EFECTOS TRANSITORIOS EN LA DISPERSION CAUSADA POR UNA ESFERA RIGIDA

Marcos Moshinsky

Instituto Nacional de la Investigación Científica e Institutos de Física y Geofísica, Universidad de México

(Recibido: Enero 2, 1952)

RESUMEN

In the present paper we discuss the transients effects associated with the dispersion by an impenetrable spherical potential. These transient effects are compared with those that appear in the single level scattering process, and their relevance to the time-energy uncertainty relation is also discussed.

I.- Introducción.

En trabajos anteriores[1] se ha discutido la descripción en el tiempo de las reacciones nucleares de resonancia. Los estados asociados con el proceso de reacción nuclear se formularon en un espacio de Fock, y con un formalismo de mecánica cuántica apropiado a dicho espacio de Fock[1], se pudo discutir la dependencia en el tiempo de las funciones de onda.

Con el objeto de aclarar el significado de los efectos transitorios que aparecen en las reacciones nucleares de resonancia, es conveniente analizar los fenómenos transitorios en un caso de dispersión por un potencial ordinario. Con ese objeto, en la presente nota discutiremos los efectos transitorios en la dispersión causada por una esfera rígida, esto es, por una barrera de potencial con centro en el origen de coordenadas, de forma:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r > a \\ \infty & \text{si} \quad r < a \end{cases} \tag{1}$$

El presente problema tiene también un interés directo en las reacciones nucleares, porque como es bien sabido, los nucleos bombardeados por neutrones en cierto rango de energía, tienden a comportarse como esferas rígidas, si nos hallamos lejos de los niveles de energía del nucleo compuesto[2].

Discutiremos también la relación entre los efectos transitorios que aparecen en la dispersión por una esfera rígida, y la relación de incertidumbre para el tiempo y la energía.

II.- Efectos Transitorios.

Los procesos transitorios que deseamos investigar pueden originarse en la forma siguiente: Asumamos que para $t < 0$ tenemos un haz de partículas (por ejemplo neutrones) con un momento definido. Utilizando unidades en que $h = c = 1$ y la masa de la partícula $m = 1$, el estado de una partícula del haz se describe por la función de onda:

$$\psi\,(\underline{r},\underline{k}'',t) = \exp\, i\,[\underline{k}''\cdot\underline{r} - \tfrac{1}{2}\,k''^2\,t]\,, \quad \text{para} \quad t<0, \tag{2}$$

donde $\underline{k}''$ representa el momento de la partícula y $E'' = \frac{1}{2}\,k''^2$ su energía. En el instante $t = 0$ se introduce en el origen de coordenadas un potencial del tipo (1) y la pregunta que nos hacemos se refiere al comportamiento de la función de onda (2) para tiempos $t > 0$.

Simplificaremos un poco el problema restringiéndonos a aquellas energías de las partículas en las que la longitud de onda $\lambda=(2\pi/k'')$ sea mucho mayor que el alcance "a" del potencial, esto es, cuando $k'' a \ll 1$. En tal caso, como es bien sabido, sólo es de importancia la dispersión en onda S. Con esa restricción en la energía se puede considerar que la función de onda (2) para $t > 0$ puede expresarse en la forma:

$$\psi(\underline{r},\underline{k}'',t) = [\exp(i\,\underline{k}''\cdot\underline{r}) - (k''r)^{-1}\,\text{sen}\,k''r]\exp(-i\tfrac{1}{2}k''^2 t)$$

$$+ (k''r)^{-1}\,\phi(r,k'',t)\,, \qquad \text{para} \quad t > 0\,. \tag{3}$$

La función $\phi(r,k'',t)$ que depende solo de la magnitud de $\underline{r}$ y $\underline{k}''$, satisface la ecuación:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = -\,i\frac{\partial\phi}{\partial t}\,, \tag{4}$$

la condición a la frontera:

$$\phi(a,k'',t) = 0\,, \tag{5}$$

y la condición inicial para $t = 0$:

$$\phi(r,k'',0) = \text{sen}\,k''\,r\,, \qquad \text{para} \quad r > a\,. \tag{6}$$

El problema de determinar los efectos transitorios en la dispersión causada por una esfera rígida, se reduce entonces al de determinar la función $\phi(r,k'',t)$ que satisface las condiciones (4,5,6).

