ORBITAS NO-PLANAS DE UNA PARTICULA EN EL CAMPO DE UNA ESFERA EN ROTACION EN LA TEORIA DE BIRKHOFF

Fernando Alba Andrade

Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México

(Recibido: Enero 14, 1952)

RESUMEN.

In the present paper we discuss the motion of a particle in the gravitacional field of a rotating sphere, in Birkhoff's theory of gravitation. The particle is assumed to move in a circular orbit as a first approximation, and the motion of the plane of the orbit is discussed.

En este trabajo se estudia el cambio del plano de la órbita de una partícula, cuando se encuentra en el campo Birkhoffiano de una esfera en rotación, moviéndose en una órbita circular como primera aproximación.

En la Teoría de la Gravitación de Birkhoff, los potenciales[1,2,3] $h_{\mu\nu}$ para una distribución continua de materia, en el caso en que la densidad de materia y densidad de corriente no dependan del tiempo respecto a un observador inercial, y cuando se desprecian todos los términos de orden superior a $\frac{V}{C}$, están dados por:

$$h_{\mu\nu} = \frac{G}{c^2}\int \frac{dm}{cr}\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & -2v^1 \\ 0 & c & 0 & -2v^2 \\ 0 & 0 & c & -2v^3 \\ -2v^1 & -2v^2 & -2v^3 & c \end{bmatrix} \tag{1}$$

En donde v^1, v^2, v^3 son las componentes físicas del vector velocidad.

Consideremos el caso de una cáscara esférica, con densidad superficial constante y masa "m", que gira alrededor del eje "z" con velocidad angular constante "ω".

Si definimos $\{h_{4i}\} = \bar{A}$, obtendremos:

Adentro del cascarón

$$\bar{A} = -\frac{2G}{c^3}\int \frac{\bar{\omega}\times\bar{a}}{r}\,dm = -\frac{2}{3}\,\frac{m}{a}\,\frac{G}{c^3}\,\bar{\omega}\times\bar{R}$$

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = \frac{m\ G}{c^2\ a} \tag{2}$$

Fuera del cascarón

$$\bar{A} = -\frac{2G}{c^3}\int \frac{\bar{\omega}\times\bar{a}}{r}\,dm = \frac{2}{3}\,\frac{ma^2}{R^3}\,\frac{G}{c^3}\,\bar{\omega}\times\bar{R}$$

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = \frac{m\ G}{c^2 R} \tag{3}$$

Donde "R" es la distancia del centro de la cáscara esférica al punto, y "a" el radio de la cáscara.

Los elementos de la diagonal principal son los potenciales Newtonianos.

En el caso de una esfera de densidad constante, masa "M", momento de inercia "I", y radio "a"; que gira alrededor del eje "z" con velocidad angular "ω", obtendremos para puntos dentro de la esfera:

$$h_{\mu\nu} = \frac{M\,G}{c^2 a^3}\begin{bmatrix} -\frac{R^2}{2}+\frac{3a^2}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{5}\frac{\omega y}{c}R^2+\frac{a^2\omega y}{c} \\ 0 & -\frac{R^2}{2}+\frac{3a^2}{2} & 0 & \frac{3}{5}\frac{\omega x}{c}R^2-\frac{a^2\omega x}{c} \\ 0 & 0 & -\frac{R^2}{2}+\frac{3a^2}{2} & 0 \\ -\frac{3}{5}\frac{\omega y}{c}R^2+\frac{a^2\omega y}{c} & \frac{3}{5}\frac{\omega x}{c}R^2-\frac{a^2\omega x}{c} & 0 & -\frac{R^2}{2}+\frac{3a^2}{2} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Fuera de la esfera:

$$h_{\mu\nu} = \frac{MG}{c^2\,R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\frac{a^2}{R^2}\frac{y\omega}{c} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5}\frac{a^2}{R^2}\frac{x\omega}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5}\frac{a^2}{R^2}\frac{y\omega}{c} & -\frac{2}{5}\frac{a^2}{R^2}\frac{x\omega}{c} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

En donde "R" es la distancia del centro de la esfera a la partícula.

En la teoría de Birkhoff, las ecuaciones del movimiento de una partícula estan dadas por:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \left(\frac{\partial h_{i\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}\ , \qquad (6)$$

En donde $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$ y $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$.

