RESEARCH Revista Mexicana de Física **67** (1) 62–67 JANUARY-FEBRUARY 2021

Generalización de las transformaciones de Lorentz

E. Ortiz Sánchez
Instituto de Educación Secundaria, Lola Flores, Departamento de Matemáticas,
Calle Caulina s/n 11405, Jerez de la Frontera (Cádiz), España.
e-mail: enrixq@gmail.com

Received 29 June 2020; accepted 19 September 2020

En el marco de la relatividad especial, existen numerosos modelos que permiten relacionar el marco de referencia inercial con otro marco de referencia acelerado (no inercial). Vamos a proporcionar las condiciones necesarias y suficientes que determinarán la transformación óptima de una manera única.

Descriptores: Lorentz; no inercial; aceleración.

Within the framework of special relativity, there are numerous models that allow an inertial reference frame to be related to another accelerated (non-inertial) reference frame. We are going to provide necessary and sufficient conditions that will determine the optimal transformation in a unique way.

Keywords: Lorentz; non-inertial; acceleration.

PACS: 03.30.+p

DOI: https://doi.org/10.31349/RevMexFis.67.62

1. Introducción

El hecho de que las leyes de Maxwell no quedasen invariantes bajo las trasformaciones de Galileo, planteaba un problema. Lorentz encontró unas transformaciones que solucionaban dicho problema aunque cuando las publica, lo hace con un formalismo incorrecto, y es Poincaré el que las reformula adecuadamente [1].

Einstein, en su artículo de 1905 [2], formula los postulados de la Relatividad Especial, a partir de los cuales vuelve a deducir las trasformaciones de Lorentz (TL), independientemente de las leyes del electromagnetismo de Maxwell. Esta vez, las transformaciones se establecieron como un cambio de coordenadas entre dos marcos de referencia inerciales, de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

Una idea natural, sería pensar en cómo generalizar estas transformaciones al caso de que el segundo marco de referencia no fuese inercial. Han sido muchas y diversas, las formas de encontrar esta generalización. Vamos a centrarnos en las que no son giratorias. En algunas de estas generalizaciones, donde se busca la trasformación entre un marco inercial y otro acelerado por una fuerza, al considerar el caso límite en el que la fuerza es nula, la nueva transformación se reduce a las TL, ya que los dos marcos serían inerciales.

En la Ref. [3] se toma un marco no inercial que se aleja con una velocidad que depende del tiempo. Entonces las formas diferenciales tendrán un mismo aspecto que las formas diferenciales de las TL, pero ahora los coeficientes son funciones del tiempo.

En la Ref. [4] podemos ver cómo se reemplazan las formas lineales de TL, por transformaciones fraccionales lineales, homografías. Se comprueba que aplicando una doble homografía se pueden recuperar las TL, y por tanto generalizan a estas últimas.

Encontramos que en [5,6] se da el tiempo propio para un observador en un marco acelerado. Se describen modelos, a cuya transformación de coordenadas se le impone que éste sea el tiempo propio. Destacamos las coordenadas de Rindler [7], que usan el hecho de que las partículas aceleradas describen un movimiento hiperbólico en el espacio de Minkowski, así que se construye un marco de referencia en el que la partícula estaría en reposo. Dependiendo de dónde se encuentre el observador en reposo en el momento inicial, es posible dar coordenadas similares, como las de Kottler-Møller, o las coordenadas de radar Lass, aunque a todas ellas se las puede denominar como coordenadas Rindler. Observemos que en los casos concretos de Kottler-Møller y de radar Lass, para el límite en el que la fuerza se hace cero, las coordenadas resultan divergentes; y en Rindler propiamente dicho, se llega a una TL trivial, que es la identidad en la parte espacial.

Seguimos teniendo nuevos modelos, algunos muy recientes como [8], donde se impone la condición de gauge armónico. Se realiza, aproximando las series de los desarrollos de todas las cantidades involucradas. En el límite, en el que la fuerza es nula, se recuperan las TL.