Como es bien sabido, los problemas de condiciones a la frontera en los que se especifica un estado inicial, requieren para su solución la ayuda de transformadas apropiadas al problema. En el presente caso, éstas transformadas pueden obtenerse a partir de las transformadas de Fourier:

$$f(k) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty g(x)\,\text{sen}\,kx\,dx\,, \tag{7a}$$

$$g(x) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty f(k)\,\text{sen}\,kx\,dk\,. \tag{7b}$$

Las soluciones estacionarias de (4), (5) correspondientes a una energía $E = \frac{1}{2} k^2$, tienen la forma $\operatorname{sen} k\,(r-a)$. Para obtener una transformada en que figuren estas soluciones estacionarias, hacemos en (7) el cambio de variable $x = r-a$. Designando $g(r-a) \equiv F(r)$, obtenemos las transformadas:

$$f(k) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty F(r) \operatorname{sen}[k\,(r-a)]\,dr \tag{8a}$$

$$F(r) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(k) \operatorname{sen}[k\,(r-a)]\,dk \quad . \tag{8b}$$

Con ayuda de (8) se ve de inmediato que $\phi\,(r,t)$ definida por:

$$\phi\,(r,t) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(k) \operatorname{sen}[k\,(r-a)] \exp\,(-i\tfrac{1}{2}\,k^2\,t)\;dk \;, \tag{9}$$

satisface la ecuación (4), la condición a la frontera (5) y también la condición inicial (6), si hacemos:

$$F(r) = \operatorname{sen} k''r \quad . \tag{10}$$

Introduciendo (10) en (8a) y haciendo de nuevo el cambio de variable $x = r-a$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(k) &= (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \operatorname{sen}[k''(x+a)] \operatorname{sen} kx\;dx \\ &= \cos k''a\;[(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \operatorname{sen} k''x \operatorname{sen} kx\;dx] \\ &\quad + \operatorname{sen} k''a\;[(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cos k''x \operatorname{sen} kx\;dx] \quad . \end{aligned} \tag{11a}$$

Las integrales dentro de los paréntesis cuadrados han sido obtenidas en el apéndice I de la referencia (A). Con ayuda de esos valores, se tiene:

$$f(k) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} k\{\cos k''a\;\delta(k^2-k''^2) + \operatorname{sen} k''a[\pi(k^2-k''^2)]^{-1}\} \quad . \tag{11b}$$

Introduciendo (11b) en (9) se tiene:

$$\phi\ (r,k'',t) = \cos k''a\ \mathrm{sen}[k''(r-a)]\exp\ (-i\ \tfrac{1}{2}\ k''^2t)$$

$$+\ \mathrm{sen}\ k''a(2/\pi)\ P\int_0^\infty (k^2-k''^2)^{-1}\mathrm{sen}[k(r-a)]\exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ k^2t)\ kdk\quad . \qquad (12)$$

La P antes de la integral es para indicar que debe tomarse el valor principal de Cauchy[3] de la misma.

Por una transformación sencilla la integral en (12) puede ponerse en la forma:

$$(2i)^{-1}\ P\int_{-\infty}^{\infty} (k^2-k''^2)^{-1}\ \exp\ i\ [k\ (r-a)-\tfrac{1}{2}\ k^2t]\ kdk\quad . \qquad (13)$$

Para evaluar esta integral utilizamos el contorno en el plano k indicado por la figura 1, que difiere del contorno utilizado en el caso de dispersión uninivelar, solo por el hecho de que no hay que considerar los polos de la función $S(k)$.

La ausencia de los polos de la función $S(k)$, es natural, por que escribiendo la onda estacionaria en la forma:

$$\mathrm{sen}[k(r-a)] = (i/2)\exp(ika)[\exp(-ikr)-\exp(-i2ka)\exp(ikr)]\ , \qquad (14)$$

vemos que: $$S(k)\ =\ \exp(-i2ka)\quad . \qquad (15)$$

La función $S(k)$ para el problema de dispersión por una esfera rígida, es analítica en todo el plano complejo k y no representa por lo tanto polos.

Utilizando el contorno de la fig.No.1, vemos que:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} = \pi i\ \mathrm{Res}\ (k=-k'')\ -\ \pi i\ \mathrm{Res}\ (k=k'')\ +\int_{-(1-i)\infty}^{(1-i)\infty}\quad . \qquad (16)$$

En la última integral de (16) descomponemos el término $k(k^2-k''^2)^{-1}$ en fracciones simples de la forma:

$$k(k^2-k''^2)^{-1} = \tfrac{1}{2}\ [(k-k'')^{-1} + (k+k'')^{-1}]\quad . \qquad (17)$$