Si definimos:

$$f = \frac{M\,G}{c^2 r} \;; \quad \{h_{i4}\} = \bar{A}_\varepsilon = -\frac{IG}{c^3 R^3}\,\bar{\omega} \times \bar{R}$$

$$\bar{U} = [1 - (V^2/c^2)]^{\frac{1}{2}}\,(\bar{V}/c)\;, \tag{7}$$

las ecuaciones del movimiento en forma vectorial son:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = -c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\left\{[(\bar{U}\cdot\nabla)\,f]\;\;\bar{U} - (\nabla f)\left[\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + U^2\right]\right\} +$$

$$+\,c\,(\bar{U}\cdot\nabla)\,\bar{A}_\varepsilon + 2\,c\,\bar{U} \times (\nabla \times \bar{A}_\varepsilon) \tag{8}$$

Los dos primeros términos representan aceleraciones en el plano de la orbita, los dos últimos términos son muy pequeños comparados con los anteriores y nos representan aceleraciones que no están en el plano de la órbita, excepto cuando el plano orbital coincide con el plano ecuatorial de la esfera.

Si definimos un nuevo sistema de referencia (fig. 1) en el que el plano inicial en que se mueve la partícula es (X,Y), el vector ω se encuentra en el plano (X,Z), formando un ángulo θ con el eje "Z", y si despreciamos el calcular "a_z" , a todos los términos que contengan a $(\frac{V}{c})^2$ y a potencias de orden superior, tendremos que "a_z" está dada por

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{MG}{R^3}\,Z + c\,\{(\bar{V}\cdot\nabla)\,\bar{A}_\varepsilon + 2\bar{V} \times (\nabla \times \bar{A}_\varepsilon)\}_z \tag{9}$$

Efectuando operaciones se encuentra

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{MG}{R^3}\,Z + \frac{3\,I\,G\,\omega\;\;\mathrm{sen}\theta}{c^2\,R^3}\;-\left[\frac{XY}{R^2}\,V_x - \frac{Y^2}{R^2}\,V_y + V_y\right] \tag{10}$$

