DISPERSION DE MESONES POR MESONES*

Juan de Oyarzabal

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Enero 15, 1952)

RESUMEN

Le formalisme covariante de Dyson a été appliqué à l'analyse de la diffusion méson-méson dans la theorie pseudoscalaire neutre, compte eû des corrections radiatives dues à l'interaction des dites particles et le vide et qui donnent lieu à l'emision et a l'absortion de nucléons virtuels.

Dans ces conditions on a calculé une forme explicite pour le terme de quatrieme ordre, dans la constante de couplage, de l'element de la matrice S qui décrit le dit procès.

Par voie d'example on a tout particulierement étudié le cas de diffusion mutuelle de mésons de base energie.

Los éxitos obtenidos recientemente por el desarrollo de las modernas técnicas de la Electrodinámica Cuántica[1] sugieren la posible

*Trabajo presentado en el Congreso Científico Mexicano. Septiembre, 1951.

aplicación de dichos métodos al tratamiento de problemas semejantes surgidos en el estudio de la Teoría de los Campos Mesónicos.

En particular, nos proponemos analizar en el presente trabajo mediante el formalismo covariante de Dyson[2] el proceso de dispersión de mesones por mesones tomando en cuenta las correcciones radiativas originadas por la interacción del campo mesónico con un campo de nucleones.

Como ejemplo representativo del problema que estudiamos, se ha elegido un campo mesónico pseudo-escalar neutro, dejándose, de considerar la interacción adicional de ambos campos con el electromagnético.

En tales condiciones, el hamiltoniano de interacción entre el campo mesónico y el de nucleones, es[3]:

$$H(x) = if\ \overline{\psi}(x)\ \gamma_5 \psi(x)\ \phi(x) - \hbar c\ \delta_{\kappa_0}\ \overline{\psi}(x)\ \psi(x) - \\ - \tfrac{1}{2}\ \delta_\kappa^2\ \phi^2(x) - \delta_\lambda\ \phi^4(x) \qquad (1)$$

donde el primer término representa el acoplamiento entre ambos campos, los dos siguientes las auto-energías respectivas del nucleón y del mesón, y el último una interacción directa entre los mesones, incluida en el hamiltoniano con el objeto de eliminar la divergencia logarítmica que aparece en el cálculo del elemento de matriz del proceso considerado.

Si prescindimos por ahora de este último término del acoplamiento, los procesos mas sencillos de dispersión de un mesón por otro no ocurren sino hasta el cuarto orden del desarrollo de la matriz S en la constante de acoplamiento f de los campos.

Dichos procesos están representados por la gráfica de Feynman de la figura 1, juntamente con otras dos semejantes, obtenidas de ella por las permutaciones de x_3 por x_4 y x_2 por x_3 respectivamente y repetidas todas ellas dos veces por la posibilidad de recorrer las líneas de nucleones en sentido inverso según lo estable

