

# Desarrollos armónicos bidimensionales en electrostática y magnetostática

A. Góngora-T., E. Ley-Koo

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 20-364, 01000 México 20 D.F.*

y M.A. Ortiz

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 70-542, 04510 México D.F.*

(Recibido el 9 de enero de 1991; aceptado el 10 de julio de 1991)

**Resumen.** Se analizan los campos electrostáticos y magnetostáticos producidos por líneas infinitas de cargas y corrientes, respectivamente, en términos de desarrollos armónicos bidimensionales. Se destaca la validez general y la unidad de este tipo de desarrollos, reconociendo que fuentes de una armonicidad definida producen campos de la misma armonicidad. Se presentan ejemplos ilustrativos en coordenadas cartesianas, circulares, elípticas y parabólicas, los cuales pueden ser de utilidad en cursos introductorios o intermedios de electromagnetismo para que el alumno comprenda cuantitativamente los fenómenos físicos correspondientes usando funciones matemáticas bien conocidas.

PACS: 41.10.Dq; 41.70.+t

## 1. Introducción

En la Ref. [1] se destacó la validez general y la unidad del desarrollo multipolar por fuera y por dentro en electrostática y magnetostática. Sin embargo, el entendimiento de ese trabajo requiere familiaridad con los armónicos esféricos, la cual usualmente se adquiere hacia el final de los estudios profesionales de física. El propósito del presente trabajo es analizar algunas situaciones bidimensionales de electrostática y magnetostática en términos de desarrollos armónicos. Como la descripción de las fuentes y los campos armónicos correspondientes está basada en funciones matemáticas bien conocidas, a saber funciones (co)senoidales y exponenciales, se intenta que mediante el estudio de este tipo de situaciones los alumnos se familiaricen cuantitativamente con las leyes de la electrostática y la magnetostática desde sus cursos introductorios e intermedios.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sec. 2 se describen las leyes y ecuaciones de la electrostática y magnetostática, se introducen las expresiones generales para los operadores de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas ortogonales (cartesianas, circulares, parabólicas y elípticas), y se construyen las soluciones de la ecuación de Laplace en esas coordena-

das. En la Sec. 3, se estudian sucesivamente las soluciones en términos de desarrollos armónicos de algunas situaciones de la electrostática con una línea recta cargada uniformemente: *i*) en todo el espacio, en coordenadas circulares; *ii*) entre dos planos conductores paralelos entre sí y a tierra, en coordenadas cartesianas; *iii*) entre dos cilindros parabólicos confocales y a tierra, en coordenadas parabólicas y *iv*) entre dos cilindros elípticos confocales y a tierra, en coordenadas elípticas. También se estudian los problemas y soluciones correspondientes de la magnetostática con una corriente estacionaria a lo largo de un conductor recto infinito. En la Sec. 4 se discute la unidad de los desarrollos armónicos tanto en electrostática y magnetostática como en las conexiones entre los campos de una y otra situación, y también de una geometría a otra. Se esboza la extensión a distribuciones de carga a lo largo de cilindros en vez de rectas identificando las componentes armónicas de las fuentes y de los campos. Se recomienda el estudio de las situaciones *i*) y *ii*) en cursos introductorios y de las situaciones *iii*) y *iv*) para lectores familiarizados con las geometrías respectivas.

## 2. Leyes y ecuaciones de electrostática y magnetostática

En esta sección se describen sucesivamente las leyes y ecuaciones de la electrostática y la magnetostática, en términos de los campos de fuerza y de potencial [2,5]. Además, anticipando el estudio de situaciones con fuentes rectas e infinitas, se introducen los operadores de derivadas de los campos vectoriales y escalares en dos dimensiones de diversos sistemas de coordenadas ortogonales [6].

El campo de intensidad eléctrica  $\vec{E}(\vec{r})$ , que mide la fuerza por unidad de carga en cada punto  $\vec{r}$ , obedece a la ley de Gauss y es un campo conservativo. La ley de Gauss reconoce que las cargas eléctricas son fuentes de flujo de este campo de intensidad eléctrica y tiene la expresión diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (1E)$$

en términos de la densidad de carga  $\rho(\vec{r})$ . El carácter conservativo del campo electrostático está asociado a su naturaleza irrotacional,

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2E)$$

e implica que es derivable de un potencial electrostático escalar,  $\Phi(\vec{r})$ ,

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (3E)$$

De la combinación de las Ecs.(3E) y (1E) se encuentra que el potencial electrostático satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho. \quad (4E)$$

El cálculo del flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que contenga a una superficie cargada, con caras paralelas a esta última y muy próximas entre sí, usando la ley de Gauss, Ec. (1), indica que las componentes del campo de intensidad eléctrica normales a la superficie cargada a uno y otro lado difieren entre sí en una cantidad proporcional a la carga por unidad de superficie:

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 4\pi\sigma. \quad (5E)$$

El campo de inducción magnética  $\vec{B}(\vec{r})$ , que mide la fuerza por unidad de carga y unidad de velocidad en cada punto  $\vec{r}$ , es un campo solenoidal y obedece la ley de Ampère. Su carácter solenoidal,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1M)$$

está asociado a la no existencia de monopolos magnéticos. La ley de Ampère reconoce que las corrientes eléctricas son fuentes de circulación del campo de inducción magnética, y toma la forma diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2M)$$

en términos de la densidad de corriente  $\vec{J}(\vec{r})$ . El carácter solenoidal del campo de inducción magnética hace posible que éste derive de un potencial magnetostático vectorial,  $\vec{A}(\vec{r})$ ,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3M)$$

De la substitución de la Ec. (3M) en la Ec. (2M) se obtiene la ecuación que satisface el potencial magnetostático:

$$\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (4M)$$

La Ec. (3M) indica que este potencial no está definido de manera única, pues siempre es posible agregarle el gradiente de un campo escalar, obteniéndose la misma inducción magnética. Esta libertad se puede aprovechar para hacer que el potencial sea solenoidal, es decir  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , en cuyo caso la Ec. (4M) se reduce a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (4M')$$

El cálculo de la circulación del campo de inducción magnética alrededor de un circuito que rodee a una superficie con corriente, con dos lados paralelos a la superficie y muy próximos entre sí, usando la ley de Ampère, Ec. (2M), muestra que las componentes de  $\vec{B}$  tangenciales a la superficie a uno y otro lado y normales a la

corriente difieren entre sí en una cantidad proporcional a la corriente por unidad de longitud,  $\vec{K}(\vec{r})$ ,

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \Big|_S = \frac{4\pi}{c} \vec{K}. \quad (5M)$$

Las operaciones de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano aplicadas a campos escalares  $S(\vec{r})$  o vectoriales  $\vec{V}(\vec{r})$ , según sea el caso, son muy directas en coordenadas cartesianas  $\vec{r}(x, y, z)$ :

$$\text{grad } S \equiv \nabla S = \hat{i} \frac{\partial S}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial S}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\text{div } \vec{V} \equiv \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\text{rot } \vec{V} \equiv \nabla \times \vec{V} = \hat{i} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (8)$$

$$\text{lapl } S \equiv \nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \quad (9)$$

En el caso de fuentes (de carga o corrientes) eléctricas distribuidas uniformemente a lo largo de líneas rectas, que se pueden tomar paralelas al eje  $z$ , los campos correspondientes no dependen de la coordenada  $z$ , es decir, son campos bidimensionales. En las Ecs. (6)-(9), los términos que involucran derivadas con respecto a  $z$  desaparecen.