Debido a que para valores de $Z \doteq 0$, a_z es muy pequeña - - -

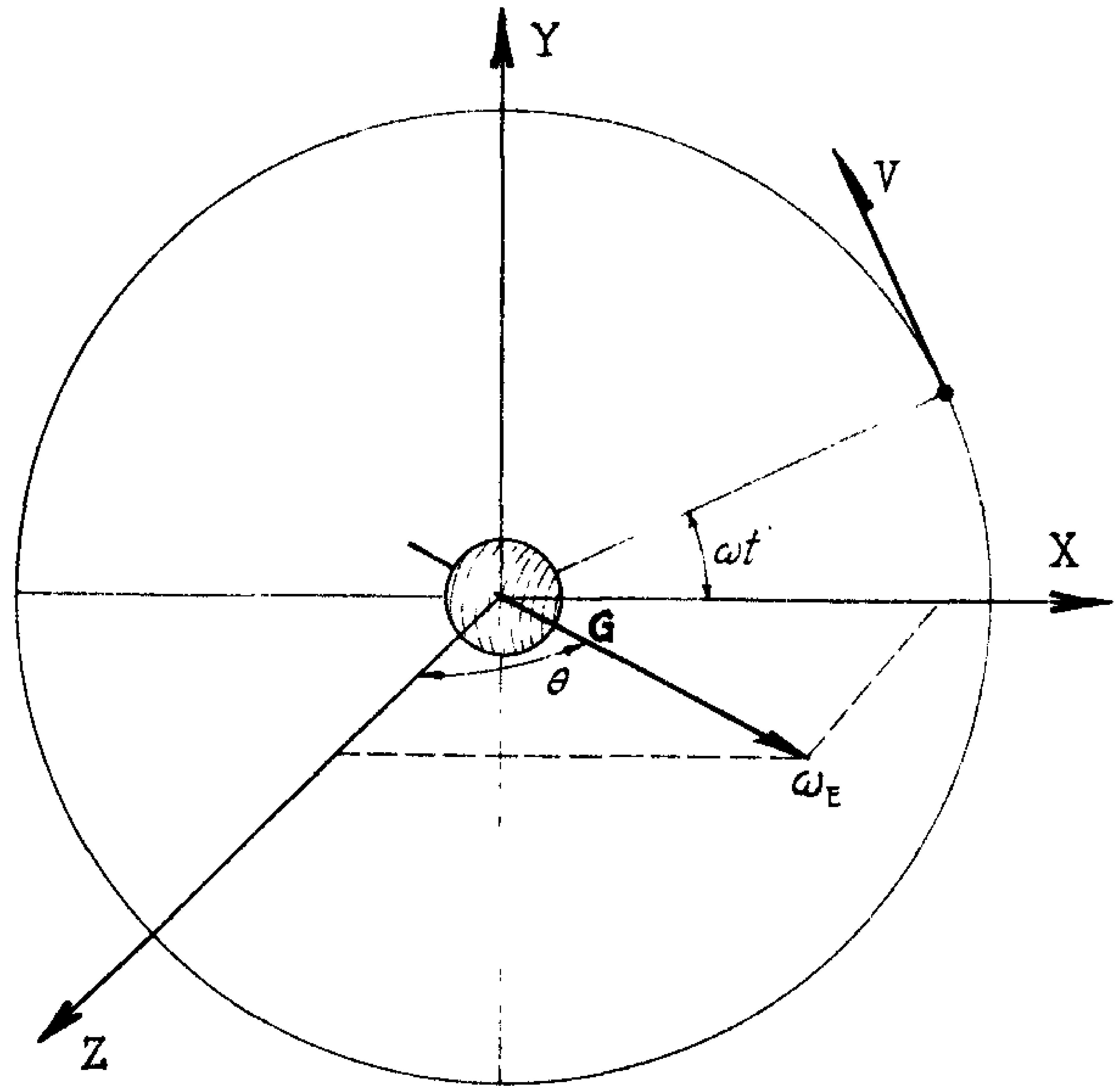

Fig. 1

($a_z \sim 3 \times 10^{-13}$ cm/s^2 para el sistema tierra-sol), podemos utilizar en esta ecuación, la solución Newtoniana del problema.

En el caso de tener una órbita circular en el plano (X,Y), la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\omega_o^2 Z + \frac{\beta}{V} V_Y \qquad (11)$$

en donde

$$\omega_o^2 = \frac{MG}{R^3}, \qquad \beta = \frac{3\, I\, G\, \omega\, \operatorname{sen}\theta\, V}{c^2\, R^3} \qquad (12)$$

Si tomamos como condiciones iniciales del problema, para $t=0$ $Z=0$, $X=R$, $Y=0$, $\dot{Z}=0$, obtendremos

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \omega_o^2 Z = \beta \cos \omega_0 t \qquad (13)$$

La solución de esta ecuación es

$$Z = \frac{\beta}{2\omega_0} t \text{ sen } \omega_0 t \qquad (14)$$

Inmediatamente se encuentra que la órbita gira alrededor del eje "X", que está a lo largo de la proyección de $\vec{\omega}$ sobre el plano de la órbita.

El incremento de "Z" en cada revolución, es

$$\Delta Z = \frac{\beta T}{2\omega_0} = \frac{3 \pi I \omega \text{ sen}\theta}{c^2} \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{R}} \qquad (15)$$

Para el sistema Tierra-Sol $\Delta Z \sim 22$ cm.

Lo que gira la órbita en cada revolución es

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta Z}{R} = \frac{3 \pi I \omega \sqrt{G} \text{ sen}\theta}{c^2 \sqrt{M}} \frac{1}{R^{3/2}} \qquad (16)$$

CONCLUSION.

El efecto es muy pequeño para ser observado, pero es de interes desde el punto de vista cosmológico por ser acumulativo.

De acuerdo con la ecuación (14), la órbita tiende a alejarse del plano ecuatorial de la esfera en rotación, y una órbita en el plano meridiano giraría con una velocidad angular dada por la ecuación (16), en el mismo sentido de "ω ".

Deseo expresar mi agradecimiento a los doctores Carlos Graef Fernández y Marcos Moshinsky, por sus valiosas sugestiones.

El autor disfrutó de una beca del Instituto Nacional de la Investigación Científica durante el tiempo en que desarrollo este trabajo.

REFERENCIAS

1. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat.Mexicana.1 (No. 4,5) p.1, 1944.
2. C.Graef Fernández. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1 (No. 4,5) p.25, 1944.
3. M.Moshinsky. Phys.Rev. 80, 514, 1950.