

Modos cuasi–normales de un agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet rodeado de quintaesencia: perturbaciones escalares y electromagnéticas

G. Barrientos^a, O. Pedraza^a, L. A. López^a, and R. Arceo^b

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, UAEH,

Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

e-mail: ba244001@uaeh.edu.mx; omarp@uaeh.edu.mx; lalopez@uaeh.edu.mx

^bFacultad de Ciencias en Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Chiapas,
29050, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

e-mail: roberto.arceo@unach.mx

Received 18 November 2021; accepted 17 February 2022

En este trabajo, se estudian los modos cuasi–normales para perturbaciones escalares y electromagnéticas en un agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet rodeado de quintaesencia empleando el método WKB a tercer orden y el límite Eikonal. Primeramente, se establecen los valores críticos de la constante de acoplamiento de Gauss–Bonnet y del factor de normalización relacionado con la quintaesencia, con el fin de describir los horizontes de eventos de la solución. El estudio de la condición de horizontes extremos y los modos cuasi–normales es realizado estableciendo el parámetro de estado de quintaesencia en el caso particular de $\omega_q = -2/3$.

Descriptor: Modos cuasi–normales; quintaesencia; aproximación WKB; exponente de Lyapunov.

In this work, we study the quasi-normal modes for scalar and electromagnetic perturbations for an Einstein–Gauss–Bonnet black hole surrounded by quintessence using the third-order WKB method and the Eikonal limit. First, the critical values of the Gauss–Bonnet coupling constant and the normalization factor related to the quintessence are established, to describe the event horizons of the solution. We have studied the condition of extreme horizons and the quasi–normal modes are performed by setting the quintessence state parameter in the particular case of $\omega_q = -2/3$.

Keywords: Quasi–normal modes; quintessence, WKB approximation; Lyapunov exponent.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.68.050704>

1. Introducción

Los agujeros negros son uno de los objetos más intrigantes de la Relatividad General y en general no pueden permanecer de forma aislada. Estos siempre interactúan con materia y campos subyacentes a su alrededor y como resultado de estas interacciones, el agujero negro toma un estado perturbado.

Cuando un agujero negro es perturbado, su comportamiento puede describirse en tres etapas: la primera etapa corresponde a la radiación debido a las condiciones iniciales de las perturbaciones, mientras que en la segunda etapa corresponde a oscilaciones amortiguadas con frecuencias complejas llamados *modos cuasi–normales*. Estas frecuencias son independientes de las condiciones iniciales y solo dependen de las propiedades del agujero negro, como la masa, la carga y el momento angular, entre otros. Estos modos de vibración son llamados modos cuasi–normales. Finalmente, la tercera etapa corresponde a un decaimiento de los campos que obedecen a una ley de potencias.

Los modos cuasi–normales han sido una de las herramientas más útiles para la caracterización de agujeros negros, debido a que los modos cuasi–normales están relacionados con los parámetros del agujero negro, como: masa, carga y momento angular.

El estudio de los modos cuasi–normales consiste en el análisis de una ecuación tipo onda con un potencial efectivo, dependiendo de las características específicas del potencial efectivo, en la literatura se proponen varios métodos para calcular los modos cuasi–normales, donde el método WKB [1] (Gregor Wentzel, Hendrik Kramers y Leon Brillouin) es uno de los más utilizados. En la aproximación óptica–geométrica (Eikonal) los modos cuasi–normales se pueden determinar a partir de las geodésicas inestables relacionadas con el potencial efectivo que sienten las partículas de prueba en su interacción con el agujero negro. En la Ref. [2], se muestra la relación que existe entre geodésicas circulares inestables, exponente de Lyapunov y los modos cuasi–normales en el límite Eikonal.

Han surgido diferentes investigaciones sobre modos cuasi–normales para una variedad de escenarios y en teorías alternativas, por ejemplo en la teoría de la relatividad general acoplada a electrodinámica no lineal se han abordado el estudio de modos cuasi–normales del agujero negro de Bardeen [3] que describe un agujero negro regular magnético, el agujero negro con carga eléctrica de Born–Infeld [4] y Bronnikov [5] por mencionar algunos.