En la Sec. 3 se consideran situaciones que conviene describir en coordenadas cilíndricas circulares, parabólicas y elípticas, respectivamente,

$$\vec{r} = \hat{i}R \cos \phi + \hat{j}R \sin \phi + \hat{k}z \quad (10c)$$

$$= \hat{i}\xi\eta + \hat{j} \frac{(\eta^2 - \xi^2)}{2} + \hat{k}z \quad (10p)$$

$$= \hat{i}f \cosh u \cos v + \hat{j}f \sinh u \sin v + \hat{k}z. \quad (10e)$$

Cada valor de las coordenadas radial ( $0 \leq R < \infty$ ), angular ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ), parabólicas ( $-\infty < \xi < \infty$  y  $0 \leq \eta < \infty$ ), elíptica ( $0 \leq u < \infty$ ) e hiperbólica ( $0 \leq v \leq 2\pi$ ) define un cilindro circular de radio  $R$  con el eje  $z$  como su eje, un semiplano que contiene al eje  $z$  como su frontera y forma un ángulo diedro  $\phi$  con el plano  $xz$ , cilindros parabólicos con focos sobre el eje  $z$  y vértices en  $(x = 0, y = -\xi^2/2)$  y  $(x = 0, y = \eta^2/2)$ , cilindros elípticos e hiperbólicos con focos en  $(x = \pm f, y = 0, z)$  y excentricidades  $1/\cosh u$  y  $1/\cos v$ , respectivamente.

Al restringirnos a cualquier plano perpendicular al eje  $z$ , los desplazamientos dentro del mismo quedan descritos por

$$d\vec{R} = (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) dR + R(-\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi) d\phi \tag{11c}$$

$$= (\hat{i}\eta - \hat{j}\xi) d\xi + (\hat{i}\xi + \hat{j}\eta) d\eta \tag{11p}$$

$$= f(\hat{i} \sinh u \cos v + \hat{j} \cosh u \sin v) du + f(-\hat{i} \cosh u \sin v + \hat{j} \sinh u \cos v) dv. \tag{11e}$$

De las Ecs. (11) se identifican los vectores unitarios y los factores de escala asociados a cada coordenada curvilínea ortogonal

$$\hat{R} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi, \quad h_R = 1; \quad \hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi, \quad h_\phi = R, \tag{12c}$$

$$\hat{\xi} = \frac{\hat{i}\eta - \hat{j}\xi}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}, \quad \hat{\eta} = \frac{\hat{i}\xi + \hat{j}\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \quad h_\xi = \sqrt{\eta^2 + \xi^2} = h_\eta, \tag{12p}$$

$$\hat{u} = \frac{\hat{i} \sinh u \cos v + \hat{j} \cosh u \sin v}{\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}, \quad \hat{v} = \frac{-\hat{i} \cosh u \sin v + \hat{j} \sinh u \cos v}{\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}$$

$$h_u = f \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} = h_v. \tag{12e}$$

Las derivadas de las Ecs. (6)-(9) para los campos de interés en términos de las coordenadas curvilíneas  $q_i$  y de sus vectores unitarios  $\hat{e}_i$  y factores de escala  $h_i$  asociados toman las formas:

$$\text{grad } S(q_1, q_2) = \hat{e}_1 \frac{\partial S}{h_1 \partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial S}{h_2 \partial q_2}, \tag{6'}$$

$$\text{div } \vec{V}(q_1, q_2) = \frac{\partial}{h_1 h_2 \partial q_1} (h_2 V_1) + \frac{\partial}{h_1 h_2 \partial q_2} (h_1 V_2), \tag{7'}$$

$$\text{rot } [\hat{k} A_z(q_1, q_2)] = \left( \frac{\hat{e}_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\hat{e}_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) A_z, \tag{8'}$$

$$\nabla^2 S(q_1, q_2) = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial S}{\partial q_2} \right). \tag{9'}$$

También se identifican los elementos diferenciales de área

$$d\vec{a} = \hat{e}_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \hat{e}_2 h_1 h_3 dq_1 dq_3 + \hat{e}_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 \tag{13}$$

y el elemento diferencial de volumen

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \quad (14)$$

con  $q_3 = z$  y  $h_3 = 1$ .

La ecuación de Poisson, Ecs. (4E) y (4M'), se reduce a la ecuación de Laplace en aquellos puntos donde no hay fuentes:

$$\nabla^2 S = 0. \quad (15)$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas. En coordenadas cartesianas, la ecuación de Laplace tiene la forma explícita,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) S(x, y) = 0 \quad (15')$$

y admite las soluciones separables

$$S(x, y) = X(x)Y(y) = \left( ae^{(kx)} + be^{(-kx)} \right) (c \operatorname{sen} ky + d \operatorname{cos} ky), \quad (16)$$

incluso para  $k \rightarrow 0$ :

$$S(x, y) = (a' + b'x) (c' + d'y). \quad (16')$$

De las Ecs.(12) y (9'), la ecuación de Laplace en coordenadas circulares, parabólicas y elípticas toma las formas respectivas

$$\left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) S(R, \phi) = 0, \quad (15c)$$

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) S(\xi, \eta) = 0, \quad (15p)$$

$$\frac{1}{f^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) S(u, v) = 0. \quad (15e)$$

En los dos últimos sistemas de coordenadas, la ecuación de Laplace, Ecs. (15p) y (15e), y sus soluciones tienen las mismas formas que en coordenadas cartesianas, Ecs. (15') y (16). En coordenadas circulares, las funciones armónicas soluciones de la Ec.(15c) son también separables,

$$S(R, \phi) = \mathcal{R}(R)\Phi(\phi) = (aR^m + bR^{-m}) (c \operatorname{sen} m\phi + d \operatorname{cos} m\phi), \quad (16c)$$

y en el caso en que  $m \rightarrow 0$ ,

$$S(R) = (a' + b' \ln R). \quad (16c')$$

### 3. Desarrollos armónicos bidimensionales

En esta sección se estudian los campos de potencial y de fuerza asociados a una carga eléctrica uniformemente distribuida a lo largo de una recta en situaciones de electrostática (subsección A) y una corriente eléctrica estacionaria a lo largo de una recta en situaciones de magnetostática (subsección B) con énfasis en las componentes armónicas de las fuentes y de los campos. La recta donde se localizan las fuentes está definida por su posición  $\vec{R}'$  en los planos transversales a la misma. La densidad volumétrica de carga se expresa como

$$\rho(\vec{R}, z) = \lambda \delta(\vec{R} - \vec{R}') \tag{17E}$$

en términos de la carga por unidad de longitud  $\lambda$ ; la densidad de corriente está dada por

$$\vec{J}(\vec{R}, z) = \hat{k} I \delta(\vec{R} - \vec{R}') \tag{17M}$$

en términos de la corriente  $I$ . La función delta de Dirac, que es nula en todos los puntos  $\vec{R} \neq \vec{R}'$  e infinita en la posición de la fuente  $\vec{R} = \vec{R}'$ , y cuya integral en todo el plano definido por  $\vec{R}$  es la unidad, tiene las representaciones

$$\delta(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{1}{h_1 h_2} \delta(q_1 - q_1') \delta(q_2 - q_2') \tag{18}$$

en los diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales. Entonces, en aquellos puntos donde  $\vec{R} \neq \vec{R}'$  la ecuación de Poisson, Ecs. (4), se reduce a la ecuación de Laplace, Ecs. (15), y es posible describir a los potenciales  $\Phi$  y  $A$  como superposiciones de funciones armónicas.