Como podemos ver, existe una gran variedad de formas para describir un cambio de coordenadas entre un marco inercial y otro acelerado, y la enumeración que hemos hecho aquí no ha sido exhaustiva. Cada uno aporta un modelo para describir aproximadamente la realidad. Además, estos modelos son bastante limitados, y no son fácilmente generalizables a situaciones en el que el marco no inercial es impulsado por una fuerza no constante. Incluso en [8], se pone de manifiesto que los resultados de distintos modelos pueden ser incompatibles.

Es posible clasificar los modelos anteriores en dos tipos, dependiendo de cuál de las siguientes condiciones cumple.

- Primera: El tiempo propio para un observador en un marco acelerado es el expresado en [5,6].
- Segunda: En el límite, en el que la fuerza es nula, se recuperan las TL (no trivial, es decir, distinta de la identidad).

Lo que vamos a hacer en este artículo es dar una nueva transformación, entre los sistemas de coordenadas de cada uno de los marcos de referencia, que sea más precisa, imponiéndole las dos condiciones.

Además impondremos una tercera condición, que los observadores estacionarios en el marco acelerado, se moverán a la misma velocidad (variable) respecto del marco inercial. Esta condición podría parecer restrictiva, pero de hecho justificaremos que se corresponde con la afirmación de que los observadores estacionarios de Rindler son equivalentes a movimientos uniformemente acelerados, vistos desde el marco inercial. Para determinar estos observadores, consideraremos uno, que en el origen de los marcos está fijado al origen del sistema acelerado. El resto de observadores estacionarios sería el resultado de cubrir el espacio, con copias de esta trayectoria desplazándola paralelamente en el marco inercial, a lo largo del único eje espacial que vamos a considerar. De esta manera, tendremos un marco de referencia asociado a una familia de observadores acelerados uniformemente por un parámetro constante y común a todos ellos.

Con respecto a que son necesarias, tenemos que aclarar, que la segunda sólo tiene sentido si hay una velocidad inicial no nula. Por eso reaparecerá Rindler como modelo válido, aunque no la cumpla. Rindler es un caso particular de una fórmula más general, con velocidad inicial no nula, que si la cumple.

- Si tenemos una expresión para el tiempo propio de un observador en un marco acelerado, es necesario que el tiempo propio de la transformación que vamos a construir, concuerde con este resultado, por lo que la primera condición es necesaria.
- La transformación entre el marco inercial y el acelerado, para el caso en el que la fuerza actuante sea nula, se convertiría en una transformación entre dos marcos inerciales, por lo que la trasformación necesariamente debería de coincidir con las TL.
- La tercera condición una vez veamos su correspondencia con la equivalencia de Rindler, implicará inmediatamente que es una condición necesaria. No podría ser que nuestra transformación llevase a un resultado diferente a la equivalencia de Rindler.

Sin embargo, estas condiciones todavía no son suficientes para determinar de manera única la transformación, y tenemos que imponer una más. En este caso lo haremos como postulado sobre la contracción de la longitud, por un movimiento acelerado, el cual tendrá que ser verificado posteriormente, de forma experimental.

En resumen las condiciones serán necesarias y suficientes.

2. Transformaciones entre el sistema inercial y el no inercial

2.1. Existencia

En el espaciotiempo de Minkowski consideramos dos marcos de referencia, con orígenes coincidentes, y en cada uno de ellos un sistema de coordenadas cartesiano. El primero inercial $S=(X,T)$, y el segundo acelerado $S'=(X',T')$ asociado a una partícula con masa en reposo m_0, una velocidad inicial v_0, sometido a una fuerza constante f, y desplazándose a lo largo del eje X. Estamos considerando un tratamiento en 1+1 dimensiones. Por las ecuaciones de la mecánica relativista, podemos escribir [9]:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{f}{m_0}=\omega=\text{const.} \qquad (1)$$

Si integramos la expresión anterior:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\int_{0}^{T}\omega\cdot dt \quad \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_0}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}=\omega\cdot T. \qquad (2)$$