Otra teoría alternativa, es la teoría de Einstein–Gauss–Bonnet [6], la cual considera correcciones a la curvatura. Además, muchos de los nuevos desarrollos de la teoría de

cuerdas [7-9] han incrementado la importancia de esta teoría en particular. Por otro lado, es bien conocido que en el límite a bajas energías de las teorías de cuerdas, dan lugar a modelos de gravedad en dimensiones más allá de cuatro, las cuales involucran potencias superiores del tensor de curvatura de Riemann en la acción adicionales al término habitual de Einstein–Hilbert [10].

Datos astronómicos observacionales recientes, muestran que el universo se expande de forma acelerada y que la hipotética energía oscura domina el universo actual, por lo cual, los agujeros negros rodeados de energía oscura son de interés para los investigadores. Existen varios modelos que son candidatos a la energía oscura, en la cual, la componente dominante de la densidad de energía tiene presión negativa. Uno de ellos es la constante cosmológica, que corresponde al caso de energía oscura con un parámetro de estado $\omega_q = -1$, parámetro de estado es la razón entre la presión y la densidad de energía. Otros modelos alternativos que son propuestos como candidatos a energía oscura se basan en un campo escalar, como por ejemplo, la quintaesencia [11,12], K–esencia [13], tachyon [14] y dilaton [15]. Básicamente, la diferencia entre esos modelos radica en la elección de la magnitud de ω_q . Para la quintaesencia, el parámetro de estado se encuentra en el rango $-1 < \omega_q < -1/3$.

Por lo tanto, la presencia de quintaesencia alrededor de agujeros negros deberían de producir algunos efectos astrofísicos, y en consecuencia su análisis sería de gran interés.

Kiselev [16] propuso una solución estática con simetría esférica que describe a un agujero negro rodeado de quintaesencia, las cuales también han sido extendidas a más de cuatro dimensiones [17,18]. La termodinámica de agujeros negros rodeado de quintaesencia ha sido investigada a detalle en [19-21], los modos cuasi–normales de dichas soluciones han sido abordados en [19-21] y el estudio de las trayectorias geodésicas en [26-28].

Motivados por lo anterior, en este trabajo se estudian los efectos de la quintaesencia en el comportamiento de modos cuasi–normales para las perturbaciones escalares y electromagnéticas de un agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet en cuatro dimensiones [29]. El documento se organiza de la siguiente forma. En la Sec. 2, se presenta el agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet rodeado de quintaesencia, y se analizan los horizontes. En la Sec. 3, se describen las perturbaciones escalares y electromagnéticas del agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet (EGB). Se analiza el comportamiento del potencial efectivo para las perturbaciones escalares y electromagnéticas. Luego, en la Sec. 4 se da una breve descripción de como obtener los modos cuasi–normales empleando la aproximación WKB de tercer orden, mientras que en la Sec. 5, los modos cuasi–normales son descritos por medio del límite Eikonal. En la Sec. 6 se presentan y discuten los resultados obtenidos y finalmente en la Sec. 7 las conclusiones son presentadas.

2. Agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia

En esta sección se describe brevemente, el agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia [29]. La acción en cuatro dimensiones de EGB puede ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \alpha L_{GB}], \quad (1)$$

donde R es el escalar de Ricci, α es la constante de acoplamiento de Gauss–Bonnet y L_{GB} es el lagrangiano de Gauss–Bonnet dado por

$$L_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2)$$

donde $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ el tensor de Riemann y $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci.