#### A. Electroestática

##### i) Línea recta cargada en todo el espacio.

Esta configuración de fuentes tiene campos de potencial y de fuerza bien conocidos de los libros de texto, teniendo el primero una variación logarítmica con la distancia:

$$\Phi(\vec{R}) = \Phi_0 - 2\lambda \ln |\vec{R} - \vec{R}'|, \tag{19Ei}$$

y siendo el segundo radial e inversamente proporcional a la distancia:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{2\lambda(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|}. \tag{20Eii}$$

De la Ec. (19Ei) se reconoce que si  $\vec{R}' = 0$ , es decir, la fuente se toma como el eje  $z$ , el potencial correspondiente para  $\vec{R} \neq \vec{R}'$  es la función armónica fundamental de la Ec. (16c'). En caso de que  $\vec{R}' \neq 0$ , es decir, si la fuente está desplazada con respecto al eje  $z$ , la función del potencial electrostático de la Ec.(19Ei) se puede

desarrollar en serie de potencias de  $R/R'$  o  $R'/R$  según que  $R < R'$  o  $R > R'$ . Usando la notación  $R_<$  y  $R_>$  para el menor y el mayor de  $R$  y  $R'$ , respectivamente, el desarrollo de Taylor correspondiente en coordenadas circulares toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi(R, \phi) &= \Phi_0 - 2\lambda \ln \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')} \\ &= \Phi_0 - 2\lambda \ln R_> + 2\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_<^m}{R_>^m} \frac{\cos m(\phi - \phi')}{m}. \end{aligned} \quad (21Ei)$$

Notamos que este es un desarrollo en las funciones armónicas de las Ecs. (16c). En la analogía con el caso coulombiano, en el cual el inverso de la separación entre el punto fuente y el punto campo es la función generadora de los polinomios de Legendre, en la presente situación, la función logarítmica de esa separación es la función generadora de los cosenos de los múltiplos enteros del ángulo. También notamos que cada término del desarrollo es continuo en  $R = R'$ . Para entender el significado del desarrollo armónico de la Ec. (21Ei), procedemos a evaluar el campo de intensidad eléctrico usando la Ec. (3E) con el operador de gradiente de las Ecs.(6') y (12c):

$$\begin{aligned} \vec{E}(R \leq R', \phi) &= - \left( \hat{R} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\phi} \frac{\partial}{R \partial \phi} \right) \left[ \Phi_0 - 2\lambda \ln R' + 2\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{R'^m} \frac{\cos m(\phi - \phi')}{m} \right] \\ &= 2\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^{m-1}}{R'^m} \left[ -\hat{R} \cos m(\phi - \phi') + \hat{\phi} \sin m(\phi - \phi') \right], \end{aligned} \quad (22Ei)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(R \geq R', \phi) &= - \left( \hat{R} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\phi} \frac{\partial}{R \partial \phi} \right) \left[ \Phi_0 - 2\lambda \ln R + 2\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R'^m}{R^m} \frac{\cos m(\phi - \phi')}{m} \right] \\ &= \hat{R} \frac{2\lambda}{R} + 2\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R'^m}{R^{m+1}} \left[ \hat{R} \cos m(\phi - \phi') + \hat{\phi} \sin m(\phi - \phi') \right]. \end{aligned} \quad (22Ei')$$

Al considerar las componentes del campo en los puntos del cilindro  $R = R'$ , notamos la continuidad de las componentes tangenciales (en la dirección  $\hat{\phi}$ ) en congruencia con el carácter irrotacional del campo, Ec. (2E), y la discontinuidad en las componentes radiales

$$\vec{E}(R = R'_+, \phi) - \vec{E}(R = R'_-, \phi) = \hat{R} \frac{2\lambda}{R'} + 2\lambda \hat{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{R'} \cos m(\phi - \phi'). \quad (23Ei)$$

De acuerdo con la Ec. (5E) esta discontinuidad corresponde a una distribución de carga superficial sobre el cilindro dada por

$$\sigma(\phi) = \frac{\lambda}{R'} \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\phi - \phi') \right]. \quad (24Ei)$$



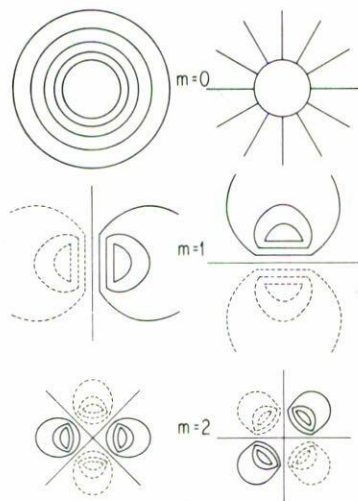


FIGURA 1. Componentes armónicas más bajas de campos de potencial y fuerza en todo el espacio. Fuentes de la armonicidad respectiva sobre cilindro circular. Líneas llenas (vacías) corresponden a valores positivos (negativos) del potencial.

Al comparar las Ecs. (24Ei) y (21Ei) se reconoce la correspondencia de uno a uno entre las componentes armónicas de la fuente y del potencial. En la Fig. 1 se ilustran en la columna de la izquierda las componentes de armonicidad más baja:  $m = 0$  correspondiente a la distribución uniforme de la carga sobre el cilindro, y potencial constante por dentro y logarítmico por fuera, respectivamente;  $m = 1$ , distribución cosenoidal de la carga, positiva a la derecha y negativa a la izquierda, y el potencial lineal por dentro y cosenoidal e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia por fuera, respectivamente;  $m = 2$ , distribución cosenoidal de la carga en cuatro cuadrantes con signos alternantes, potencial cuadrático con equipotenciales hiperboloidales por dentro y con la misma variación cosenoidal e inversamente proporcional al cubo de la distancia por fuera. En la misma figura y a la derecha se muestran los campos de intensidad eléctrica correspondientes:  $m = 0$ , el campo es radial y externo al cilindro; para  $m = 1, 2$  las líneas de campo tienen las mismas formas que las secciones de los cilindros equipotenciales respectivos, cortándose mutua y ortogonalmente en cada punto.

La base ortonormal de Fourier  $1/\sqrt{2\pi}$ ,  $(1/\sqrt{\pi}) \cos m(\phi - \phi')$  es una base completa, en términos de la cuál la función delta de Dirac angular toma la forma

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\phi - \phi') \quad (25c)$$

La suma en la Ec. (24Ei) se identifica como esta función delta de Dirac indicando que la carga total está localizada en  $\phi = \phi'$ , aunque cada componente armónica está

distribuida en  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . La combinación de la Ec. (24Ei) con la localización de la carga en  $R = R'$ , da la distribución volumétrica de la carga,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda\delta(R - R')\delta(\phi - \phi')}{R}, \tag{17Ei}$$

que coincide, como debe ser, con la Ec. (17E) de acuerdo con las Ecs. (18) y (12c).

ii) *Línea recta de carga entre dos planos paralelos conductores a tierra.*

Los campos de potencial y de fuerza asociados a la fuente rectilínea de carga se modifican por la presencia de los conductores a tierra, en los cuales se inducen cargas de signo opuesto al de la fuente. Para la geometría bajo consideración conviene usar coordenadas cartesianas. Si  $\vec{R}'(x', y')$  define la posición de la fuente, y  $y = 0$  y  $y = a$  son los conductores planos a tierra, entonces el potencial debe satisfacer la ecuación de Poisson:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(x, y) = -4\pi\lambda\delta(x - x')\delta(y - y'), \tag{4Eii}$$

sujeta a las condiciones de frontera  $\Phi(x, y = 0) = 0$ ,  $\Phi(x, y = a) = 0$  y además  $\Phi(x \rightarrow \infty, y) = 0$ ,  $\Phi(x \rightarrow -\infty, y) = 0$ . Ya mencionamos que en los puntos  $\vec{R} \neq \vec{R}'$  la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace y es posible expresar el potencial en términos de las funciones armónicas, Ec. (16). Las condiciones sobre los conductores requieren que solo se incluyan las soluciones senoidales en  $y$  y además  $k = m\pi/a$ ; las condiciones para  $x \rightarrow \pm\infty$  seleccionan solamente las exponenciales decrecientes de cada caso. La función delta de Dirac en  $y$  se puede desarrollar en la base ortonormal senoidal:

$$\delta(y - y') = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a}. \tag{25}$$