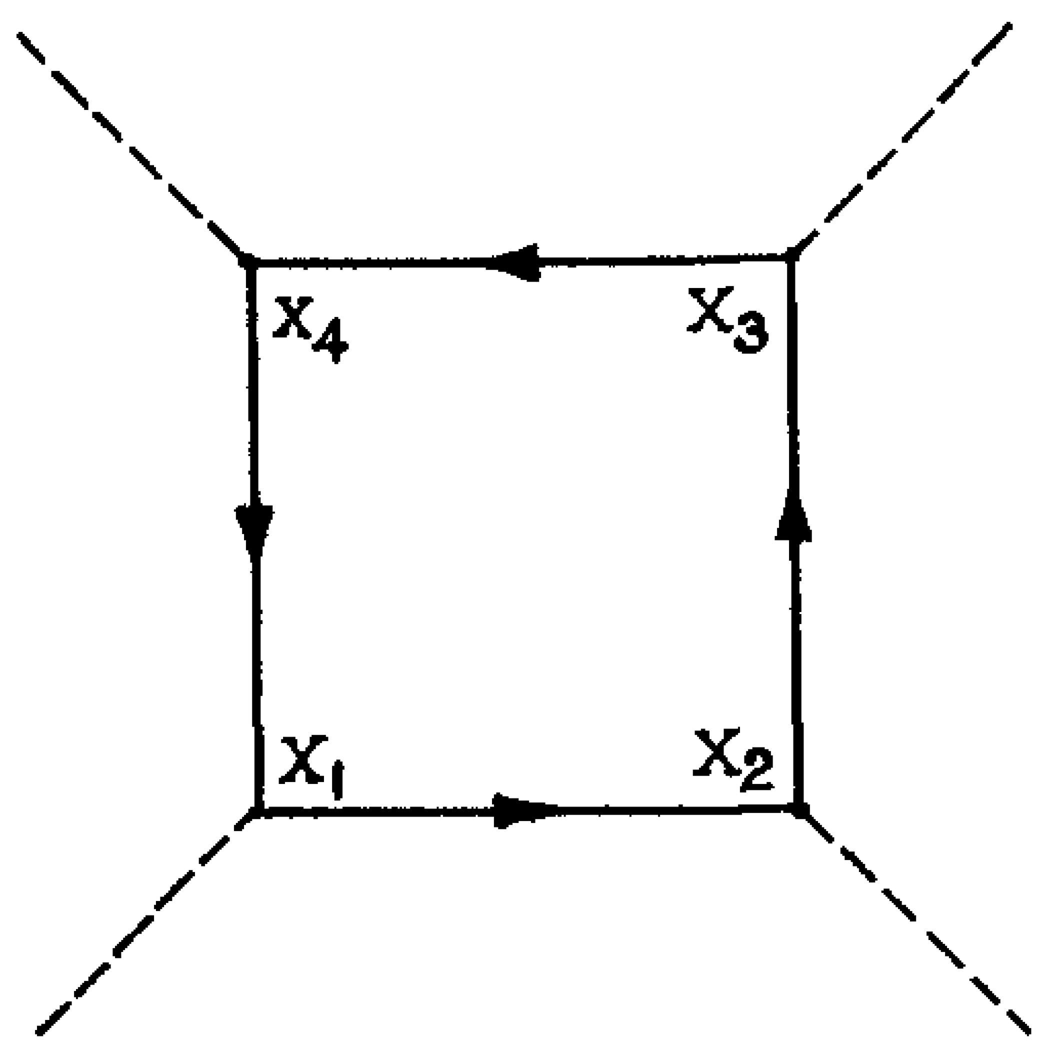

Fig. 1

cido en el teorema de Furry.

La contribución de dicha gráfica al término de cuarto orden del elemento de la matriz S es:

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{f}{c\hbar}\right)^4 \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \; \phi(x_1) \; \phi(x_2) \; \phi(x_3) \; \phi(x_4) \; \times$$

$$\times \; \mathrm{Tr} \; \{\gamma_5 S_F(x_2-x_1)\gamma_5 S_F(x_3-x_2)\gamma_5 S_F(x_4-x_3)\gamma_5 S_F(x_1-x_4) \; \} \qquad (2)$$

y si pasamos a la representación momental con los desarrollos de Fourier:

$$\phi(x) = \phi(k) \; e^{ikx}$$

$$S\;(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \; e^{-ipx} \; \frac{i\gamma p - \varkappa}{p^2+\varkappa^2} \qquad (3)$$

donde representamos por $k^{[1]}, k^{[2]}, k^{[3]}$ y $k^{[4]}$ los cuadrimomentos iniciales y finales de los dos mesones que se dispersan, sujetos naturalmente a la condición de conservación:

$$k^{[1]} + k^{[2]} + k^{[3]} + k^{[4]} = 0 \qquad (4)$$

cada una de las tres gráficas anteriores dará origen a las tres nuevas gráficas de la figura 2, repetidas ocho veces cada una de ellas,