La variación de la acción (1) conduce a la siguiente ecuación de campo

$$2\alpha [RR_{\alpha\beta} - 2R_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta} + R_{\alpha}{}^{\sigma\delta\epsilon}R_{\beta\sigma\delta\epsilon}] - \frac{1}{2}\alpha g_{\alpha\beta}L_{GB} + R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía momento de quintaesencia propuesto por Kiselev [16]

$$T_0{}^0 = \rho(r), \quad (4)$$

$$T_a{}^b = \rho(r)\gamma \left[B(r)\delta_a{}^b - \{1 + 3B(r)\} \frac{r_a r^b}{r_n r^n} \right], \quad (5)$$

con γ una constante y $B(r)$ el parámetro de quintaesencia. Tomando el promedio isotrópico sobre los ángulos en la Ec. (5) se obtiene

$$\langle T_a{}^b \rangle = -\rho(r) \frac{\gamma}{3} \delta_a{}^b = -p(r) \delta_a{}^b, \quad (6)$$

$$\langle r_a r^b \rangle = \frac{1}{3} \delta_a{}^b r_n r^n. \quad (7)$$

Esto permite derivar la siguiente ecuación de estado

$$p = \omega_q \rho, \quad \omega_q = \frac{\gamma}{3}, \quad (8)$$

donde el estado de quintaesencia ω_q , debe satisfacer $-1 < \omega_q < 0$, lo cual implica $-3 \leq \gamma \leq 0$.

Empleando el principio de aditividad y linealidad ($T_0{}^0 = T_r{}^r$), se puede determinar el parámetro de quintaesencia

$$B(r) = -\frac{3\omega_q + 1}{6\omega_q}. \quad (9)$$

Por lo tanto, sustituyendo la Ec. (9) en la Ec. (5), las componentes del tensor de energía momento de quintaesencia son

$$T_0{}^0 = T_r{}^r = \rho, \quad (10)$$

$$T_\theta{}^\theta = T_\phi{}^\phi = -\frac{1}{2}\rho(3\omega_q + 1). \quad (11)$$

Para un espacio–tiempo con simetría esférica, la métrica es definida por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (12)$$

Para el elemento de línea (12), la ecuación de EGB (3) se puede escribir como

$$T_0^0 = T_r^r = \frac{f'}{f} + \frac{f-1}{r^2} - \alpha \left[\frac{2ff' - 2f'}{r^3} - \frac{f^2 - 2f + 1}{r^4} \right], \quad (13)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{2ff'' - 2f'' + 2f'^2}{r^2} + \frac{4f' + 2f^2 - 4ff'}{r^3} + \frac{2f^2 - 4f + 2}{r^4} \right], \quad (14)$$

donde la prima indica que se deriva respecto de la coordenada r .

Combinando las Ecs. (10), (11) con las Ecs. (13), (14) se obtiene

$$\rho = \frac{f'}{f} + \frac{f-1}{r^2} - \alpha \left[\frac{2ff' - 2f'}{r^3} - \frac{f^2 - 2f + 1}{r^4} \right], \quad (15)$$

$$-\frac{\rho(3\omega_q + 1)}{2} = \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{2ff'' - 2f'' + 2f'^2}{r^2} + \frac{4f' + 2f^2 - 4ff'}{r^3} + \frac{2f^2 - 4f + 2}{r^4} \right]. \quad (16)$$

A partir de las Ecs. (15) y (16), se tiene

$$\left[r^2 f' \right]' + (3\omega_q + 1) [r(f-1)]' - \alpha \left\{ 2[(f-1)f']' + (3\omega_q - 1) \left(\frac{f^2}{r} \right)' - (6\omega_q - 2) \left(\frac{f}{r} \right)' - \frac{3\omega_q - 1}{r^2} \right\} = 0, \quad (17)$$

donde la solución de la Ec. (17), toma la siguiente forma

$$f_\pm(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\alpha M}{r^3} + \frac{8\alpha c}{r^{3\omega_q + 3}}} \right], \quad (18)$$

donde M es la masa, α la constante de acoplamiento de Gauss-Bonnet, c un factor de normalización, ω_q es el parámetro de estado de quintaesencia, el cual se encuentra en el rango $-1 < \omega_q < -1/3$ y el signo \pm representa dos ramas de la solución.