Llamamos $\delta=(v_0/\sqrt{1-{v_0}^2/c^2})=\gamma_0\cdot v_0$, siendo γ_0 el factor de Lorentz. Podemos despejar $v\left(T\right)$ en la expresión anterior, y nos queda:

$$v\left(T\right)=\frac{\omega\cdot T+\delta}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega\cdot T+\delta}{c}\right)^2}}, \qquad (3)$$

además se verifica:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{c}\right)^2}=\gamma_0. \qquad (4)$$

Como el origen del sistema S' se aleja con una velocidad $v\left(T\right)$ respecto de S, podemos dar su trayectoria $X_0\left(T\right)$ verificando que $\{d\left[X_0(T)\right]/dT\}=v\left(T\right)$, por lo que integrando en el intervalo de cero a T:

$$X_0\left(T\right)=\frac{c^2}{\omega}\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega\cdot T+\delta}{c}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{c}\right)^2}\right]. \quad (5)$$

Ahora suponemos que existe una transformación entre los sistemas de coordenadas del marco inercial y del acelerado, de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} X'&=F\left(X,T\right)\\ T'&=G\left(X,T\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Vamos a determinar la primera ecuación de (6), para ello la diferenciamos:

$$dX' = \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial T}dT. \tag{7}$$

Si denotamos por X'_f a un punto que permanezca fijo respecto de S', es decir, un observador estacionario en el sentido que hemos descrito, de manera que $(X_f, T) \leftrightarrow (X'_f, T')$, se tiene que $dX'_f = 0$. Además $dX_f = v(T) \cdot dT$ ya que X_f se mueve a velocidad $v(T)$ respecto de S. Sustituyendo en la Ec. (7) nos queda:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot v(T) \cdot dT + \frac{\partial F}{\partial T}dT \Rightarrow \ \frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{\partial F}{\partial X} \cdot v(T). \tag{8}$$

Una condición necesaria para que exista la función $F(X, T)$, es por tanto, que sobre los puntos fijos de S' se verifique la Ec. (8), que se conoce como ecuación del transporte, y se resuelve por el método de las características. Nos queda la familia de soluciones:

$$h\left(-\frac{\omega}{c^2} \cdot \left[X - \int v(T)\, dT\right]\right) = h\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2} - \frac{\omega \cdot X}{c^2}\right),$$

siendo $h(s)$ una función arbitraria. No hay pérdida de generalidad al introducir el factor $-\omega/c^2$, y éste nos permitirá que al tomar límites, cuando la fuerza tiende a cero, dichos límites sean convergentes. Elegimos una que nos lleve a la transformación de Lorentz,

$$h_p(s) = \frac{c^2 + \delta^2}{2\omega} - \frac{c^2}{2\omega} \cdot s^2$$

(posteriormente veremos que esta elección es única).

$$X' = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2} \cdot X - \frac{\omega \cdot X^2}{2c^2} - \frac{\omega \cdot T^2}{2} - \delta \cdot T. \tag{9}$$

Para ver que es consistente vamos a tomar el límite cuando $\omega \to 0$, en este caso al ser la fuerza nula, el marco de referencia móvil sería inercial y por tanto la transformación anterior se convierte en la primera ecuación de las transformaciones de Lorentz: $X' = \gamma_0 (X - v_0 \cdot T)$.

Observemos que si $v_0 \ll c$ y la aceleración ω es pequeña, la Ec. (9) se reduce a $X' = X - (\omega \cdot T^2/2) - v_0 \cdot T$ que se corresponde con la ecuación del movimiento acelerado de Newton.