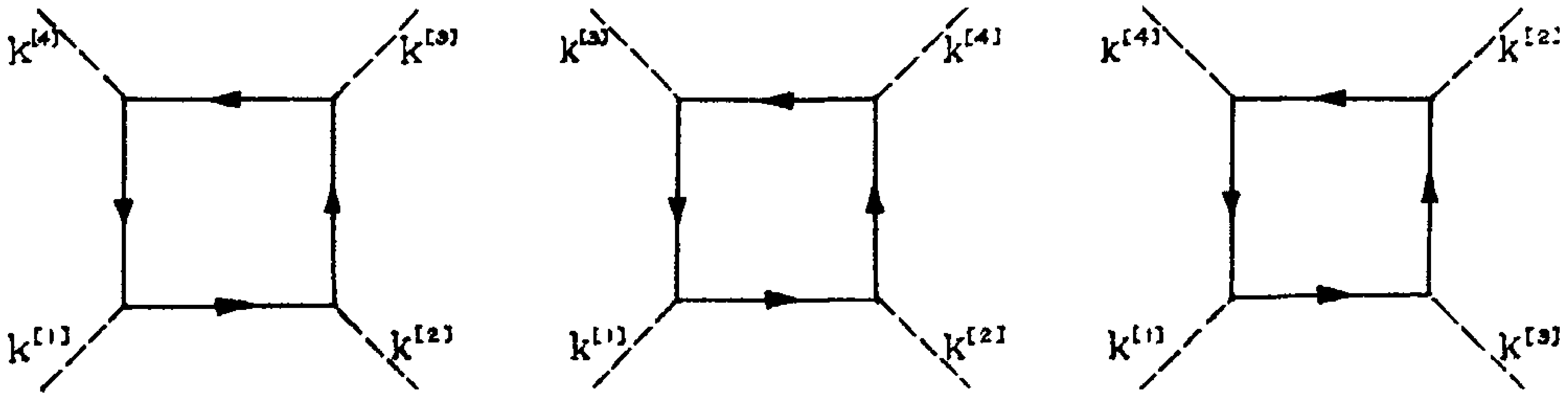

Fig.2

de manera que, dada la simetría presentada, podemos escribir la contribución total al elemento de matriz, en la forma:

$$S^{[4]} = -2\,\frac{f}{c\hbar}^{4}\;\phi(k^{[1]})\phi(k^{[2]})\phi(k^{[3]})\phi(k^{[4]})G(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) \qquad (5)$$

donde la función simetrizadora $G(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]})$ tiene por valor:

$$G(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) +$$

$$+T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[4]},k^{[3]}) + T(k^{[1]},k^{[3]},k^{[2]},k^{[4]}) \qquad (6)$$

y el problema queda reducido a la computación de $T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]})$, la cual, definiendo los cuadrimomentos auxiliares:

$$p^{[1]} = p \quad p^{[2]} = p-k^{[2]} \quad p^{[3]} = p-k^{[2]}-k^{[3]} \quad p^{[4]} = p-k^{[2]}-k^{[3]}-k^{[4]} \qquad (7)$$

tiene por valor:

$$T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) =$$

$$= \int d^4p\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\,\frac{i\gamma p^{[1]}-\varkappa}{(p^{[1]})^2+\varkappa^2}\,\gamma_5\,\frac{i\gamma p^{[2]}-\varkappa}{(p^{[2]})^2+\varkappa^2}\,\gamma_5\,\frac{i\gamma p^{[3]}-\varkappa}{(p^{[3]})^2+\varkappa^2}\,\gamma_5\,\frac{i\gamma p^{[4]}-\varkappa}{(p^{[4]})^2+\varkappa^2}\right\} \qquad (8)$$

que implícitamente contiene una sola integración sobre el cuadrimomento virtual p.

Para efectuar dicha integración, calcularemos primeramente la traza del numerador de (8):

$$Tr[\ ] = Tr\ [\gamma_5(i\gamma p^{[1]}-\varkappa)\gamma_5(i\gamma p^{[2]}-\varkappa)\gamma_5(i\gamma p^{[3]}-\varkappa)\gamma_5(i\gamma p^{[4]}-\varkappa)] =$$

$$= Tr\ [(i\gamma p^{[1]}+\varkappa)(i\gamma p^{[2]}-\varkappa)(i\gamma p^{[3]}+\varkappa)(i\gamma p^{[4]}-\varkappa)] =$$

$$= Tr\ [\gamma p^{[1]}\gamma p^{[2]}\gamma p^{[3]}\gamma p^{[4]}+(\gamma p^{[1]}\gamma p^{[2]}-\gamma p^{[1]}\gamma p^{[3]}+$$

$$+\gamma p^{[1]}\gamma p^{[4]}+\gamma p^{[2]}\gamma p^{[3]}-\gamma p^{[2]}\gamma p^{[4]}+\gamma p^{[3]}\gamma p^{[4]})\varkappa^2+\varkappa^4]$$

y teniendo en cuenta las siguientes propiedades de las matrices de Dirac:

$$Tr.\ \underline{I} = 4$$

$$Tr.\ (\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}$$

$$Tr.\ (\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = 4\ (\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})$$

resulta finalmente para el valor de la traza:

$$\begin{aligned} Tr[\ ] = 4[&(p^{[1]}p^{[2]})(p^{[3]}p^{[4]})-(p^{[1]}p^{[3]})(p^{[2]}p^{[4]}) + \\ &+(p^{[1]}p^{[4]})(p^{[2]}p^{[3]})+(p^{[1]}p^{[2]}-p^{[1]}p^{[3]}+ \\ &+p^{[1]}p^{[4]}+p^{[2]}p^{[3]}-p^{[2]}p^{[4]}+p^{[3]}p^{[4]})\varkappa^2+\varkappa^4] \end{aligned} \qquad (9)$$

