MATRIZ DE DISPERSION Y MATRIZ DERIVADA*

Eugene P. Wigner

Palmer Physical Laboratories, Princeton, N.J.

(Recibido: Abril 29, 1952)

I.- INTRODUCCION

R. Kronig[1] fué el primero que hizo notar que sobre la base de su trabajo con Kramers[2], el principio de causalidad debía llevar a restricciones sobre la matriz de dispersión (matriz S) del proceso. Partiendo de la idea de Kronig, Schützer y Tiomno[3] han dado, para partículas no relativistas una demostración del bien conocido teorema[4] de que los polos de la función de dispersión $S(k)$ están en la parte inferior o sobre el eje imaginario del plano k. El trabajo de Schützer y Tiomno ha sido generalizado por Toll y Van Kampen[5] al caso de partículas relativistas de masa cero, que fué también el objetivo de la discusión inicial de Kronig y Kramers[2]. Resultados similares a los anteriores fueron también obtenidos

* Véase la sección de Notas Varias de este número.

recientemente en la teoría de comunicaciones eléctricas (siguiendo los trabajos iniciales de Campbell, Zobel, Foster[6] y Cauer[7]) por Brüne[8], Fränz[9] y particularmente por Richards[10]. Fué posible derivar también del principio de causalidad que S(k) satisface las bien conocidas relaciones:

$$S(k)S(-k) = 1 , \qquad S(k)\ (S(k^*))^* = 1 , \qquad (1)$$

así como el hecho de que para ρ mayor que el alcance a_{min} de las fuerzas dispersoras, se tiene:

$$S(k)\ e^{2ik\rho} < \infty , \qquad (\text{para } \rho > a_{min}, \ \text{Im}k > 0) , \qquad (2)$$

es decir, que está uniformemente acotada en la parte de arriba del plano k.

Las propiedades anteriores de S(k) han sido derivadas también por Schützer y Tiomno de las propiedades de la función R(E). En el caso de dispersión simple con momento angular definido, que es el único caso que discutieron Schützer y Tiomno, R(E) es la razón de la función de onda a su derivada radial en el punto $r=a>a_{min}$, fuera del alcance de las fuerzas dispersoras. Por lo tanto, R(E) depende no solo de E sino también de a. Sin embargo, ésta última magnitud será considerada como constante en lo que sigue. Si la función de onda fuera de a tiene la forma A sen kr + B cos kr, la relación entre R y la función de dispersión S es:

$$S = e^{-2ika}\ \frac{1 + ikR\ (k^2)}{1 - ikR\ (k^2)} \quad . \qquad (3)$$

La R(E) como función de $E = k^2$ es una función[11] real uniforme de E, esto es:

$$R\ (E^*) = (R\ (E))^* \quad . \qquad (4)$$

Además, para E finita, R(E) no tiene mas singularidades que polos[12] y su parte imaginaria es positiva en la parte superior, y negativa en la parte inferior del plano E. Se concluye de esta propiedad que los polos de R están solo sobre el eje real de E y tiene resíduos negativos. Una función R(E) con estas propiedades se designará como función R permitida. Los resultados de Schützer y Tiomno pueden reformularse diciendo que toda S(k) definida por (3), donde P(E) es una R permitida, cumple con las propiedades del primer párrafo.

En el presente trabajo nos preguntaremos si inversamente las propiedades de la S(k) discutidas con anterioridad, son suficientes para establecer las propiedades de R. De (3) y (1) es fácil ver que R(E) es una función real uniforme, pero como veremos abajo, las propiedades concernientes a polos y residuos de R(E), no son consecuencia de las propiedades de S. Nos preguntaremos entonces sobre las condiciones necesarias que debe cumplir S(k) para que sea posible obtenerla a través de (3), de una R(E) permitida. Esto nos llevará al teorema de la alternación de los polos de S(k) que están sobre el eje imaginario.

