab} y π^{ab} no son independientes entre ellas, ya que están ligadas por las cuatro relaciones $\mathcal{H}_\mu = 0$. A estas relaciones se les conoce con el nombre de *constricciones hamiltonianas*. La teoría está en forma parametrizada ya que la lagrangiana de primer orden no está en forma *canónica*, forma que tendría si los términos del *hamiltoniano* contuvieran exclusivamente variables contenidas en los términos $(\pi^{ab}, \dot{\gamma}_{ab})$. Como en este caso los términos hamiltonianos contienen a las N^μ , se dice que la acción no está en forma canónica. Esto ocurre cuando la teoría está en forma parametrizada.

Para ilustrar esta distinción entre forma canónica y parametrizada, tomemos una partícula no relativista con coordenadas q^i y velocidades respecto al tiempo $q^{i'}$. La acción de primer orden se escribe

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (q^{i'} p_i - H(p_i, q^i)) dt. \quad (3.75)$$

que está en forma canónica. Si ahora tomamos al tiempo como otra coordenada q_0 , y hacemos que todas las coordenadas sean funciones de un parámetro τ , podemos identificar al hamiltoniano H como un momento canónicamente conjugado a la coordenada q_0 de la forma

$$p_0 = -H(q^i, p_i), \quad (3.76)$$

De esta igualdad se desprende que el momento p_0 no es independiente de las demás variables; la Ec. (3.76) es una *constricción* entre las variables. La acción (3.75) se puede reescribir después de haber elevado a la categoría de coordenada al tiempo de la siguiente forma

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \dot{q}^\mu p_\mu d\tau, \quad (3.77)$$

Sin embargo, existe la constricción (3.76) entre las variables, que se puede escribir como $\mathcal{H} \equiv p_0 - H(q^i, p_i) = 0$. Este término debe agregársele al lagrangiano junto con un multiplicador arbitrario N , para tener el lagrangiano completo de manera que la acción sea de la forma

$$L = \dot{q}^\mu p_\mu - N\mathcal{H}. \quad (3.78)$$

Este lagrangiano está en forma parametrizada. Para pasar a la forma canónica, sería necesario hacer los pasos en sentido inverso. El primer paso consiste en despejar de \mathcal{H} o *resolver* la constricción haciendo $p_0 = -H$. Esto hace que la acción sea

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\dot{q}^i p_i - H q^0) d\tau, \quad (3.79)$$

que se puede reescribir de forma tal que desaparezca la dependencia en el parámetro τ ,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dq^i}{dq^0} p_i - H \right) dq^0. \quad (3.80)$$

Esta forma de la acción es independiente del parámetro τ (ya que no aparece en la expresión) y por lo tanto no se modificará ante un cambio de parámetro. En la práctica, lo que se hace para pasar de (3.79) a (3.80) es especificar una relación entre el parámetro y la coordenada q^0 . Se puede hacer esto ya que se

tiene la libertad de elegir arbitrariamente al parámetro (libertad de gauge). Si se impone una *condición coordinada* de la forma $q^0 = \tau$ por ejemplo, la acción toma la forma (3.80) con el cambio de notación $q^0 \mapsto \tau$. Con este ejemplo se puede, entonces, afirmar que en términos generales, la manera de reducir una acción parametrizada a la forma canónica es insertar la solución de las constricciones e imponer condiciones coordinadas.

La acción de la gravitación está expresada en la forma de la Ec. (3.78). Para resolver las ecuaciones, como primer paso, habría que transformar a la forma canónica, es decir, al equivalente de la Ec. (3.75), o en otras palabras, resolver las constricciones e imponer condiciones coordinadas. Este procedimiento sólo ha sido posible en casos muy particulares (véanse las aplicaciones), pero en general sólo se ha hecho *formalmente* [11].

4. Aplicaciones

En esta sección presentamos brevemente algunos de los campos que se han desarrollado utilizando el formalismo ADM.