Respecto al factor restante de (8) observaremos que:

$$\frac{1}{abcd} = 6\int\frac{d\tau}{[ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4]^4} \qquad (10)$$

donde $d\tau = dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4$ y la integración se efectua sobre los valores positivos de estas variables auxiliares sujetos a la condición de ser:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \tag{11}$$

Aplicando esta propiedad a nuestro caso, podremos escribir el factor de la traza en la expresión (8), como :

$$6 \int \frac{d\tau}{[(p-\lambda)^2 + \gamma]^4} \tag{12}$$

donde hemos definido:

$$\lambda = -x_4 k^{[1]} + (x_2 + x_3)\ k^{[2]} + x_3 k^{[3]} \tag{13}$$

y:

$$\gamma = \kappa^2 + x_4 x_1 (k^{[1]})^2 + x_1 x_2 (k^{[2]})^2 + x_2 x_3 (k^{[3]})^2 + x_3 x_4 (k^{[4]})^2 -$$

$$- x_2 x_4 (k^{[1]} + k^{[2]}) (k^{[3]} + k^{[4]}) - x_1 x_3 (k^{[1]} + k^{[4]}) (k^{[2]} + k^{[3]}) \tag{14}$$

Si ahora efectuamos la transformación

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + \lambda_\mu$$

que conduce evidentemente a:

$$p_\mu^{[i]} \rightarrow p_\mu + \lambda_\mu^{[i]} \qquad (i = 1, .. 4) \tag{15}$$

donde, en forma explicita:

$$\begin{aligned} \lambda^{[1]} &= \lambda &&= -x_4 k^{[1]} + (x_2 + x_3) k^{[2]} + x_3 k^{[3]} \\ \lambda^{[2]} &= \lambda^{[1]} - k^{[2]} &&= -x_1 k^{[2]} + (x_3 + x_4) k^{[3]} + x_4 k^{[4]} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\lambda^{[3]} = \lambda^{[2]} - k^{[3]} = -x_2 k^{[3]} + (x_4 + x_1) k^{[4]} + x_1 k^{[1]}$$
$$\lambda^{[4]} = \lambda^{[3]} - k^{[4]} = -x_3 k^{[4]} + (x_1 + x_2) k^{[1]} + x_2 k^{[2]} \tag{16}$$

la expresión (12) se transformará como:

$$6 \int \frac{d\tau}{(p^2+\gamma)^4} \tag{17}$$

Teniendo ahora en cuenta la simetría total de esta expresión con respecto al cuadrimomento p, resulta que al efectuar la integración final sobre p indicada en (8) se producen las transformaciones: $(i,j,k,l = 1 \ldots 4)$

$$p^{[i]} p^{[j]} \rightarrow p^2 + \lambda^{[i]} \lambda^{[j]}$$

$$(p^{[i]} p^{[j]})(p^{[k]} p^{[l]}) \rightarrow p^4 + [4\lambda^{[i]}\lambda^{[j]} + \lambda^{[i]}\lambda^{[k]} + \lambda^{[i]}\lambda^{[l]} +$$
$$+ \lambda^{[i]}\lambda^{[k]} + \lambda^{[j]}\lambda^{[l]} + 4\lambda^{[k]}\lambda^{[l]}] \frac{p^2}{4} + (\lambda^{[i]}\lambda^{[j]})(\lambda^{[k]}\lambda^{[l]})$$

de modo que la traza dada por (9) se transformará en la expresión:

$$\mathrm{Tr}\ [\ ] \rightarrow 4\ (p^4 + \alpha\ p^2 + \beta) \tag{18}$$

donde α y β están definidas por las expresiones:

$$\alpha = 4\varkappa^2 + \lambda^{[1]}\lambda^{[2]} - \tfrac{1}{2}\lambda^{[1]}\lambda^{[3]} + \lambda^{[1]}\lambda^{[4]} + \lambda^{[2]}\lambda^{[3]} - \tfrac{1}{2}\lambda^{[2]}\lambda^{[4]} + \lambda^{[3]}\lambda^{[4]}$$

$$\beta = \varkappa^4 + (\lambda^{[1]}\lambda^{[2]} - \lambda^{[1]}\lambda^{[3]} + \lambda^{[1]}\lambda^{[4]} + \lambda^{[2]}\lambda^{[3]} - \lambda^{[2]}\lambda^{[4]} + \lambda^{[3]}\lambda^{[4]})\varkappa^2 +$$
$$+ (\lambda^{[1]}\lambda^{[2]})(\lambda^{[3]}\lambda^{[4]}) - (\lambda^{[1]}\lambda^{[3]})(\lambda^{[2]}\lambda^{[4]}) + (\lambda^{[1]}\lambda^{[4]})(\lambda^{[2]}\lambda^{[3]})$$

Combinando entonces las expresiones (8), (17) y (18) se tendrá:

$$T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = 24 \int d\tau \int d^4p \, \frac{p^4+\alpha p^2+\beta}{(p^2+\gamma)^4} \qquad (20)$$

con los valores de α, β y γ dados por (13) y (19).

El resultado (20) presenta ya el valor de $T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]})$ en forma apropiada para calcular fácilmente la integración sobre el cuadrimomento virtual p, lo cual se consigue descomponiendo la integral de (20) en:

$$T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) =$$

$$= 24 \int d\tau \left[\int \frac{d^4p}{(p^2+\gamma)^2} + (\alpha-2\gamma) \int \frac{d^4p}{(p^2+\gamma)^3} + (\beta+\gamma^2-\alpha\gamma) \int \frac{d^4p}{(p^2+\gamma)^4} \right]$$

y efectuando las dos últimas integraciones:

$$T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = 4i\pi^2 \int d\tau \left(\frac{\beta}{\gamma^2} + \frac{2\alpha}{\gamma} - 5 \right) +$$

$$+ 24 \int d\tau \int \frac{d^4p}{(p^2+\gamma)^2} \qquad (21)$$

La segunda integral de (21) presenta aparentemente una divergencia logarítmica, toda vez que:

$$\int \frac{d^4p}{(p^2+\gamma)^2} = 2i\pi^2 F(\gamma) = 2i\pi^2 \lim_{P\to\infty} \left[\log \frac{P + \sqrt{P^2+\gamma}}{\sqrt{\gamma}} - 1 \right] \qquad (22)$$

pero de ella se puede extraer aún una parte convergente mediante sucesivas integraciones por partes sobre las variables auxiliares.

Para ello, conviene efectuar el cambio de variables:

$$x_1 = xz \qquad x_2 = (1-x)z \qquad x_3 = y(1-z) \qquad x_4 = (1-y)(1-z) \qquad (23)$$

y entonces resulta:

$$\int F(xyz)\,d\tau = \int_0^1 z(1-z)\,dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx\; F(x,y,z) =$$

$$= \tfrac{1}{6} F(1,1,1) + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) dz \frac{\partial}{\partial z}(\log \gamma(1,1,z)) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^1 z(1-z)\,dz \int_0^1 y\,dy\,\frac{\partial}{\partial y}(\log \gamma(1,y,z)) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^1 z(1-z)\,dz \int_0^1 dy \int_0^1 x\,dx\,\frac{\partial}{\partial x}(\log \gamma(x,y,z))$$

y substituyendo en (21):

$$T(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = 4i\pi^2 \int \left[\frac{\beta}{\gamma^2} + \frac{2\alpha}{\gamma} - 5\right] d\tau +$$

$$+ 24i\pi^2 \int_0^1 dz \left\{ \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) \frac{\partial}{\partial z} \log \gamma(1,1,z) + \right.$$

$$\left. + [z(1-z) \int_0^1 dy\; (y \frac{\partial}{\partial y} \log \gamma(1,y,z) + \int_0^1 x\,dx \frac{\partial}{\partial x} \log \gamma(x,y,z))] \right\} +$$

$$+ 8i\pi^2 F(1,1,1) \qquad (24)$$

De esta expresión podemos retener su parte convergente que será:

$$Tc(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = 4i\pi^2 \left\{ \int \left(\frac{\beta}{\gamma^2} + \frac{2\alpha}{\gamma} - 5\right) d\tau + \right.$$