II.- FUNCIONES S(k) QUE NO LLEVAN A R(E) PERMITIDA

Una expresión general sencilla que siempre cumple con las condiciones de (1) y(2) para la función de dispersión es:

$$S(k) = \frac{f(ik)}{f(-ik)}\, e^{-2ibk} \quad , \qquad (5)$$

donde

$$f(x^*) = [f(x)]^* \qquad (5a)$$

es una función real, $b < a_{min}$ y

$$\frac{f(-k_1 + ik_2)}{f(k_1 - ik_2)} < \infty \qquad \text{para } k_1 > 0 , \qquad (5b)$$

es acotada si $k_1 + ik_2$ está en la parte derecha del plano k. Todas estas condiciones se satisfacen si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de x, esto es, que $f(ik)$ es un polinomio real de ik. Además, los polos de S estarán apropiadamente localizados si las raices de $f(x)$ son todas reales o bien, están en la parte izquierda del plano x. Funciones de dispersión de este tipo tienen un importante papel en las comunicaciones eléctricas[6,7]. De la inversión de (3) tenemos que:

$$R = \frac{i}{k} \; \frac{1 - S\, e^{2ika}}{1 + S\, e^{2ika}} \; ; (a > a_{min}) \quad . \qquad (6)$$

Usando la forma (5) de $S(k)$ obtenemos:

$$R = \frac{k^{-1}\, \mathrm{tg}\, \alpha k + F(k)}{1 - F(k) k\, \mathrm{tg}\, \alpha k} \quad ; \qquad (7)$$

donde

$$\alpha = a - b > 0 \quad , \qquad (7a)$$

$$F(k) = \frac{f(ik) - f(-ik)}{ik\, [f(ik) + f(-ik)]} \quad . \qquad (7b)$$

Trataremos de ver ahora si la R dada por (7) es en todos los casos una R permitida, en el sentido del segundo párrafo de la introducción.

Es claro que $k^{-1}\, \mathrm{tg}\, \alpha k$, $k\, \mathrm{tg}\, \alpha k$ y $F(k)$ son funciones reales pares de k. Por lo tanto, la R de (7) es una función uniforme de $k^2 = E$ que además, no puede tener singularidades esenciales para E finita. Este punto ya fué discutido por Schützer y Tiomno. Las únicas condiciones cuya validez debemos verificar, conciernen a la posición de los polos de R y a los residuos en dichos polos. Se sigue fácilmente de los teoremas generales[11] sobre las funciones R, que estas condiciones se satisfacen si F y EF son a su vez, funciones R permitidas. Sin embargo, en lo general, tal no es el caso.

Para encontrar un caso simple en que (7) no da una $R(E)$ permitida, hacemos notar primero que R es una función continua de α en la vecindad $\alpha = 0$ para cualquier región finita de k, exceptuando posiblemente, los valores de k para los que $F(k)$ es singular. Si $F(k)$ tuviera una parte imaginaria negativa para una k para la cual k^2 tuviera una parte imaginaria positiva, esto sería también cierto para una R definida por (7), si la α es suficientemente pequeña, y se tendría una R del tipo no permitido. Por lo tanto, (7) representa una R permitida para toda S permitida si tal es el caso que uno obtiene al poner $\alpha = 0$ en (7), esto es, si $F(k)$ es una función R permitida. Se ve entonces que el hecho de ser $F(k)$ una función R permitida, es una condición necesaria para que R tenga las propiedades requeridas para todo valor de a y b, mientras que el hecho de que F y EF sean funciones permitidas sería una condición suficiente.

Dos de las f más sencillas que dan una $S(k)$ permitida pero no una F permitida, y por lo tanto una R no permitida, son las siguientes:

$$f(-ik) = -k^2 - 2ibk + c \quad , \qquad (8a)$$

con $b > 0$ o bien $b^2 > c$, y

$$f(-ik) = (-k^2-2ib_1k+c_1)\ (-k^2-2ib_2k+c_2) \quad , \qquad (8b)$$

donde $b_1 > 0$ o bien $b_1^2 > c_1$, y también $b_2 > 0$ o bien $b_2^2 > c_2$. Para (8a) si $b > 0$, la suma de las raices de $f(x) = x^2+2bx+c$ es negativa y deben de estar en la parte izquierda del plano si son complejas. Si $b^2 > c$, ambas raices son reales. Las mismas consideraciones se aplican a (8b). Se tiene entonces, que $S(k)$ obtenida de (8a,b) por la definición (5) satisface todas las condiciones del primer párrafo de la introducción. Sin embargo:

$$F(k) = \frac{2b}{c-k^2} = \frac{2b}{c-E} \quad , \qquad (9a)$$

tendrá un residuo negativo en el polo $E = c$, solo si b es positivo. En el otro caso, F es, de hecho, "anti-permitida" es decir, su parte imaginaria es negativa en la parte superior, positiva en la inferior del plano E. En forma similar, la F obtenida de (8b) con ayuda de (7b) es:

$$F = \frac{-2\ (b_1+b_2)\ E + 2b_1c_2 + 2b_2c_1}{E^2 - (c_1+c_2+4b_1b_2)\ E + c_1c_2} \quad . \qquad (9b)$$

De (9b) vemos que F puede tener polos complejos en el plano E si $4c_1c_2 > (c_1+c_2+4b_1b_2)^2$, cosa que no es incompatible con las condiciones indicadas arriba. Se puede poner por ejemplo $c_1 = c_2 = -2$, $b_1 = b_2 = 1$. En este caso la parte imaginaria de F puede tomar valores positivos tan grandes como se quiera en algunos puntos de la parte inferior del plano, y los correspondientes valores negativos en los puntos opuestos de la parte superior del plano E. Podemos concluir entonces que (1) y (2), combinados con la localización apropiada de los polos de $S(k)$, no son suficientes para garantizar que la R obtenida de S es una R permitida.

III.- TEOREMA DE ALTERNACION DE POLOS.

Como las propiedades de la S enumeradas en el primer párrafo no llevan necesariamente a una R permitida, se ocurre preguntar si las restricciones necesarias para obtener una R permitida llevarán a propiedades adicionales sencillas de la S.

Todos los polos Z_ν de R son reales y los ceros x_ν también están sobre el eje real; hay un cero entre cada par de polos sucesivos.[13] Designemos con Z_0, Z_{-1}, $Z_{-2}, \ldots$ los polos negativos en orden decreciente, y con $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ los polos positivos en orden creciente. El cero entre Z_ν y $Z_{\nu+1}$ se designará por x_ν,

$$Z_\nu < x_\nu < Z_{\nu+1} \,, \qquad (10)$$

$$Z_0 \leqslant 0 < Z_1 \quad ; \qquad (10a)$$

x_0 puede ser positivo o negativo. Toda R permitida puede desarrollarse como un producto[14]:

$$R(E) = C \, \frac{E - x_0}{E - z_0} \; \Pi \; \frac{1 - E/x_\nu}{1 - E/Z_\nu} \, \Pi \, \frac{1-E/x_{-\nu}}{1-E/Z_{-\nu}} \,, \qquad (11)$$

siendo C real y positiva. Los dos productos Π pueden ser finitos o infinitos.

Se sigue de (3) que los polos de S satisfacen la ecuación:

$$1 - ikR(k^2) = 1 + \kappa R(-\kappa^2) = 0 \quad , \tag{12}$$

donde $\kappa = -ik$. De (11), (12) obtenemos:

$$(\kappa^2+Z_0)\ \Pi\ (1+\kappa^2/Z_\nu)\ \Pi\ (1+\kappa^2/Z_{-\nu}) =$$

$$= -C\kappa\ (\kappa^2+x_0)\ \Pi\ (1+\kappa^2/x_\nu)\ \Pi\ (1+\kappa^2/x_{-\nu}) \quad . \tag{13}$$