4.1 Gravedad cuántica

Hasta hace poco tiempo, una de las principales motivaciones para la construcción de una formulación hamiltoniana, es decir, la identificación de un conjunto de variables canónicamente conjugadas a partir de una función lagrangiana y la obtención del hamiltoniano como la transformada de Legendre en las velocidades de la función lagrangiana, consistía en la posibilidad de cuantizar la teoría. Esto es, asociar a cada variable canónica un operador sobre un espacio vectorial e imponer reglas de conmutación entre pares de variables conjugadas. El operador hamiltoniano toma ahora el papel de generador de translaciones en el tiempo, es decir, es responsable de la dinámica del sistema.

Sin embargo, para la relatividad general, el procedimiento de cuantización no es directo a partir del hamiltoniano construido, ya que existen 4 constricciones (3.73) entre las variables canónicas. Para tratar de salvar esta dificultad, se han seguido dos caminos diferentes, que son a grandes rasgos: 1) Tratar de aislar los verdaderos grados de libertad de la gravitación (que, a partir de la linearización de las ecuaciones, se sabe que es de dos grados por punto), objetivo que tenían en mente ADM al comenzar su programa. Una vez aislados los grados de libertad, se procedería a su cuantización. Este procedimiento como se mencionó anteriormente sólo se ha logrado realizar de manera formal. 2) Considerar a todas las variables, pero imponer condiciones sobre el vector de estado dadas por las cuatro constricciones, esto es, pedir que las constricciones (ahora como operadores) al actuar sobre el vector de estado, lo anulen. Este es el punto de vista adoptado por Dirac y De Witt.

En años recientes se ha tratado de cuantizar el campo gravitacional utilizando la idea de suma sobre trayectorias, es decir, se consideran todas las posibles evoluciones

de las 3-geometrías entre dos de ellas fijas, dando a cada una de aquellas un *peso* proporcional a la acción clásica evaluada a lo largo de esta trayectoria [3].

Asimismo, se han construido formulaciones canónicas de la relatividad, alternativas a la ADM, como por ejemplo el formalismo de Ashtekar [2].

4.2 Geometrodinámica

Geometrodinámica es el nombre que se la ha dado a la relatividad general cuando es vista como una teoría dinámica [13]. Como se mencionó en la introducción, la formulación covariante de la relatividad general no es la más apropiada para apreciar el carácter dinámico de esta. La introducción de nuevas variables y el considerar al espacio-tiempo formado por la evolución de métricas $\gamma_{ij}(t)$ nos sugiere entonces quién es la variable dinámica que evoluciona. Sin embargo, al analizar la expresión que se obtuvo para la acción (3.58), se observa que esta es invariante ante difeomorfismos en la hipersuperficie $\mathbf{m}(t)$ por lo que no depende del sistema de coordenadas usado en ésta. Este hecho sugiere que la propiedad verdaderamente relevante para cada hipersuperficie $\mathbf{m}(t)$ no es la métrica definida en ella, sino la propia *geometría* intrínseca de la variedad.

Esta conclusión es relativamente clara si se considera el ejemplo presentado en la Sec. 3 con las esferas generando al espacio euclideo. Si se quiere ver a \mathbb{R}^3 formado por el conjunto de esferas, no importa qué sistema de coordenadas intrínsecas se de a cada esfera, siempre que siga siendo una esfera.

El espacio-tiempo es, entonces, la evolución (o el conjunto si se prefiere ver así) de 3-geometrías. El objeto que evoluciona es la geometría de una 3-variedad \mathbf{m} y ésta es la variable dinámica de la relatividad general, por lo que queda claro el nombre de geometrodinámica.

Si lo que evolucionan son 3-geometrías es natural preguntarse: ¿en que espacio evolucionan las geometrías? La respuesta es casi tonta: “En el espacio de las 3-geometrías”. Este es el conjunto en el que cada *punto* es una 3-geometría y en él están todas las 3-geometrías posibles para la variedad \mathbf{m} . A este espacio se le conoce como *Superespacio* [13] y se denota por \mathcal{G} .