Para estudiar la estructura general de la solución EGB rodeado de quintaesencia, primero se considera el límite $r \rightarrow \infty$ en la Ec. (18), teniendo

$$f_+(r) \approx \frac{r^2}{\alpha}, \quad (19)$$

$$f_-(r) \approx 1, \quad (20)$$

donde la rama con el signo $+$, muestra un comportamiento asintóticamente de Sitter o Anti-de Sitter, dependiendo del

signo de α , mientras que la rama con el signo $-$, tiene un comportamiento asintóticamente plano. Por otra parte, cuando $\alpha \rightarrow 0$, la solución (18) tiene los siguientes comportamientos

$$f_+(r) \approx 1 + \frac{2M}{r} + \frac{2c}{r^{3\omega_q + 1}} + \frac{r^2}{\alpha}, \quad (21)$$

$$f_-(r) \approx 1 - \frac{2M}{r} - \frac{2c}{r^{3\omega_q + 1}}. \quad (22)$$

Se puede observar que la rama con el signo negativo (22), se reduce a la solución de Schwarzschild rodeado de quintaesencia [19], mientras que la rama con el signo positivo conduce a una solución tipo de Sitter o Anti-de Sitter. Por lo tanto, en este trabajo se considera únicamente la rama con el signo menos.

2.1. Horizontes de eventos

Para proseguir con el análisis, es importante determinar los horizontes de eventos, para ello, se debe de estudiar las raíces positivas de $f(r_h) = 0$, siendo r_h el horizonte del agujero negro. Esta condición conduce a la siguiente ecuación

$$2\alpha r_h^{3\omega_q/2} + r_h^{(3\omega_q + 4)/2} - \sqrt{r_h^{3\omega_q + 4} + 8\alpha r_h^{3\omega_q + 1} + 8\alpha c r_h} = 0, \quad (23)$$

donde se ha expresado, la distancia radial, la constante de acoplamiento de Gauss-Bonnet y el factor de normalización en unidades de masa, es decir, $r \rightarrow r/M$, $\alpha \rightarrow \alpha/M^2$ y $c \rightarrow c/M^{3\omega_q + 1}$. El número de horizontes, depende de los valores que tomen los parámetros α y c .

Recientemente, Rizwan, Jamil y Anzhong propusieron un método para realizar el análisis de los horizontes de un agujero negro [30]. De acuerdo a este procedimiento, a partir de la Ec. (23), se puede parametrizar a α como función de c y r_h

$$\alpha(c, r_h) = 2r_h - r_h^2 + \frac{2c}{r_h^{3\omega_q - 1}}. \quad (24)$$

Esta función $\alpha(c, r_h)$ tiene un valor extremo ($[d\alpha(c, r_h)/dr_h]_{c_e(r_h)} = 0$) para un $c_e(r_h)$, dado por

$$c_e(r_h) = \frac{(1 - r_h)r_h^{3\omega_q}}{3\omega_q - 1}. \quad (25)$$

Nuevamente, $c_e(r_h)$ tiene un valor extremo ($[dc_e(r_h)/dr_h]_{r_e} = 0$), localizado en un r_e , dado por;

$$r_e = \frac{3\omega_q}{3\omega_q + 1}. \quad (26)$$

Al introducir la Ec. (26) en la Ec. (25) se obtiene el valor c_e , mientras que sustituyendo la Ec. (26) y la expresión de c_e

en la Ec. (24) se tiene el valor crítico de α_c . Así, los valores críticos de α_c y c_c son dados por

$$\alpha_c \equiv \alpha(c_c, r_e) = \frac{9\omega_q^2}{9\omega_q^2 - 1}, \quad (27)$$

$$c_c \equiv c(r_e) = -\frac{1}{9\omega_q^2 - 1} \left(\frac{3\omega_q}{3\omega_q + 1} \right)^{3\omega_q}. \quad (28)$$

Las Figs. 1 y 2, muestran el comportamiento de c_c y α_c como función de ω_q . De ellas se puede apreciar que cuando ω_q incrementa, los valores de c_c y α_c incrementan monótonamente en cada caso.