$$+ 6 \int_0^1 dz \left\{ \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) \frac{\partial}{\partial z} \log \gamma(1,1,z) + \right.$$

$$\left.\left. + [z(1-z) \int_0^1 dy\; (y \frac{\partial}{\partial y} \log \gamma(1,y,z) + \int_0^1 x\,dx \frac{\partial}{\partial x} \log \gamma(x,y,z))] \right\}\right\} \qquad (25)$$

quedando tan solo un término logarítmicamente divergente:

$$8i\pi^2\, F(1,1,1) = 8i\pi^2 \left[\log \frac{P + P_0}{\varkappa} - 1\right] \qquad (26)$$

donde $P_0 = \sqrt{P^2+\varkappa^2}$, debiéndose entender que se toma el límite de (26) cuando $P \to \infty$.

La contribución de este término al elemento de matriz será según (5 y (26):

$$-48i\pi^2 \left(\frac{f}{c\hbar}\right)^4 [\log\frac{P + P_0}{\varkappa} - 1] \; \phi(k^{[1]})\phi(k^{[2]})\phi(k^{[3]})\phi(k^{[4]}) \qquad (27)$$

y para eliminar dicha divergencia, se introduce el último término $-\delta_\lambda \; \phi^{[4]}(x)$ en el hamiltoniano de interacción (1), representado por la gráfica de la figura 3:

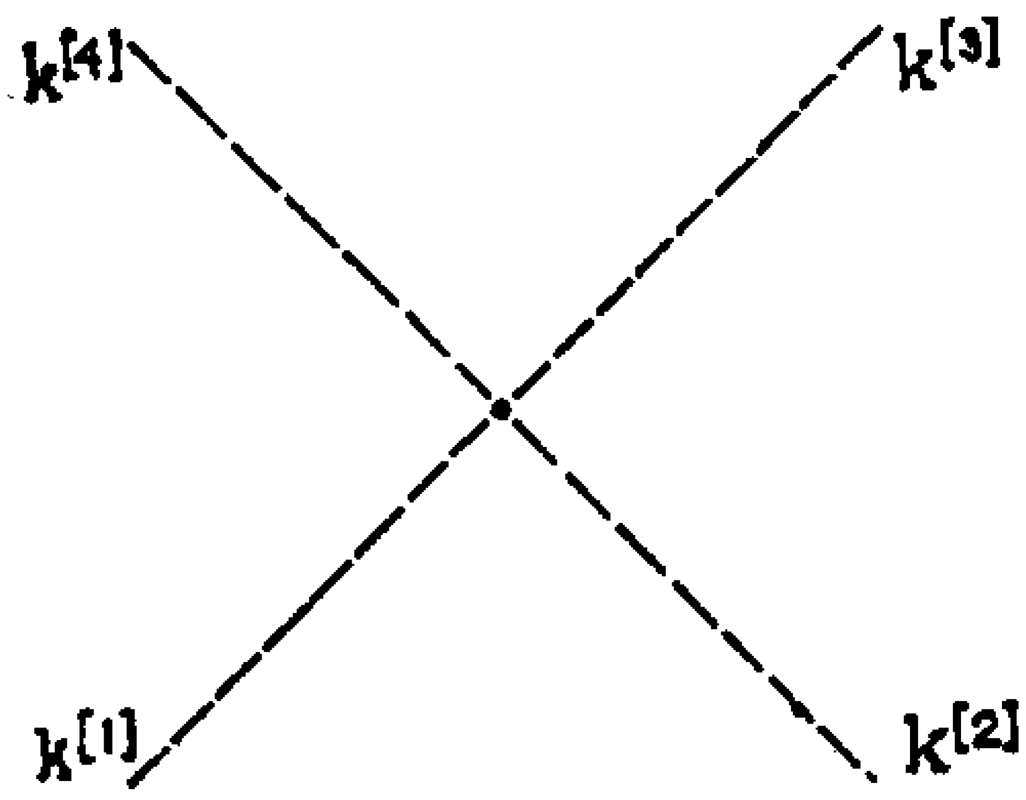

Fig.3

que produce una contribución al elemento de matriz dada por:

$$\frac{-24i}{c\hbar} \delta_\lambda \; \phi(k^{[1]})\phi(k^{[2]})\phi(k^{[3]})\phi(k^{[4]}) \qquad (28)$$

de modo que de (27) y (28) se obtiene el valor de la constante δ_λ:

$$\delta_\lambda = -\frac{2\pi^2}{(c\hbar)^3} f^4 \; [\log\frac{P + P_0}{\varkappa} - 1] \qquad (29)$$

al cuarto orden de aproximación en la constante de acoplamiento.