Entonces la condición de continuidad de cada término armónico del potencial y de discontinuidad de su derivada con respecto a  $x$ , al pasar de un lado a otro de las fuentes correspondiente en  $x = x'$ , determina la magnitud de cada componente. De este modo se encuentra que el potencial tiene el desarrollo armónico

$$\Phi(x, y) = 4\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\frac{m\pi(x_{>} - x_{<})}{a}} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a}, \tag{21Eii}$$

donde  $x_{>}$  y  $x_{<}$  son los valores mayor y menor de  $x$  y  $x'$ , respectivamente. De las Ecs.(3E), (6) y (21Eii) es inmediato obtener el campo de intensidad eléctrico:

$$\vec{E}(x \leq x', y) = \frac{4\pi\lambda}{a} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(x' - x)}{a}} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \left(-\hat{i} \text{sen} \frac{m\pi y}{a} - \hat{j} \cos \frac{m\pi y}{a}\right), \tag{22Eii}$$

$$\vec{E}(x \geq x', y) = \frac{4\pi\lambda}{a} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(x - x')}{a}} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \left(\hat{i} \text{sen} \frac{m\pi y}{a} - \hat{j} \cos \frac{m\pi y}{a}\right). \tag{22Eii'}$$

Para  $x = x'$  se ve que sus componentes en la dirección  $\hat{j}$  son continuas, pero sus componentes en la dirección  $\hat{i}$  tienen la discontinuidad

$$\vec{E}(x = x'_+, y) - \vec{E}(x = x'_-, y) = \frac{4\pi\lambda}{a} 2\hat{i} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a}. \quad (23Eii)$$

De acuerdo a las Ecs.(5E) y (25), ésto corresponde a la densidad de carga superficial

$$\sigma(x = x', y) = \frac{2\lambda}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a} = \lambda \delta(y - y'). \quad (24Eii)$$

Además, para  $y = 0$  y  $y = a$ , las Ecs.(22Eii) permiten determinar las distribuciones de la carga superficial inducida en los conductores:

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(x, y = 0) &= \hat{j} \cdot \vec{E}(x, y = 0) \\ &= -\frac{4\pi\lambda}{a} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(x > -x <)}{a}} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a}, \end{aligned} \quad (24Eii')$$

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(x, y = a) &= -\hat{j} \cdot \vec{E}(x, y = a) \\ &= \frac{4\pi\lambda}{a} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(x > -x <)}{a}} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} (-1)^m, \end{aligned} \quad (24Eii'')$$

las cuales muestran la variación exponencial de las funciones armónicas correspondientes.

La Fig. 2 muestra a la izquierda las secciones transversales de las superficies cilíndricas equipotenciales y a la derecha las líneas de campo de las componentes armónicas más bajas  $m = 1, 2, 3$  de las Ecs. (21Eii) y (22Eii). Se nota que las figuras tienen la misma forma y se van reduciendo en escala de acuerdo con el orden de su armonicidad. Esta reducción es una indicación de que el alcance de las componentes armónicas se reduce al aumentar el orden de su armonicidad.

iii) *Línea recta de carga entre dos conductores cilíndricos parabólicos confocales a tierra.*

Este caso se formula en coordenadas parabólicas, Ec. (10p), en términos de las cuales la ecuación de Poisson toma la forma

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi(\xi, \eta) = -4\pi\lambda \frac{\delta(\xi - \xi')\delta(\eta - \eta')}{\xi^2 + \eta^2}, \quad (4Eiii)$$

donde se han usado las Ecs.(15p), (18) y (12p). Notamos que los factores de escala  $h_\xi h_\eta$  son comunes en el operador laplaciano y en la función delta de Dirac, en ambos miembros de la Ec.(4Eiii), lo cual hace que esta última sea de la misma forma que

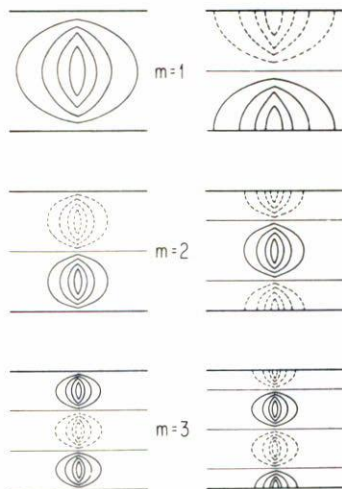


FIGURA 2. Componentes armónicas más bajas de campos de potencial y fuerza entre dos conductores planos paralelos a tierra. Fuentes de la armonicidad respectiva sobre plano vertical. Líneas llenas (vacías) corresponden a valores positivos (negativos) del potencial.

la Ec.(4Eii) en coordenadas cartesianas. Si  $\eta = \eta_1$  y  $\eta = \eta_2$  definen las posiciones de los cilindros conductores a tierra, el potencial correspondiente tiene el desarrollo armónico

$$\Phi(\xi, \eta) = 4\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\frac{m\pi(\xi > -\xi <)}{\eta_2 - \eta_1}} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (21Eiii)$$

que es la adaptación al presente caso de la Ec. (21Eii).

La presencia de los factores de escala  $h_\xi$  y  $h_\eta$  en el operador gradiente, Ec.(6'), conduce al campo de intensidad eléctrico

$$\vec{E}(\xi \leq \xi', \eta) = \frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2(\eta_2 - \eta_1)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(\xi' - \xi)}{(\eta_2 - \eta_1)}} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \left( -\hat{\xi} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} - \hat{\eta} \cos \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \right), \quad (22Eiii)$$

$$\vec{E}(\xi \geq \xi', \eta) = \frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2(\eta_2 - \eta_1)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(\xi - \xi')}{(\eta_2 - \eta_1)}} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \left( \hat{\xi} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} - \hat{\eta} \cos \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \right), \quad (22Eiii')$$

que difiere de su contraparte de conductores planos precisamente en ese factor de escala. Las componentes del campo de intensidad eléctrica a uno y otro lado de  $\xi = \xi'$ , en la dirección  $\hat{\eta}$  son continuas, pero son discontinuas en la dirección  $\hat{\xi}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\xi = \xi'_+, \eta) - \vec{E}(\xi = \xi'_-, \eta) &= \frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(\eta_2 - \eta_1)} 2\hat{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \\ &\times \text{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \end{aligned} \quad (23Eiii)$$

De acuerdo con las Ecs.(5E) y (25) esa discontinuidad está asociada a la densidad de carga superficial

$$\begin{aligned} \sigma(\xi = \xi', \eta) &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(\eta_2 - \eta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \text{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \\ &= \frac{\lambda\delta(\eta - \eta')}{h_\eta}, \end{aligned} \quad (24Eiii)$$

De manera análoga, las distribuciones de carga superficial inducida en los conductores son

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(\xi, \eta = \eta_1) &= \hat{\eta} \cdot \vec{E}(\xi, \eta = \eta_1) \\ &= \frac{-4\pi\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta_1^2}(\eta_2 - \eta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(\xi_> - \xi_<)}{(\eta_2 - \eta_1)}} \\ &\times \text{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}, \end{aligned} \quad (24Eiii')$$

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(\xi, \eta = \eta_2) &= -\hat{\eta} \cdot \vec{E}(\xi, \eta = \eta_2) \\ &= \frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta_2^2}(\eta_2 - \eta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(\xi_> - \xi_<)}{(\eta_2 - \eta_1)}} \\ &\times \text{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} (-)^m. \end{aligned} \quad (24Eiii'')$$

Estas densidades de carga, además de su dependencia armónica, muestran su variación con el factor de escala.