Nos vamos a ocupar de la segunda Ec. (6), que si la diferenciamos tendrá el siguiente aspecto:

$$dT' = \frac{\partial G}{\partial X}dX + \frac{\partial G}{\partial T}dT. \tag{10}$$

Es conocido [5,6] que el tiempo propio de un observador en el marco acelerado tiene la forma:

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v(T)}{c}\right)^2} \cdot dT = \frac{dT}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2}}. \tag{11}$$

Integrando entre 0 y T, obtenemos el tiempo propio:

$$\tau = \frac{c}{\omega}\left[\arg sh\left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right) - \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]. \tag{12}$$

Posteriormente necesitaremos conocer T en función de τ, así que despejando en Ec. (12), nos queda:

$$T = \frac{1}{\omega} \cdot \left\{c \cdot sh\ \left[\frac{\omega}{c} \cdot \tau + \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right] - \delta\right\}. \tag{13}$$

Es obligatorio que nuestra transformación concuerde con este resultado.

Usamos nuevamente que sobre los puntos fijos de S' se verifica $dX_f = v(T) \cdot dT$, además el tiempo para estos puntos fijos será el propio, es decir $dT' = d\tau$. Reemplazamos en la Ec. (10):

$$d\tau = \left[\frac{\partial G}{\partial X} \cdot v(T) + \frac{\partial G}{\partial T}\right] dT. \tag{14}$$

Tenemos dos expresiones para el tiempo propio, la Ecs. (11) y (14) que deben de ser iguales:

$$\frac{\partial G}{\partial X} \cdot v(T) + \frac{\partial G}{\partial T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2}}. \tag{15}$$

La ecuación diferencial (15), nos proporciona la familia de soluciones:

$$h\left(-\frac{\omega}{c^2} \cdot \left[X - \int v(T)\, dT\right]\right) + \frac{c}{\omega} \cdot \left[\arg sh\left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right) - \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right],$$

siendo $h(s)$ una función arbitraria. Procederemos de la misma forma que hicimos con la componente espacial, tomando

$$h_p(s) = -\frac{v_0}{c^2} \cdot \left(\frac{c^2 + \delta^2}{2\omega} - \frac{c^2}{2\omega} \cdot s^2\right),$$

con lo que nos queda la solución:

$$T' = -\frac{v_0}{c^2} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2} \cdot X - \frac{\omega \cdot X^2}{2c^2} - \frac{\omega \cdot T^2}{2} - \delta \cdot T\right] + \frac{c}{\omega}\left[\arg sh\left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right) - \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]. \tag{16}$$

Para ver que es consistente vamos a tomar el límite cuando $\omega \to 0$, en este caso al ser la fuerza nula, el marco de referencia móvil sería inercial y por tanto las transformaciones anteriores deberían de convertirse en las transformaciones de Lorentz, veámoslo:

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{c}{\omega} \cdot \left\{ \arg sh \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c} \right) - \left[\arg sh \left(\frac{\delta}{c} \right) \right] \right\}$$
$$= \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{c}\right)^2}} = \frac{T}{\gamma_0}. \tag{17}$$

Por tanto, en el límite:

$$T' = -\frac{v_0}{c^2} \cdot (\gamma_0 \cdot X - \gamma_0 \cdot v_0 \cdot T) + \frac{T}{\gamma_0}$$
$$= \gamma_0 \left(T - \frac{v_0}{c^2} \cdot X \right). \tag{18}$$

Observemos que si usamos la transformada de Lorentz para la posición $X' = \gamma_0 (X - v_0 \cdot T)$ podemos relacionar el tiempo primado con el tiempo propio para el caso inercial, sustituyendo en la primera igualdad de la Ec. (18):

$$T' = -\frac{v_0}{c^2} \cdot X' + \tau. \tag{19}$$

Además si reemplazamos Ecs. (9) y (12) en (16), volvemos a obterner la Ec. (19). Esto quiere decir que esta Ec. (19) es válida tanto para marcos inerciales como no inerciales.

Las Ecs. (9) y (16) constituyen la transformación entre el sistema de coordenadas inercial y el no inercial.