La parte izquierda de esta ecuación se muestra en forma esquemática, en la parte superior de la Fig. # 1; la parte derecha de (13), en los dos diagramas inferiores de la Fig.#1. El primer producto Π es positivo en ambos casos para toda κ real. Los ceros del lado izquierdo están en $\kappa = \pm\ (-Z_{-\nu})^{\frac{1}{2}} = \pm\ \zeta_\nu$ con $\nu = 0,1,2,\ldots$, y toda la parte izquierda cambia de signo en ζ_ν, $-\zeta_\nu$, y es negativa para $\kappa = 0$. Los ceros de la parte derecha están en $\kappa = 0$ y $\kappa = \pm\ (-x_{-\nu})^{\frac{1}{2}} = \pm\ \xi_\nu$ con $\nu = 0,1,2,\ldots$ si $x_0 < 0$ y $\nu = 1,2,3,\ldots$ si $x_0>0$. En el primer caso, el lado derecho es positivo entre 0 y ξ_0, en el segundo es negativo entre 0 y ξ_1.

Consideremos el segundo caso $(x_0 > 0)$ en primer lugar. Se sigue de (10) que:

$$0 < \zeta_0 < \xi_1 < \zeta_1 < \xi_2 < \zeta_2 \ \ldots \tag{14}$$

Por lo tanto, (13) tendrá una solución κ_0 entre 0 y ζ_0 , porque el lado izquierdo de (13) aumenta en este intervalo de un valor negativo a 0, y el lado derecho disminuye de cero a un valor negativo. En cambio, (13) no tiene ceros entre ζ_0 y ξ_1,porque ambos miembros de (13) tienen signos opuestos en ese intervalo. De nuevo habrá una raiz en $\xi_1 < \kappa_1 < \zeta_1$, y en general, en cualquier intervalo (ξ_ν,ζ_ν). Para κ negativa, la situación será opuesta: las raíces de $-\kappa'_\nu$ estarán situadas en tal forma que $\zeta_{\nu-1}<\kappa'_\nu<\zeta_\nu$. Resumiendo, podemos decir que los valores absolutos de los polos imaginarios positivos $k = i\kappa_0, i\kappa_1, i\kappa_2, \ldots$ alternan con los de los polos imaginarios negativos $k = -i\kappa'_1, -i\kappa'_2, -i\kappa'_3, \ldots$, esto es:

$$0 < \kappa_0 < \kappa'_1 < \kappa_1 < \kappa'_2 < \kappa_2 < \kappa'_3 < \ldots \qquad (15)$$

La situación es similar si x_0 es negativa, excepto que en este caso, (15) es válida, o bien, puede haber dos polos imaginarios negativos $k = -i\kappa'_0$ y $k = -i\kappa''_0$, cuyos valores absolutos son menores que el valor absoluto del menor de los polos imaginarios positivos κ_0.

La alternación de polos indicada arriba es la más natural y podemos esperar que sea la usual. Es concebible sin embargo, que en lugar de un polo entre 0 y ζ_0, se tenga por ejemplo tres, o en general, un número impar de polos. Esto puede suceder si las curvas de la Fig. # 1 no son tan lisas como se dibujan, sino que tienen una curvatura apreciable. En tal caso, todo intervalo subrayado en la Fig. # 1 contiene un número arbitrario impar de polos, mientras que el intervalo $(-\zeta_0, 0)$, el primer intervalo negativo, contiene un número par de polos. La regla final que se obtiene es la siguiente: Si uno ordena los polos puramente imaginarios de S de acuerdo con su valor absoluto, uno encuentra primero un número par (o cero) de polos imaginarios negativos, después un número impar de polos imaginarios positivos, en seguida un número impar de polos imaginarios negativos, y los números impares de polos imaginarios positivos y negativos continúan alternando.

La regla de alternación no es en ninguna forma, una condición suficiente para que S nos de, por (6), una R permitida; es solo una condición necesaria. Si las propiedades de S, enumeradas en el primer párrafo, son suficientes para asegurar el principio de causalidad, este principio no es suficiente para obtener las propiedades de R, indicadas en el segundo párrafo. Las propiedades de R provienen de la posibilidad de definir localmente la densidad y flujo de probabilidad; es por lo tanto de interés, ver si permanecen válidas para partículas tales como los fotones, para los cuales la densidad local no puede definirse.

Para la Fig. No. 1 y las referencias, véase el original en inglés de este artículo.