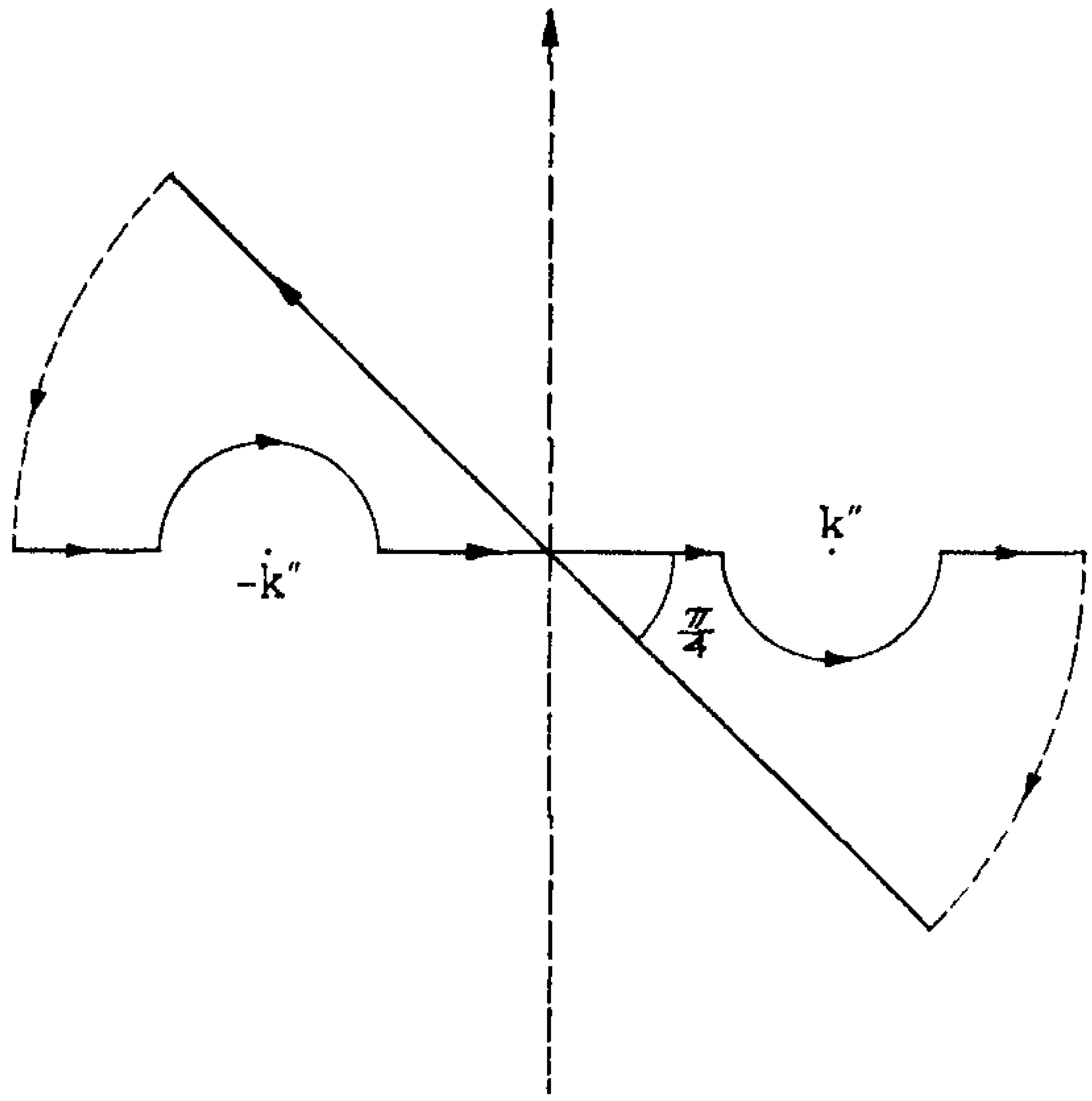

Fig.# 1

La integral en (16) se reduce a la suma de dos integrales de un tipo que ya fué discutido en el apéndice 1 de (A), y se tiene entonces:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} = \tfrac{1}{2}\,\pi i \exp i\,[-k''(r-a)-\tfrac{1}{2}\,k''^{2}t]-\tfrac{1}{2}\,\pi i \exp i\,[k''(r-a)-\tfrac{1}{2}\,k''^{2}t]$$

$$-\frac{\pi i}{2}\,\{X(r-a,k'',t)-2\exp i\,[k''(r-a)-\tfrac{1}{2}\,k''^{2}t]\}-\frac{\pi i}{2}\,X(r-a,-k'',t) \quad . \quad (18)$$

La función $X(r-a,k,t)$ está definida para todo k en la forma:

$$X(r-a,k,t) = \exp i\,[k(r-a)-\tfrac{1}{2}\,k^{2}t]\ \mathrm{erfc}\,\{e^{-(i\pi/4)}(2t)^{-\frac{1}{2}}[(r-a)-kt]\}, \quad (19)$$

donde $\mathrm{erfc}(z) = 2\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^{2}}\,dz = 1-\mathrm{erf}(z)$.