La Tabla I, proporciona algunos valores de c_c y α_c , particularmente, se presentan los casos $\omega_q = -7/20$ y $\omega_q = -9/20$ reportados en Ref. [29] para el análisis termodinámico del agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet rodeado de quintaesencia.

En resumen, para $0 \leq c \leq c_c$ y $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ la solución EGB rodeado de quintaesencia puede representar un agujero negro con diferentes horizontes r_{in} (horizonte interno), r_{ex}

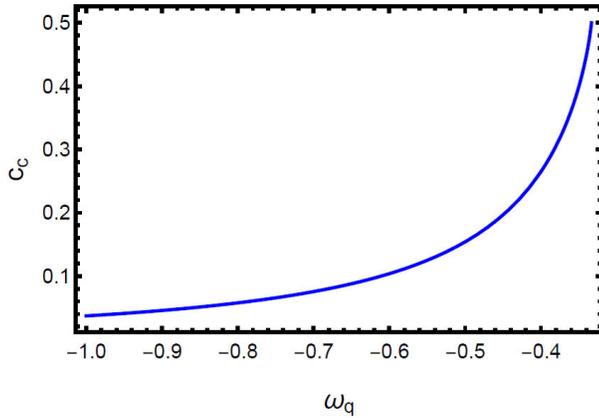


FIGURA 1. La figura muestra el comportamiento del parámetro c_c como función de ω_q . Cuando $\omega_q \rightarrow -1$, $c_c \rightarrow 1/27$, mientras que si $\omega_q \rightarrow -1/3$, $c_c \rightarrow 1/2$.

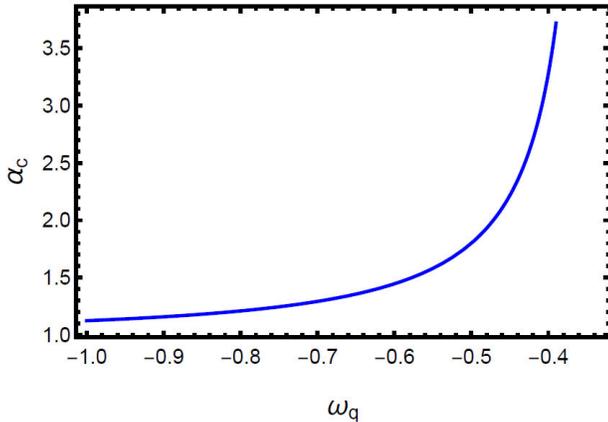


FIGURA 2. La figura muestra el comportamiento del parámetro α_c como función de ω_q . Cuando $\omega_q \rightarrow -1$, $\alpha_c \rightarrow 9/8$ y cuando $\omega_q \rightarrow -1/3$, α_c diverge.

TABLA I. Valores críticos c_c y α_c para diferentes ω_q .

ω_q	$-7/20$	$-9/20$	$-5/9$	$-2/3$	$-7/9$	$-8/9$
c_c	0.398975	0.196519	0.122149	0.0833333	0.0609668	0.0467261
α_c	10.7561	2.21581	1.5625	1.33333	1.225	1.16364

(horizonte externo) y r_{ω_q} (horizonte de quintaesencia). Cabe mencionar que cuando se considera a la quintaesencia, un nuevo horizonte emerge, el horizonte de quintaesencia o cosmológico.