La Fig. 3, en la que se ha tomado  $\eta_1 = 0$ , correspondiente a una placa doblada en la que degeneran los cilindros parabólicos, muestra las secciones transversales de las superficies cilíndricas equipotenciales a la izquierda y las líneas de campo de intensidad eléctrica a la derecha para las componentes armónicas más bajas,  $m = 1, 2, 3$

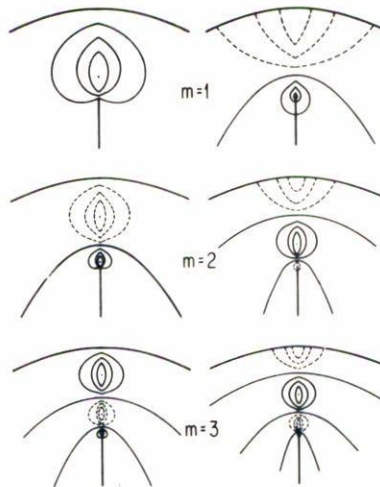


FIGURA 3. Componentes armónicas más bajas de campos de potencial y fuerza entre dos conductores cilíndricos parabólicos confocales a tierra. Fuentes de la armonicidad respectiva sobre el cilindro parabólico vertical. Líneas llenas (vacías) corresponden a valores positivos (negativos) del potencial.

de las Ecs.(21Eiii) y (22Eiii), respectivamente. En este caso las equipotenciales más próximas al conductor  $\eta_1 = 0$  tienen la misma forma para cada  $m$ , pero están reducidas en escala de acuerdo con el cuadrado del orden de su armonicidad, o sea  $1 : 1/4 : 1/9$ ; lo mismo ocurre para las líneas de campo en la vecindad de la arista del conductor  $\eta_1 = 0$ .

iv) *Línea recta de carga entre dos conductores cilíndricos elípticos confocales a tierra.*

La ecuación de Poisson en coordenadas elípticas para la fuente rectilínea cargada

$$\frac{1}{f^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \Phi(u, v) = -4\pi\lambda \frac{\delta(u - u')\delta(v - v')}{f^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \quad (4Eiv)$$

es nuevamente de la forma de la Ec.(4Eii) en coordenadas cartesianas, puesto que los factores de escala  $h_u h_v$  son comunes en ambos miembros. Dada la periodicidad de la coordenada hiperbólica  $v$ , se tiene la representación armónica de la función delta de Dirac correspondiente,

$$\delta(v - v') = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(v - v'), \quad (25e)$$

análoga a la de coordenadas circulares, Ec. (25c). Si los conductores a tierra están en las posiciones  $u = u_1$  y  $u = u_2$ , el potencial debe satisfacer las condiciones de frontera  $\Phi(u = u_1, v) = 0$  y  $\Phi(u = u_2, v) = 0$ . En vez de las funciones exponenciales

en  $u$  es preferible utilizar las combinaciones lineales  $(\exp(mu) + \exp(-mu))/2 = \cosh mu$  y  $(\exp(mu) - \exp(-mu))/2 = \sinh mu$  correspondientes a las funciones hiperbólicas, pues con la última se puede satisfacer fácilmente la condición de frontera. El desarrollo armónico del potencial correspondiente es:

$$\Phi(u \leq u', v) = 2\lambda \frac{u_2 - u'}{u_2 - u_1} (u - u_1) + 4\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u_2 - u')}{\sinh m(u_2 - u_1)} \frac{\sinh m(u - u_1) \cos m(v - v')}{m}, \quad (21Eiv)$$

$$\Phi(u \geq u', v) = 2\lambda \frac{u' - u_1}{u_2 - u_1} (u_2 - u) + 4\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u' - u_1)}{\sinh m(u_2 - u_1)} \frac{\sinh m(u_2 - u) \cos m(v - v')}{m}. \quad (21Eiv')$$

Entonces el campo de intensidad eléctrica se obtiene del gradiente de este potencial:

$$\vec{E}(u \leq u', v) = -\hat{u} \frac{2\lambda}{h_u} \frac{u_2 - u'}{u_2 - u_1} + \frac{4\lambda}{h_u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u_2 - u')}{\sinh m(u_2 - u_1)} \times \left[ -\hat{u} \cosh m(u - u_1) \cos m(v - v') + \hat{v} \sinh m(u - u_1) \sin m(v - v') \right], \quad (22Eiv)$$

$$\vec{E}(u \geq u', v) = \hat{u} \frac{2\lambda}{h_u} \frac{u' - u_1}{u_2 - u_1} + \frac{4\lambda}{h_u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u' - u_1)}{\sinh m(u_2 - u_1)} \times \left[ \hat{u} \cosh m(u_2 - u) \cos m(v - v') + \hat{v} \sinh m(u_2 - u) \sin m(v - v') \right]. \quad (22Eiv')$$

Cada componente armónica del campo de intensidad eléctrica tiene una discontinuidad al pasar de un lado al otro del cilindro elíptico  $u = u'$ :

$$\vec{E}(u = u'_+, v) - \vec{E}(u = u'_-, v) = \hat{u} \left[ \frac{2\lambda}{h_u} + \frac{4\lambda}{h_u} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(v - v') \right]. \quad (23Eiv)$$

La densidad de carga superficial asociada al cilindro tiene el desarrollo armónico

$$\sigma(u = u', v) = \frac{1}{f \sqrt{\cosh^2 u' - \cos^2 v}} \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(v - v') \right] = \frac{\lambda \delta(v - v')}{f \sqrt{\cosh^2 u' - \cos^2 v}}, \quad (24Eiv)$$

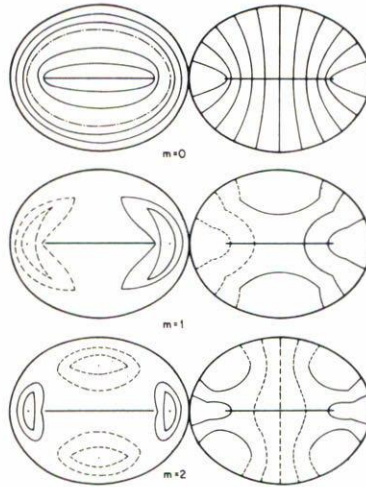


FIGURA 4. Componentes armónicas más bajas de campos de potencial y fuerza entre dos conductores cilíndricos elípticos confocales a tierra. Fuentes de la armonicidad respectiva sobre el cilindro elíptico. Líneas llenas (vacías) corresponden a valores positivos (negativos) del potencial.

donde se han usado las Ecs.(5E), (6') y (25e). Análogamente, las densidades de carga superficial de los cilindros frontera son:

$$\sigma(u = u_1, v) = -\frac{\lambda}{2\pi f \sqrt{\cosh^2 u_1 - \cos^2 v}} \times \left[ \frac{u_2 - u'}{u_2 - u_1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u_2 - u')}{\sinh m(u_2 - u_1)} \cos m(v - v') \right], \quad (24Eiv')$$

$$\sigma(u = u_2, v) = -\frac{\lambda}{2\pi f \sqrt{\cosh^2 u_2 - \cos^2 v}} \times \left[ \frac{u' - u_1}{u_2 - u_1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u' - u_1)}{\sinh m(u_2 - u_1)} \cos m(v - v') \right]. \quad (24Eiv'')$$

Cada componente de estas distribuciones muestra, además de la dependencia armónica en  $\cos m(v - v')$ , su dependencia del factor de escala  $h_u(u, v)$  sobre cada cilindro elíptico.