Existe una analogía entre la evolución de una partícula y de una geometría. La partícula *vive* en el espacio-tiempo y su evolución es una trayectoria en él. De igual forma, una 3-geometría *vive* en el superespacio y su evolución es una trayectoria en él. Esta analogía no es, sin embargo, totalmente literal, ya que las trayectorias en el superespacio, que definen el espacio-tiempo, no son curvas unidimensionales (parametrizadas por los reales), sino que son subvariedades del superespacio. Veamos con un poco de detalle la razón por la que no son curvas unidimensionales.

Supongamos que se tiene un espacio-tiempo *conocido*. Las foliaciones que se pueden construir para tal espacio-tiempo son infinitas, ya que habrá una foliación para cada función $t(x^\mu)$ que se defina en el espacio-tiempo tal que las hipersuperficies dadas por $t = \text{cte.}$ no se intersecten. Es claro que el número de funciones que se pueden definir es no numerable. Cuando se elige tal función, es decir, se escoge una foliación particular, el espacio-tiempo estará así formado por una *curva* de hipersuperficies parametrizadas por el valor de t . El espacio-tiempo es entonces una

curva, una vez elegida la foliación. Resulta también claro del argumento expuesto, que el conjunto de todas las foliaciones para tal espacio-tiempo representa una subvariedad del superespacio. A tal subvariedad se le conoce con el nombre de *hiperespacio* [14].

4.3 Cosmología

A finales de los años sesenta y principios de los setenta, se desarrolló el estudio de modelos cosmológicos, en particular homogéneos, con el uso de un formalismo hamiltoniano [15]. Este método resulta particularmente útil ya que en algunos casos es posible encontrar una solución explícita de las ecuaciones de Einstein, y en general permite hacer un análisis cualitativo más rico de la dinámica de los modelos. Entre los modelos más estudiados están aquellos en los que las funciones *lapse* y *shift* toman los valores $N = 1$ y $N_i = 0$, las hipersuperficies de $t = \text{cte.}$ son aquellas que aceptan grupos de movimiento definidos en ellas (hay un total de nueve) y se conocen como *universos tipo Bianchi*.

La métrica general para los modelos homogéneos, en general, se puede escribir de la forma

$$ds^2 = -dt + \gamma_{ij}(t) dx^i dx^j. \tag{4.1}$$

El procedimiento que se describió al final de la Sec. 3, que consiste en resolver las constricciones y elegir condiciones coordenadas con el objeto de pasar la acción a la forma canónica (teniéndose así un hamiltoniano *verdadero*) ha sido posible en algunos casos donde se definen las *coordenadas* en función de γ_{ij} y π^{ij} , llegándose a expresar al hamiltoniano en términos de estas coordenadas (véase [15]).

Las 3-geometrías involucradas en la métrica (4.1) dependen exclusivamente de la coordenada tiempo, por lo que el problema tiene un número finito de grados de libertad, ya que las coordenadas del problema dependen solamente del parámetro tiempo y no de todas las variables como en el caso de espacios tiempo más generales. En el lenguaje del superespacio, las 3-geometrías de los modelos cosmológicos son un subconjunto de aquel, bautizado por Misner con el nombre de *minisuperespacio* [16].

En el minisuperespacio, donde el número de grados de libertad es a lo más cinco, es posible preguntarse si existe alguna relación entre las ecuaciones de Hamilton, derivadas a partir del hamiltoniano y la ecuación de geodésicas asociada a la *supermétrica*.

A partir de la restricción $\mathcal{H}_0 = 0$ definida en (3.37), podemos definir un hamiltoniano (igualado a cero) a tal ecuación y reescribir

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\pi_A \pi_B G^{AB} - R), \tag{4.2}$$

donde los índices (*ij*) se reemplazaron por *A*. Notemos que la forma del hamiltoniano en (4.2) es similar al hamiltoniano de la partícula libre en el espacio-tiempo con métrica G^{AB} , con la diferencia de que en (4.2) el término de *masa* puede depender en general de las coordenadas g^A .