2.2. Postulado sobre la contracción de la longitud, por un movimiento acelerado. Unicidad

Definimos

$$\gamma (X, T) = -\frac{\omega}{c^2} \cdot \left[X - \int v(T)\, dT \right]$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c} \right)^2} - \frac{\omega \cdot X}{c^2},$$

cuyo límite es γ_0 el factor de Lorentz.

A modo de ejemplo, podemos ver que si diferenciamos (9), nos quedaría: $dX' = \gamma (X, T) \cdot [dX - v(T)\, dT]$. Lo que nos indicaría que $\gamma (X, T)$ viene a generalizar al factor de Lorentz.

Hemos hallado las trasformaciones generalizadas para el caso que

$$h_p(s) = \frac{c^2 + \delta^2}{2\omega} - \frac{c^2}{2\omega} \cdot s^2,$$

pero veremos que de hecho ésta es la única.

Si tenemos una barra fija en el marco de referencia acelerado S', de extremos x'_a y x'_b a los que corresponden los valores x_a y x_b respecto de S, obtenidos de manera simultánea, es decir, $t_a = t_b$. Sabemos que si la regla mide $L = x_b - x_a$ respecto de S, y $L' = x'_b - x'_a$ respecto de S'. A partir de las transformaciones de Lorentz se tiene el resultado: $L' = \gamma_0 \cdot L$, para sistemas inerciales. Ahora bien, en nuestro caso, en cada instante podríamos considerar un marco inercial que coincidiera instantáneamente con el acelerado, con lo que podríamos escribir la expresión de la contracción dependiendo de la velocidad que tenga en cada momento $L' = \gamma_{v(t)} \cdot L$.

Ya tendríamos una expresión de la contracción dependiendo de la velocidad, pero la aceleración también tiene que contribuir a esa contracción por lo que postulamos que la expresión definitiva para la contracción sería:

$$L' = \gamma \left(\frac{x_b + x_a}{2}, t_a \right) \cdot L. \tag{20}$$

Observemos que $(x_b + x_a/2)$ es el punto medio de la barra. Postulamos que la contribución de la aceleración a la contracción es el término $-(\omega/c^2) \cdot [(x_b + x_a)/2]$. Aunque no hay que demostrar el postulado, la justificación radica en el hecho de que mantiene la misma fórmula para la contracción de Einstein, pero reemplazando el factor de Lorentz, por su correspondiente generalizado. Hacemos un pequeño ajuste tomando el punto medio, y veremos seguidamente que nos lleva a un resultado satisfactorio.

Apliquemos el postulado de la contracción a nuestra situación:

$$h_p(\gamma(x_b, t)) - h_p(\gamma(x_a, t)) = x'_b - x'_a = \gamma \left(\frac{x_b + x_a}{2}, t \right) \cdot (x_b - x_a) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot t + \delta}{c} \right)^2} \cdot (x_b - x_a)$$
$$- \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{(x_b + x_a)}{2} \cdot (x_b - x_a) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot t + \delta}{c} \right)^2} \cdot (x_b - x_a) - \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{(x_b{}^2 - x_a{}^2)}{2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot t + \delta}{c} \right)^2} \cdot (x_b) - \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{(x_b{}^2)}{2} - \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot t + \delta}{c} \right)^2} \cdot (x_a) - \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{(x_a{}^2)}{2} \right].$$

Si comparamos la primera expresión y la última, podemos concluir:

$$h_p(\gamma(x_b, t)) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot t + \delta}{c} \right)^2} \cdot (x_b) - \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{(x_b{}^2)}{2} + j(t).$$

Para obtener este resultado, forzosamente $h_p(s)$ tiene que ser un polinomio de segundo grado, en el que además no hay término de grado uno, es decir: $h_p(s) = m \cdot s^2 + n$.

Observemos que si tomamos límite cuando $\omega \to 0$, en $m \cdot \gamma(X,T)^2 + n$, obtendríamos $m \cdot {\gamma_0}^2 + n$. Deberíamos de llegar a la TL espacial, pero sólo obtendríamos una constante, salvo que tengamos una indeterminación en el límite. Para lo cual, tendría que ser $n = -m \cdot {\gamma_0}^2$ y $m = -(c^2/2 \cdot \omega)$. El valor de m surge de tomar una potencia adecuada de ω para que sea un cero del mismo orden que $\gamma(X,T)^2 - {\gamma_0}^2$ y que el límite coincida exactamente con la TL espacial.