Como aplicación de estos resultados podemos considerar el caso particular en que:

$$(k^{[1]})^2,\ (k^{[2]})^2,\ (k^{[3]})^2,\ (k^{[4]})^2 << \varkappa^2 \qquad (30)$$

lo que corresponde a una dispersión de mesones con energías considerablemente menor que un Bev.

En estas condiciones es posible desarrollar en series de potencias de $k^{[i]}k^{[j]}/\varkappa^2$ los denominadores que aparecen en la expresión (25) resultando hasta el segundo orden de aproximación:

$$\frac{\beta}{\gamma^2}+\frac{2\alpha}{\gamma}-5 = 4+\frac{1}{\varkappa^2}[3(\lambda^{[1]}+\lambda^{[3]})(\lambda^{[2]}+\lambda^{[4]})-2(\lambda^{[1]}\lambda^{[3]}+$$

$$+\lambda^{[2]}\lambda^{[4]})-10(x_4x_1(k^{[1]})^2+x_1x_2(k^{[2]})^2+x_2x_3(k^{[3]})^2+$$

$$+x_3x_4(k^{[4]})^2-x_2x_4(k^{[1]}+k^{[2]})(k^{[3]}+k^{[4]})-$$

$$-x_1x_3(k^{[1]}+k^{[2]})(k^{[3]}+k^{[4]}))]$$

y mediante una integración inmediata sobre las variables auxiliares se llega a:

$$\int(\frac{\beta}{\gamma^2}+\frac{2\alpha}{\gamma}-5)d\tau=\frac{2}{3}+\frac{1}{120\varkappa^2}[-5((k^{[1]})^2+(k^{[2]})^2+(k^{[3]})^2+(k^{[4]})^2)+$$

$$+24(k^{[1]}+k^{[3]})(k^{[2]}+k^{[4]})+2(k^{[1]}k^{[3]}+k^{[2]}k^{[4]})] \qquad (31)$$

mientras que la segunda integral de (25) resulta ser:

$$-\frac{1}{20\varkappa^2}[(k^{[1]})^2+(k^{[2]})^2+(k^{[3]})^2+(k^{[4]})^2+(k^{[1]}+k^{[2]})(k^{[3]}+k^{[4]})-$$

$$-(k^{[1]}+k^{[4]})(k^{[2]}+k^{[3]})] \qquad (32)$$

así es que combinando (25) con (31) y (32) resulta:

$$Tc(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = i\pi^2 \left\{ \frac{8}{3} + \frac{1}{30x^2} [-11((k^{[1]})^2+ \right.$$

$$+(k^{[2]})^2+(k^{[3]})^2+(k^{[4]})^2) - 6\ (k^{[1]}+k^{[2]})(k^{[3]}+k^{[4]}) +$$

$$\left. +6\ (k^{[1]}+k^{[4]})(k^{[2]}+k^{[3]}) + 2\ (k^{[1]}k^{[3]}+k^{[2]}k^{[4]})] \right\} \qquad (33)$$

de modo que al simetrizar se obtiene, de acuerdo con (6) y (4):

$$G(k^{[1]},k^{[2]},k^{[3]},k^{[4]}) = i\pi^2\ \{8 - \frac{1}{15x^2}\ [29\ ((k^{[1]})^2+(k^{[2]})^2+$$

$$+(k^{[3]})^2+(k^{[4]})^2) - 6\ (k^{[1]}-k^{[3]})(k^{[2]}-k^{[4]})]\} \qquad (34)$$

expresión que, substituida en (5) dá el elemento de matriz correspondiente al proceso que hemos considerado.

Queremos finalmente expresar aquí nuestra gratitud al profesor Alejandro Medina por habernos sugerido el presente tema de investigación.

REFERENCIAS

1. R.Karplus y N.M.Kroll. Phys.Rev. 77, 536, (1949)
   R.Karplus y M.Neuman. Phys.Rev. 80, 380, (1950)
2. F.J.Dyson. Phys.Rev. 75, 486 y 1736 (1949)
3. Abdus Salam. Phys.Rev. 82, 217, (1951)