La Fig. 4, en la que se ha tomado  $u_1 = 0$  correspondiente a un cilindro elíptico aplanado, muestra las secciones transversales de las superficies cilíndricas equipotenciales a la izquierda y las líneas de campo eléctrico a la derecha para las componentes armónicas más bajas  $m = 0, 1, 2$  de las Ecs.(21Eiv) y (22Eiv). Para  $m = 0$ , las equipotenciales son cilindros elípticos confocales y las líneas de campo son las hipérbolas



confocales ortogonales. Para  $m = 1$  y  $m = 2$  se aprecia la bisección y cuadrisección del espacio disponible con las alternancias de signos o sentidos correspondientes respectivamente, análogas a lo que ocurrió en la Fig. 1.

### B. Magnetostática

Para la corriente eléctrica a lo largo de una línea recta, la densidad de corriente tiene una dirección y un sentido fijos, Ec.(17M). Correspondientemente de la ecuación de Poisson para el potencial magnetostático vectorial, Ec. (4M'), se sigue que el último tiene esa misma dirección,  $\vec{A} = \hat{k}A_z$ , y que  $A_z$  tiene la misma dependencia espacial que el potencial electrostático  $\Phi$  para las diferentes geometrías. Correspondientemente, en esta subsección se parte de los desarrollos armónicos correspondientes del potencial magnetostático.

#### i) Línea recta de corriente en todo el espacio.

El potencial magnetostático es paralelo a la corriente, varía logarítmicamente con la distancia a la fuente rectilínea, y tiene el desarrollo armónico análogo al de la Ec.(21Ei):

$$\begin{aligned}\vec{A}(R, \phi) &= \vec{A}_0 - \hat{k} \left( \frac{2I}{c} \right) \ln |\vec{R} - \vec{R}'| \\ &= \vec{A}_0 - \hat{k} \frac{2I}{c} \ln R_{>} + \hat{k} \frac{2I}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_{<}^m}{R_{>}^m} \frac{\cos m(\phi - \phi')}{m}.\end{aligned}\quad (21Mi)$$

El campo de inducción magnética se obtiene usando las Ecs.(3M) y (8'), y toma la forma conocida

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{2I \hat{k} \times (\vec{R} - \vec{R}')}{c |\vec{R} - \vec{R}'|},$$

correspondiente a las líneas circulares concéntricas con la fuente. Su desarrollo armónico se obtiene a partir del último miembro de la Ec.(21Mi):

$$\vec{B}(R \leq R', \phi) = \frac{2I}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^{m-1}}{R'^m} \left[ -\hat{R} \text{sen } m(\phi - \phi') - \hat{\phi} \cos m(\phi - \phi') \right] \quad (22Mi)$$

$$\begin{aligned}\vec{B}(R \geq R', \phi) &= \frac{2I}{cR} \hat{\phi} + \frac{2I}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{R'^{m+1}} \left[ -\hat{R} \text{sen } m(\phi - \phi') \right. \\ &\quad \left. + \hat{\phi} \cos m(\phi - \phi') \right].\end{aligned}\quad (22Mi')$$

Aquí se aprecia que sobre el cilindro  $R = R'$ , las componentes radiales del campo de inducción magnética son continuas, en congruencia con la ley de Gauss, Ec. (1M), pero sus componentes tangenciales en la dirección de  $\hat{\phi}$  son discontinuas

$$\vec{B}(R = R'_+, \phi) - \vec{B}(R = R'_-, \phi) = \hat{\phi} \frac{2I}{cR'} + \hat{\phi} \frac{4I}{cR'} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\phi - \phi'). \quad (23Mi)$$

De acuerdo con la ley de Ampère, esa discontinuidad está asociada a la corriente superficial sobre el cilindro de densidad lineal

$$\begin{aligned} \vec{K}(R = R', \phi) &= \frac{c}{4\pi} \hat{R} \times [\vec{B}(R = R'_+, \phi) - \vec{B}(R = R'_-, \phi)] \\ &= \hat{k} \frac{I}{R'} \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\phi - \phi') \right] = \hat{k} \frac{I}{R'} \delta(\phi - \phi'). \end{aligned} \quad (24Mi)$$

La correspondencia uno a uno de los términos de los desarrollos armónicos del potencial Ec. (21Mi) y de la fuente es obvia y análoga a la discutida en el caso electrostático Ai).

En la Fig. 1, la columna de la izquierda ilustra tanto las secciones de las superficies equipotenciales cilíndricas como las líneas de inducción magnética, para las componentes armónicas más bajas:  $m = 0$ , círculos concéntricos asociados a la corriente distribuida uniformemente alrededor del cilindro y en la dirección del eje;  $m = 1$ , planos equipotenciales y campo uniforme en el interior del cilindro, y sus extrapolaciones al exterior, asociados a la corriente distribuida cosenoidalmente en la dirección  $\hat{k}$  a la derecha y en la dirección  $-\hat{k}$  a la izquierda;  $m = 2$ , cilindros hiperbólicos equipotenciales y líneas hiperbólicas de campo en el interior del cilindro y sus extrapolaciones al exterior, asociadas a la corriente distribuída cosenoidalmente con alternancia de sentidos en cuatro cuadrantes.

ii) Línea recta de corriente entre dos conductores planos a tierra.

El potencial magnetostático tiene el desarrollo armónico

$$\vec{A}(x, y) = \hat{k} \frac{4I}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m\pi(x > -x <)/a} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a}, \quad (21Mii)$$

análogo al de la Ec. (21Eii). El campo de inducción magnética correspondiente es:

$$\vec{B}(x \leq x', y) = \frac{4\pi I}{ca} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(x' - x)/a} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \left[ \hat{i} \cos \frac{m\pi y}{a} - \hat{j} \text{sen} \frac{m\pi y}{a} \right], \quad (22Mii)$$

$$\vec{B}(x \geq x', y) = \frac{4\pi I}{ca} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(x - x')/a} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \left[ \hat{i} \cos \frac{m\pi y}{a} + \hat{j} \text{sen} \frac{m\pi y}{a} \right]. \quad (22Mii')$$

En la posición  $x = x'$  las componentes normales del campo de inducción magnética son continuas, y sus componentes tangenciales son discontinuas

$$\vec{B}(x = x'_+, y) - \vec{B}(x = x'_-, y) = \hat{j} \frac{4\pi I}{c} \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a}. \quad (23Mii)$$

Esta discontinuidad se debe a la corriente superficial con densidad lineal

$$\begin{aligned} \vec{K}(x = x', y) &= \frac{c}{4\pi} \hat{i} \times [\vec{B}(x = x'_+, y) - \vec{B}(x = x'_-, y)] \\ &= \hat{k} I \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{a} = \hat{k} I \delta(y - y'). \end{aligned} \quad (24Mii)$$

Las corrientes inducidas en los planos conductores se obtienen de las Ecs. (5M) y (22Mii):

$$\begin{aligned} \vec{K}(x, y = 0) &= \frac{c}{4\pi} \hat{j} \times \vec{B}(x, y = 0) \\ &= -\hat{k} \frac{I}{a} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(x > -x <)/a} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a}, \end{aligned} \quad (24Mii')$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(x, y = a) &= -\frac{c}{4\pi} \hat{j} \times \vec{B}(x, y = a) \\ &= \hat{k} \frac{I}{a} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(x > -x <)/a} \text{sen} \frac{m\pi y'}{a} (-)^m. \end{aligned} \quad (24Mii'')$$

La Fig. 2 muestra en su parte izquierda las secciones transversales de las superficies cilíndricas equipotenciales y las líneas del campo de inducción magnética para las componentes armónicas más bajas ( $m = 1, 2, 3$  de las Ecs. (21Mii) y (22Mii)).

iii) Línea recta de corriente entre dos conductores cilíndricos parabólicos confocales a tierra.