Finalmente llegamos a $h_p(s) = -(c^2/2 \cdot \omega) \cdot \left(s^2 - {\gamma_0}^2\right)$. Para la parte temporal de la Ec. (6), el razonamiento sería análogo al que acabamos de realizar. En consecuencia, la transformación generalizada es única.

2.3. Correspondencia con la equivalencia de Rindler

En primer lugar vamos a expresar la velocidad de un observador Rindler estacionaro, respecto del marco inercial. Lo haremos en función del tiempo propio:

$$v_R(T) = c^2 \cdot \frac{T}{X} = c \cdot th\left(\frac{\omega}{c} \cdot \tau\right). \tag{21}$$

En segundo lugar vamos a determinar la velocidad, de nuestro observador estacionario según la tercera condición que hemos impuesto, reemplazando en la fórmula de la velocidad la Ec. (13):

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{\omega \cdot T + \delta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2}} \\ &= c \cdot th\left[\frac{\omega}{c} \cdot \tau + \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

En Rindler $v_0 = 0$, y por tanto $\delta = 0$. Sí reemplazamos en la Ec. (22), nos queda que esta expresión es idéntica a la Ec. (21). Concluimos que la equivalencia de Rindler se corresponde con nuestra tercera condición.

3. Transformaciones entre el marco no inercial y el inercial

3.1. Determinación de las ecuaciones de trasformación

Se podría pensar en utilizar el mismo razonamiento que hemos usado anteriormente, desde el marco no inercial, pero este camino no va ser adecuado ya que se observaría como el marco inercial se aleja aceleradamente, lo que da una imagen distorsionada de la realidad.

Lo que vamos a hacer, es simplemente despejar las variables X y T en las Ecs. (9) y (16). Si reemplazamos la primera ecuación en la segunda, nos queda:

$$\begin{aligned} T' = &-\frac{v_0}{c^2} \cdot X' \\ &+ \frac{c}{\omega}\left[\arg sh\left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right) - \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Si despejamos T y usamos (19):

$$T = \frac{1}{\omega} \cdot \left\{c \cdot sh\left[\frac{\omega}{c} \cdot \tau + \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right] - \delta\right\}. \tag{24}$$

Observemos que esta expresión ya la obtuvimos en la Ec. (13). Ahora despejamos X en la Ec. (9):

$$\begin{aligned} X = &\frac{c}{\omega} \cdot \left[-\sqrt{c^2 + \delta^2 - 2 \cdot \omega \cdot X'}\right. \\ &\left. + c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot T + \delta}{c}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Si reemplazamos la Ec. (24) en la Ec. (25):

$$\begin{aligned} X = &\frac{c}{\omega} \cdot \left\{-\sqrt{c^2 + \delta^2 - 2 \cdot \omega \cdot X'}\right. \\ &\left. + c \cdot ch\left[\frac{\omega}{c} \cdot \tau + \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Las Ecs. (24) y (26) constituyen la transformación del sistema de coordenadas no inercial al inercial. En el límite inercial coincide con las transformaciones de Lorentz inversas (antes de calcular el límite es conveniente utilizar las fórmulas del seno y el coseno de la suma, lo que facilita los cálculos).

Ahora vamos a tomar $v_0 = 0$, con lo que la transformación entre los dos sistema de coordenadas quedaría de la forma.