Introduciendo (18) en (12) tenemos finalmente que:

$$(k''r)^{-1}\,\phi(r,k'',t) = (k''r)^{-1}\,\mathrm{sen}\,k''r\,\exp\,(-i\,\tfrac{1}{2}\,k''^{2}t) + \psi_{s}(r,k'',t), \quad (20)$$

donde $\psi_{s}(r,k'',t)$ que representa a la onda S-dispersa, está dada -

por:

$$\psi_s(r,k'',t) = -(2k''r)^{-1} \text{ sen } k''a\ [X(r-a,k'',t) + X(r-a,-k'',t)] \quad . \qquad (21)$$

De las propiedades de $X(r,k,t)$ dadas en el apéndice 2 de (A) es fácil comprobar que $\phi(r,k'',t)$ dada por (20) satisface las condiciones (4,5,6). Por lo tanto, $\psi_s(r,k'',t)$ representa la forma dependiente del tiempo de la onda S-dispersa por efecto de la introducción de un potencial $V(r)$ del tipo (1).

Se ha mostrado anteriormente[1] que cuando $t \to \infty$ las funciones X tienden asintóticamente a:

$$X\ (r-a,k'',t) \to 2 \exp i\ [k''(r-a)-\tfrac{1}{2}\ k''^2t], \quad X(r-a,-k'',t) \to 0$$

Utilizando éste resultado vemos que la función $\psi_s(r,k'',t)$ cuando $t \to \infty$, tiende a su valor estacionario:

$$\psi_s(r,k'',t) \to -(k''r)^{-1} \text{ sen } k''a \exp i\ [k''(r-a)-\tfrac{1}{2}\ k''^2t] \ , \qquad (22)$$

y que por lo tanto, la sección total de dispersión tiene el valor usual[4]:

$$\sigma = 4\pi\, k''^{-2} \text{ sen}^2\ k''a \ . \qquad (23)$$

Es de interés comparar la función de onda ψ_s para la dispersión por una esfera rígida, con la función de onda para un proceso uninivelar ψ_{sn} dada por la ecuación (23) de (A). Como en las condiciones experimentales usuales, la corriente dispersa de partículas es observada a una distancia del dispersor grande comparada con la longitud de onda, solo nos interesan las funciones de onda ψ_s y ψ_{sn} para $r >> \lambda$. En tal caso, como se vió en la referencia (A) $|X(r,-k'',t)|$ y $|X(r,k_2,t)|$ son $<<1$ para toda $t > 0$ y podemos eliminarlos tanto en (21) como en (23A). En tales circunstancias tetemos que:

$$r\,\psi_s \simeq -(2k'')^{-1} \text{ sen } k''a\; X(r,k'',t) \tag{24a}$$

$$r\,\psi_{sn} \simeq \tfrac{1}{2} C^2 \;(k_o^2-k''^2-ik''C^2)^{-1}X(r,k'',t)$$

$$-C^2\; k_1(k_1^2-k''^2)^{-1}(k_1-k_2)^{-1}\; X(r,k_1,t)\;, \tag{24b}$$

donde k_1, k_2 son los polos de la función $S(k)$ para el proceso uninivelar, $E_o = \frac{1}{2} k_o^2$ es la energía de resonancia, y $\Gamma_o = \frac{1}{2} C^2\, k_o$ es la anchura del nivel para la energía de resonancia.

Para una energía $E'' = \frac{1}{2} k''^2$ definida, los coeficientes de las X son constantes y los efectos transitorios que se observan en el proceso uninivelar pueden interpretarse como la combinación del efecto transitorió provocado por la dispersión causada por una esfera rigida, mas el efecto transitorio producido cuando el nucleo compuesto, de vida media $\tau = (2\,\Gamma_o)^{-1}$, emite una particula de energía E_o.

III.- La relación de incertidumbre tiempo-energía.