Las ecuaciones de Hamilton para el hamiltoniano serán entonces

$$\begin{aligned} \frac{dg^A}{d\lambda} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi_A} = G^{AB} \pi_B \\ \frac{d\pi_A}{d\lambda} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial g^A} = -\frac{1}{2} \pi_C \pi_B G^{CB}{}_{,A} + \frac{1}{2} R_{,A} \end{aligned} \quad (4.3)$$

A partir de estas ecuaciones derivamos

$$\frac{d^2 g^A}{d\lambda^2} = G^{AB}{}_{,C} \pi_B G^{CD} \pi_D + G^{AB} \left(-\frac{1}{2} \pi_D \pi_E G^{DE}{}_{,B} + \frac{1}{2} R_{,B} \right),$$

que se puede reescribir como

$$\frac{d^2 g^A}{d\lambda^2} + \left[\frac{1}{2} G^{AB} (G_{BD,C} + G_{BC,D} - G_{DC,B}) \frac{dg^C}{d\lambda} \frac{dg^D}{d\lambda} \right] = \frac{1}{2} R_{,A},$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2 g^A}{d\lambda^2} + \Gamma^A{}_{DC} \frac{dg^C}{d\lambda} \frac{dg^D}{d\lambda} = \frac{1}{2} R_{,A}. \quad (4.4)$$

Es decir, se obtiene la ecuación de geodésicas para la métrica G^{AB} con un término forzante extra. Esta ecuación permite, de alguna forma, relacionar a las ecuaciones de Hamilton con la de geodésicas a la que se le agregó un *potencial* $-R$, responsable de una fuerza *extra*. Si de alguna manera este término fuera despreciable, tendríamos prácticamente que el comportamiento del modelo cosmológico sería el de una partícula libre en un espacio curvo.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Jemal Guven (ICNUNAM) las valiosas discusiones y los comentarios útiles sobre el tema de este trabajo, así como a Eduardo Nahmad-Achar por su revisión del manuscrito. Uno de los autores (A.C.) agradece la beca recibida de DGAPA-UNAM durante el desarrollo del trabajo.

Referencias

1. R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner, en L. Witten, ed., *Gravitation: An Introduction to Current Research*, Wiley, New York (1962), 227-265.
2. A. Ashtekar, *SILARG VII Proceedings*, World Scientific, Singapur, por aparecer.
3. J. Guven, M.P. Ryan Jr., *Functional integrals and canonical quantum gravity. Facts and fancies*, preprint.
4. R. Matzner, *SILARG VII Proceedings*, World Scientific, Singapur, por aparecer; H. Harleston, Ph. D. Thesis, Austin (1990).

5. B.S. De Witt, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113-1148. A. Corichi, Tesis de Licenciatura, FCUNAM (1991).
6. Para una presentación completa sobre encajamientos, ver M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc., Boston (1970).
7. C. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Co., New York (1973).
8. Para un tratamiento más general en el que la variedad encajada no es necesariamente una hipersuperficie, ver: C. Soto, Tesis, FCUNAM (1990).
9. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Teoría Clásica de Campos*, V. 2, Curso de Física Teórica, Reverté, Barcelona (1973).
10. P.A.M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, New York (1964).
11. K. Sundermayer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Heidelberg (1982).
12. A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1976).
13. J.A. Wheeler, "Superspace", en *Analytic Methods in Mathematical Physics*, ed. Gilbert, Newton (1970), 335-378.
14. K. Kuchař, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 777-791.
15. M.P. Ryan Jr., *Hamiltonian Cosmology*. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlín (1972).
16. C.W. Misner, "Minisuperspace", en *Magic without Magic: J.A. Wheeler*, ed. J.R. Klauder (1972), 441-473.

Abstract. In this work we present the concepts and mathematical developments which give rise to the Hamiltonian formulation of Einstein's general relativity, first introduced by Arnowitt, Deser, and Misner. All the geometrical quantities needed for the construction are explicitly obtained and application examples are given.