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{c}{\omega} \cdot \left\{c \cdot ch\left(\tfrac{\omega}{c}\tau\right) - \sqrt{c^2 - 2 \cdot \omega \cdot X'}\right\} \\ T &= \tfrac{c}{\omega} \cdot sh\left(\tfrac{\omega}{c}\tau\right) \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Si fijamos $X' = c^2/2\omega$, las Ecs. (27) toman la forma:

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{c^2}{\omega} \cdot ch\left(\tfrac{\omega}{c}\tau\right) \\ T &= \tfrac{c}{\omega} \cdot sh\left(\tfrac{\omega}{c}\tau\right) \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Estas son las ecuaciones del movimiento hiperbólico, que sabemos están ligadas a las coordenadas de Rindler [7]:

$$\left.\begin{aligned} X &= r \cdot ch\,(c \cdot t) \\ c \cdot T &= r \cdot sh\,(c \cdot t) \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

3.2. Métrica en el marco acelerado

Si llamamos

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \cdot \left(T' + \frac{v_0}{c^2} \cdot X'\right) + \arg sh\left(\frac{\delta}{c}\right),$$

diferenciando en las transformaciones (24) y (26), y sustituyendo en la métrica de Minkowski, obtenemos:

$$dS^2 = -c^2 \cdot dT^2 + dX^2 = -c^2 \cdot dT'^2 + \left(-\frac{v_0^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2+\delta^2-2\cdot\omega\cdot X'} + \frac{2\cdot v_0\cdot sh\,(\alpha)}{\sqrt{c^2+\delta^2-2\cdot\omega\cdot X'}}\right) dX'^2$$
$$+ \left(-2\cdot v_0 + \frac{2\cdot c^2\cdot sh\,(\alpha)}{\sqrt{c^2+\delta^2-2\cdot\omega\cdot X'}}\right)\cdot dT'\cdot dX' = dS'^2. \quad (30)$$

3.3. Transformaciones entre marcos no inerciales

Si tenemos dos sistemas de coordenadas de dos marcos no inerciales S' y S'', además de un sistema de coordenas en un marco inercial S, para determinar la transformación de S' a S'' es suficiente tomar las trasformaciones de S' a S y de S a S'' y hallar su composición.

4. Conclusiones

Hemos clarificado la relación de las TL, con las transformaciones entre un sistema de coordenadas en un marco inercial, y otro en un marco acelerado, en relatividad especial.

Tenemos que hacer notar, que no sólo es interesante haber encontrado unas transformaciones que generaliza las de Lorentz, sino también el procedimiento que hemos empleado. Podemos pensar en aplicar dicho procedimiento a situaciones más generales, como puede ser un marco acelerado por una fuerza que dependa del tiempo. Aunque este camino está por explorar, y será necesario encontrar las condiciones que tienen que cumplirse.

1. I.I. Shapiro, A century of relativity, *Rev. Mod. Phys*. **71** (1999) S41, `https://doi.org/10.1103/RevModPhys.71.S41`.
2. A. Einstein *et al.*, On the Electrodynamics of Moving Bodies, *Ann. Phys*. **17** (1905) 891, `https://doi.org/10.1016/B978-0-08-006995-1.50014-4`.
3. J. Urani and G. Gale, An extensioin of special relativity to accelerating frames and some of its philosophical implications, *Synthese* **50** (1982) 301, `https://doi.org/10.1007/BF00413887`.
4. E. H. Kerner, An extension of the concept of inertial frame and of Lorentz transformation, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **73** (1976) 1418, `https://doi.org/10.1073/pnas.73.5.1418`.
5. C. Møller, *The theory of relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1952), p. 122.
6. E. Loedel, *Física Relativista* (Kapelusz, Buenos Aires, 1955), pp. 105-110.
7. W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological* (Oxford University Press, Oxford, 2001), pp. 70-76.
8. S. G. Turyshev, O. L. Minazzoli and V. T. Toth, Accelerating relativistic reference frames in Minkowski space-time, *J. Math. Phys*. **53** (2012) 032501, `https://doi.org/10.1063/1.3692166`.
9. A. A. Logunov, *Curso de teoría de la relatividad y de la gravitación: análisis contemporáneo del problema*, 2da ed. (URSS, España, 2014), pp. 151-154.