En la sección anterior hemos investigado los efectos transitorios en la dispersión causada por un potencial, que están íntimamente ligados con la relación de incertidumbre tiempo-energía. En efecto, cuando el tiempo a partir de la introducción del potencial tiende a ∞, la función de onda ψ_s dada por (21), tiende a su valor estacionario que corresponde a una energía definida $E'' = \frac{1}{2} k''^2$. En cambio, la $\psi_s(r,k'',t)$ para un tiempo $T \neq \infty$, puede expresarse como una superposición de funciones de onda de energía definide en una forma tal, que como veremos mas abajo, la indeterminación ΔE en la energía y T están relacionadas por:

$$T\;\Delta E \simeq h \tag{25}$$

En un trabajo reciente Rideau[5] ha mostrado que un sistema de energía definida, bajo la acción de un potencial exterior que solo actúa durante un intervalo de tiempo T, sufre una indeterminación ΔE

en su energía que satisface la relación (25). En su análisis, Rideau utiliza un método de perturbaciones basado en una técnica de Lippman y Schwinger.[6]

En el presente trabajo la función de onda transitoria ψ_a para el problema de dispersión por una esfera rígida, ha sido obtenido en forma rigurosa sin utilizar ningún proceso de perturbación. Tiene por tanto, interés contrastar la indeterminación en la energía que se obtiene en el presente problema con la que aparece en el análisis de Rideau.

Como es bien sabido, la eigen función normalizada de la energía para el problema de la esfera rígida, que corresponde a un momento angular $l = 0$ y a un eigenvalor de la energía $E' = \frac{1}{2} k'^2$, está dada por:

$$\varphi_{E'}(r) = (2\pi^2 k')^{-\frac{1}{2}} r^{-1} \operatorname{sen}[k'(r-a)], \quad \text{para} \quad r > a \quad . \qquad (26)$$

Del formalismo general de la mecánica cuántica[7] se tiene que:

$$P(E',E'',T) = |(\varphi_{E'},\psi_a)|^2 = |4\pi \int_a^\infty \varphi_{E'}(r)\ \psi_a(r,k'',T) r^2 dr|^2 \quad , \qquad (27)$$

representa la densidad de probabilidad para que una partícula dispersa, observada un tiempo T después de la introducción del potencial, tenga una energía E'.

Introduciendo de nuevo la variable $x = r-a$, vemos que (27) se reduce a la evaluación de integrales de la forma*:

$$\int_0^\infty X(x,k,t) \operatorname{sen} k'x dx = -k'(k^2-k'^2)^{-1} X(0,k,t) +$$

$$+ \frac{1}{2} (k-k')^{-1} X(0,k',t) - \frac{1}{2} (k+k')^{-1} X(0,-k',t) \quad . \qquad (28a)$$

Utilizando (28a) y la propiedad:

*La integral (28a) fué evaluada en el apéndice de la referencia B.

$$X(0,k,t) + X(0,-k,t) = 2 \exp\left(-i \tfrac{1}{2} k^2 t\right) \tag{28b}$$

se obtiene finalmente:

$$P(E',E'',T) = (32\, k' k''^{-2} \operatorname{sen}^2 k''a)\, [(E''-E')^{-2} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (E''-E')T] \, . \tag{29}$$

Como la función[7] $y^{-2} \operatorname{sen}^2 y$ difiere apreciablemente de 0 solo para y en el intervalo $0 < |y| < \pi$, concluimos de (29) que la indeterminación $\Delta E = |E''-E'|$ en la energía está dada por:

$$\tfrac{1}{2}\, T\, \Delta E = \pi \tag{30}$$

Cuando pasamos a unidades ordinarias, tenemos que multiplicar el lado derecho de (30) por $\hbar$ obteniendo entonces la relación de incertidumbre (25).

Hemos ilustrado, con ayuda de los fenómenos transitorios que aparecen en la dispersión, que cuando un evento (tal como el choque de una partícula con una barrera de potencial) le sucede a un sistema monoergético dentro de un intervalo de tiempo T, aparece una indeterminación ΔE en la energía tal, que la relación (25) se satisface.

REFERENCIAS

1. M.Moshinsky. Phys.Rev. 84, 525, 533 (1951)
   Designaremos estos trabajos por (A) y (B) respectivamente.
2. H.Feshbach y V.F.Weisskopf. Phys.Rev. 76, 1550 (1949).
3. E.T.Whittaker y G.N.Watson. Modern Analysis. (American Edition (1943)) p.117.
4. N.F.Mott y H.S.W.Massey. The theory of atomic collisions. (Oxford Clarendon Press (1949) p.38.
5. G.Rideau. C.R.Acad.Sci. Paris. 232, 1338 y 2007 (1951)
6. B.A.Lippman y J.Schwinger. Phys.Rev. 79, 469 (1950).
7. M.Born. Optik. Julius Springer, Berlin (1933) p.157.