El potencial magnetostático para esta geometría, análoga a la de Aiii), tiene el desarrollo armónico correspondiente:

$$\vec{A}(\xi, \eta) = \hat{k} \frac{4I}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m\pi(\xi > -\xi <)/(\eta_2 - \eta_1)} \text{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \text{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}. \quad (21Miii)$$

El campo de inducción magnética toma la forma

$$\vec{B}(\xi < \xi', \eta) = \frac{4\pi I}{c\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(\eta_2 - \eta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(\xi' - \xi)/(\eta_2 - \eta_1)} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \times \left[ \hat{\xi} \cos \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} - \hat{\eta} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \right], \quad (22Miii)$$

$$\vec{B}(\xi > \xi', \eta) = \frac{4\pi I}{c\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(\eta_2 - \eta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(\xi - \xi')/(\eta_2 - \eta_1)} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \times \left[ \hat{\xi} \cos \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} + \hat{\eta} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \right]. \quad (22Miii')$$

En los puntos del cilindro  $\xi = \xi'$ , el campo de inducción magnética tiene componentes normales continuas y componentes tangenciales discontinuas:

$$\vec{B}(\xi = \xi'_+, \eta) - \vec{B}(\xi = \xi'_-, \eta) = \hat{\eta} \frac{4\pi I}{c\sqrt{\xi'^2 + \eta^2}(\eta_2 - \eta_1)} \frac{2}{\eta_2 - \eta_1} \times \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}. \quad (23Miii)$$

La discontinuidad permite determinar la corriente superficial con densidad lineal

$$\begin{aligned} \vec{K}(\xi = \xi', \eta) &= \frac{c}{4\pi} \hat{\xi} \times \left[ \vec{B}(\xi = \xi'_+, \eta) - \vec{B}(\xi = \xi'_-, \eta) \right] \\ &= \hat{k} \frac{1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta^2}(\eta_2 - \eta_1)} \frac{2}{\eta_2 - \eta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \\ &= \hat{k} I \frac{\delta(\eta - \eta')}{\sqrt{\xi'^2 + \eta^2}}. \end{aligned} \quad (24Miii)$$

Las corrientes superficiales inducidas en los conductores a tierra son

$$\begin{aligned} \vec{K}(\xi, \eta = \eta_1) &= \frac{c}{4\pi} \hat{\eta} \times \vec{B}(\xi, \eta = \eta_1) \\ &= -\hat{k} \frac{I}{\sqrt{\xi^2 + \eta_1^2}(\eta_2 - \eta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(\xi > - \xi <)/(\eta_2 - \eta_1)} \\ &\quad \times \operatorname{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}, \end{aligned} \quad (24Miii')$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(\xi_1, \eta = \eta_2) &= -\frac{c}{4\pi} \hat{\eta} \times \vec{B}(\xi, \eta = \eta_2) \\ &= +\hat{k} \frac{I}{\sqrt{\xi^2 + \eta_2^2(\eta_2 - \eta_1)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi(\xi > -\xi <)/(\eta_2 - \eta_1)} \\ &\quad \times \text{sen} \frac{m\pi(\eta' - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} (-)^m. \end{aligned} \tag{24Miii''}$$

La Fig. 3 ilustra en su columna izquierda las secciones transversales de las superficies cilíndricas equipotenciales y las líneas de campo de inducción magnética para las componentes armónicas más bajas  $m = 1, 2, 3$  de los desarrollos de las Ecs.(21Miii) y (22Miii).

iv) *Línea recta de corriente entre dos conductores cilíndricos elípticos confocales a tierra.*

Para esta geometría análoga a la del caso Aiv), el potencial magnetostático tiene el desarrollo armónico

$$\begin{aligned} \vec{A}(u \leq u', v) &= \hat{k} \frac{2I}{c} \left[ \frac{u_2 - u'}{u_2 - u_1} (u - u_1) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{senh } m(u_2 - u')}{\text{senh } m(u_2 - u_1)} \right. \\ &\quad \left. \frac{\text{senh } m(u - u_1) \cos m(v - v')}{m} \right], \end{aligned} \tag{21Miv}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(u \geq u', v) &= \hat{k} \frac{2I}{c} \left[ \frac{u' - u_1}{u_2 - u_1} (u_2 - u) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{senh } m(u' - u_1)}{\text{senh } m(u_2 - u_1)} \right. \\ &\quad \left. \frac{\text{senh } m(u_2 - u) \cos m(v - v')}{m} \right]. \end{aligned} \tag{21Miv'}$$

El campo de inducción magnética entonces es

$$\begin{aligned} \vec{B}(u \leq u', v) &= \frac{2I}{ch_u} \left\{ -\hat{v} \frac{u_2 - u'}{u_2 - u_1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{senh } m(u_2 - u')}{\text{senh } m(u_2 - u_1)} \right. \\ &\quad \left. \times [-\hat{u} \text{senh } m(u - u_1) \text{sen } m(v - v') - \hat{v} \cosh m(u - u_1) \cos m(v - v')] \right\}, \end{aligned} \tag{22Miv}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(u \geq u', v) &= \frac{2I}{ch_u} \left\{ +\hat{v} \frac{u' - u_1}{u_2 - u_1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{senh } m(u' - u_1)}{\text{senh } m(u_2 - u_1)} \right. \\ &\quad \left. \times [-\hat{u} \text{senh } m(u_2 - u) \text{sen } m(v - v') + \hat{v} \cosh m(u_2 - u) \cos m(v - v')] \right\}. \end{aligned} \tag{22Miv'}$$

En los puntos del cilindro  $u = u'$ , el campo de inducción magnética tiene componentes normales continuas y componentes tangenciales discontinuas;

$$\vec{B}(u = u'_+, v) - \vec{B}(u = u'_-, v) = \hat{v} \frac{2I}{ch_u} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(v - v') \right]. \quad (23Miv)$$

La discontinuidad del campo de inducción magnética está asociada a la corriente superficial sobre el cilindro con densidad lineal

$$\begin{aligned} \vec{K}(u = u', v) &= \frac{c}{4\pi} \hat{u} \times \left[ \vec{B}(u = u'_+, v) - \vec{B}(u = u'_-, v) \right] \\ &= \hat{k} \frac{I}{f \sqrt{\cosh^2 u' - \cos^2 v}} \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(v - v') \right] \\ &= \frac{\hat{k} I \delta(v - v')}{f \sqrt{\cosh^2 u' - \cos^2 v}}. \end{aligned} \quad (24Miv)$$

Análogamente, las corrientes inducidas en los conductores tienen los desarrollos armónicos

$$\begin{aligned} \vec{K}(u = u_1, v) &= \frac{c}{4\pi} \hat{u} \times \vec{B}(u = u_1, v) \\ &= - \frac{\hat{k} I}{2\pi f \sqrt{\cosh^2 u_1 - \cos^2 v}} \\ &\quad \times \left[ \frac{u_2 - u'}{u_2 - u_1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u_2 - u')}{\sinh m(u_2 - u_1)} \cos m(v - v') \right], \end{aligned} \quad (24Miv')$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(u = u_2, v) &= - \frac{c}{4\pi} \hat{u} \times \vec{B}(u = u_2, v) \\ &= - \frac{\hat{k} I}{2\pi f \sqrt{\cosh^2 u_2 - \cos^2 v}} \\ &\quad \times \left[ \frac{u' - u_1}{u_2 - u_1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh m(u' - u_1)}{\sinh m(u_2 - u_1)} \cos m(v - v') \right]. \end{aligned} \quad (24Miv'')$$

La parte izquierda de la Fig. 4 sirve para ilustrar las secciones transversales de las superficies cilíndricas equipotenciales y las líneas de campo de inducción magnética para las componentes de armonicidad más bajas de las Ecs.(21Miv) y (22Miv);  $m = 0$ , cilindros elípticos y elipses;  $m = 1, 2$  tienen los mismos cilindros equipotenciales que en Aiv), y las líneas de campo coinciden con sus secciones transversales.

#### 4. Discusión

En la Sec. 3 se construyeron los desarrollos armónicos de los campos de potencial y de fuerza asociados a fuentes rectilíneas de carga y de corriente eléctricas en diferentes situaciones: *i)* en todo el espacio, *ii)* entre dos conductores planos y paralelos a tierra, *iii)* entre dos conductores cilíndricos parabólicos confocales a tierra y *iv)* entre dos conductores cilíndricos elípticos confocales a tierra. A través de estos ejemplos se ilustra la validez general y unidad de estos desarrollos armónicos. Adicionalmente en cada caso se estableció explícitamente la conexión de los campos con las fuentes originales y las fuentes inducidas en los conductores, reconociendo la correspondencia entre unos y otras tanto para cada componente armónica como para la suma total de ellas. A continuación se destacan algunas conexiones interesantes entre las situaciones de electrostática y magnetostática, y dentro de cada área entre las diferentes geometrías.

En electrostática es bien conocido que el campo de intensidad eléctrica es normal a las superficies equipotenciales, lo cual queda ilustrado al comparar las partes izquierdas y derechas de las Figs. 1-4. En magnetostática, en cambio, el campo de inducción magnética es ortogonal al potencial magnetostático vectorial y tangencial a las superficies equipotenciales. Por esta razón, en la subsección 3.B fue suficiente el hacer referencia a la porción izquierda de las Figs. 1-4. Al comparar las situaciones de electrostática y magnetostática para una misma geometría, se reconoce que las líneas de campo de  $\vec{E}$  y de  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí. Esta relación se puede entender de diferentes maneras y a continuación se consideran dos de ellas: una en términos de potenciales alternativos y otra desde el punto de vista de la relatividad.

En los libros de texto es común reconocer que en magnetostática es posible obtener el campo de inducción magnética como el gradiente de un potencial magnetostático escalar en aquellas regiones del espacio donde no hay corrientes. La parte derecha de las Figs. 1-4 ilustraría también los potenciales magnetostáticos de este tipo, haciendo el uso de las figuras más simétrico para ambas situaciones, electrostática y magnetostática. También es válida la contraparte electrostática de obtener el campo de intensidad eléctrica como el rotacional de un potencial electrostático vectorial en aquellas regiones del espacio donde no hay cargas. Entonces sólo se necesitaría la parte derecha de las Figs. 1-4 para ilustrar los potenciales electrostáticos vectoriales y las líneas de campo de fuerza.

La conexión entre las situaciones de electrostática y magnetostática estudiadas se presenta de manera natural desde el punto de vista de la relatividad. Para ilustrarlo podemos considerar que en un cierto sistema de referencia se tiene una de las situaciones de electrostática analizadas en la Sec. 3A, y a continuación considerar la situación correspondiente desde el punto de vista de un sistema de referencia que se desplaza a velocidad constante con respecto al anterior en la dirección del eje  $z$  negativo. En este sistema de referencia se observa: la carga rectilínea cargada desplazándose en la dirección de eje  $z$  positivo, constituyendo una corriente rectilínea con la densidad descrita por la Ec. (17M), proporcional a la densidad de carga de la Ec. (17E); el potencial vectorial magnetostático en la dirección del eje  $z$ , Ecs.(21M), proporcional al potencial electrostático escalar de las Ecs.(21E); y el campo de

inducción magnética de las Ecs.(22M), transversal a la dirección de movimiento y al campo de intensidad eléctrica de las Ecs. (22E), y proporcional a la magnitud del último. En todos los casos la constante de proporcionalidad es  $v/\sqrt{c^2 - v^2}$  donde  $v$  es la velocidad de un sistema de referencia con respecto al otro y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

El estudio de los campos de potencial y de fuerza asociados a la fuente rectilínea, tanto en electrostática como en magnetostática, en las geometrías *i*) a *iv*) permite apreciar los cambios de cuando se tiene todo el espacio disponible a cuando ese espacio se ve confinado por diferentes fronteras, y también cuando se pasa de un tipo de frontera a otro. Las conexiones entre las diferentes geometrías se identifican a través de la ecuaciones de transformación entre las respectivas coordenadas, Ec.(10). Alternativamente, la definición de los puntos en un plano se puede hacer en términos de números complejos:  $z = x + iy = \rho \exp(i\phi) = i((\eta - i\xi)/\sqrt{2})^2 = f \cosh(u + iv)$ . Entonces, las transformaciones de coordenadas corresponden a mapeos del plano complejo en sí mismo, y el cambio de una función de potencial de una geometría a otra corresponde al mapeo correspondiente de una función analítica  $\Phi(z)$ . Como es bien sabido, estos mapeos son conformes, es decir preservan los ángulos entre líneas correspondientes que se intersectan entre sí; en particular la ortogonalidad entre equipotenciales escalares y líneas de campo se mantienen al pasar de una geometría a otra. El ir de una de las Figs. 1-4 a otra se puede identificar con uno de estos mapeos.

En lo anterior se han considerado situaciones con una sola fuente rectilínea, pero el principio de superposición permite extender los resultados a cualquier colección de fuentes rectilíneas dentro del espacio asociado a cada caso *i*)-*iv*). Efectivamente, los potenciales de las Ecs.(21E) y (21M) con  $\lambda = 1$  o  $I = 1$ , respectivamente corresponden a las funciones de Green de los problemas respectivos; entonces los potenciales para cualquier distribución de fuentes  $\rho(\vec{R}')$  y  $\vec{J}(\vec{R}')$ , e incluso condiciones de frontera diferentes, se pueden construir usando el teorema de Green. Cada distribución de fuentes puede representarse entonces con su desarrollo armónico para cada geometría.

Cada uno de los párrafos discutidos en esta sección sugieren puntos de interés que pueden ser analizados con más detalle por parte del lector. También podemos señalar que este trabajo puede servir de paso intermedio antes de estudiar el desarrollo multipolar en su forma general de la Ref. [1]. Para finalizar y como ejemplo de una aplicación describimos los campos de la trampa magnética híbrida mencionada en la Ref. [1], la cual consiste de cuatro alambres rectos paralelos entre sí como aristas de un prisma cuadrado con corrientes iguales y sentidos alternados, y de dos espiras circulares transversales y coaxiales con dichos alambres con corrientes iguales y en el mismo sentido. El campo de los alambres rectos es del tipo *Bi*) con  $m = 2, 4, 6, \dots$  y la parte inferior de la Fig. 1 muestra su componente armónica más baja que es la cuadrupolar; el campo de las espiras circulares es del tipo  $l = 1, 3, 5, \dots, m = 0$  en la notación de la Ref. [1], siendo de tipo dipolar uniforme y longitudinal al orden más bajo.



### Referencias

1. E. Ley-Koo y A. Góngora-T., *Rev. Mex. Fis.* **34** (1988) 645-669.
2. D. Halliday and Resnick, *Physics for Students of Science and Engineering*, Wiley, New York (1960).
3. E.M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course 2, Second Edition, McGraw-Hill (1985).
4. J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading (1979).
5. L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, New York, (1972).
6. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Academic Press, New York (1970).

**Abstract.** Electrostatic and magnetostatic fields produced by infinite straight lines of charges and currents, respectively, are analyzed in terms of bidimensional harmonic expansions. We emphasize the general validity and the unity of this type of expansions, recognizing that sources of a given harmonicity produce fields with the same harmonicity. Illustrative examples are presented in cartesian, circular, parabolic and elliptical coordinates, which can be useful in introductory or intermediate courses of electromagnetism to help the student understand quantitatively the corresponding physical phenomena using familiar mathematical functions.