Para realizar un estudio completo de los horizontes, es necesario analizar el caso extremo (cuando dos o más horizontes colapsan). El caso extremo puede ser obtenido de las condiciones $f(r_h) = 0$ y $df(r_h)/dr = 0$, las cuales se deben de cumplir simultáneamente. De la condición $df(r_h)/dr = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} & \left[r_h^{3\omega_q} (r_h^3 + 2\alpha) + 2c\alpha (1 - 3\omega_q) \right. \\ & \left. - r_h^{(3\omega_q+3)/2} \sqrt{r_h^{3\omega_q} (r_h^3 + 8\alpha) + 8c\alpha} \right] \\ & \times \frac{1}{\alpha r_h^{(3\omega_q+1)/2} \sqrt{r_h^{3\omega_q} (r_h^3 + 8\alpha) + 8c\alpha}} = 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Para poder continuar con el análisis del caso extremo, es necesario definir un valor específico para ω_q , particularmente, se considera el caso $\omega_q = -2/3$, el cual permite un tratamiento relativamente simple de las propiedades del agujero negro.

Por otra parte, al introducir la Ec. (24) ($f(r_h) = 0$) en la Ec. (29), es posible obtener la expresión que debe satisfacer el caso extremo

$$12c^2 r_h^4 - 10c r_h^3 + 16c r_h^2 + 2r_h^2 - 6r_h + 4 = 0. \quad (30)$$

Esta ecuación puede ser resuelta analíticamente y posee cuatro raíces positivas, de las cuales solo dos son relevantes para $0 \leq c \leq c_c$. Estas dos raíces positivas son dadas por

$$r_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 12c}}{6c}, \quad (31)$$

$$r_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 12c}}{6c}. \quad (32)$$

La Fig. 3, muestra el comportamiento de r_+ y r_- como función de c , en la cual se puede apreciar que cuando c incrementa, r_+ disminuye, mientras que r_- aumenta ligeramente y ambos convergen cuando $c = c_c = 0.0833333$.

En general, los horizontes del agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia satisfacen la relación $r_{in} \leq r_- \leq r_{ex} \leq r_+ \leq r_{\omega_q}$. De la Fig. 3 se puede observar que para valores pequeños del parámetro c , r_+ toma valores muy grandes y por lo tanto, r_{ω_q} también toma valores muy grandes, mientras que para valores del parámetro c muy cercanos a c_c , r_{ω_q}

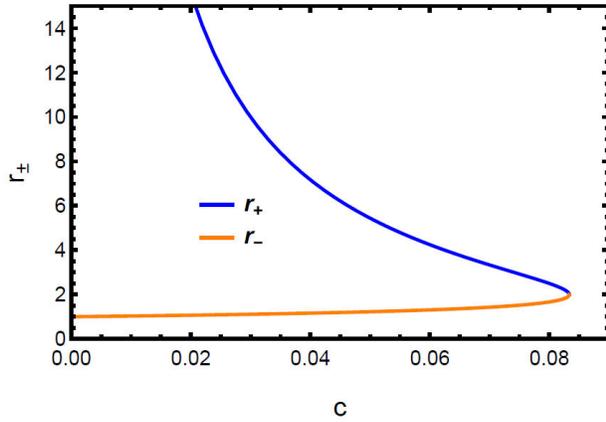


FIGURA 3. La gráfica muestra el comportamiento de r_+ y r_- como función de c , con $c \in (0, 0.0833333]$.

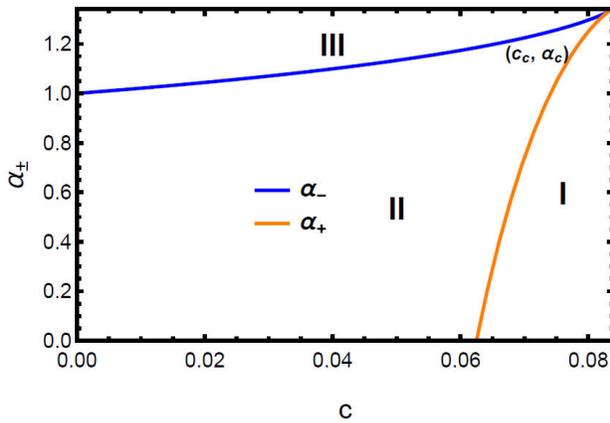


FIGURA 4. La gráfica muestra el comportamiento de α_- y α_+ como función de c , con $c_c = 0.0833333$ y $\alpha_c = 1.33333$.

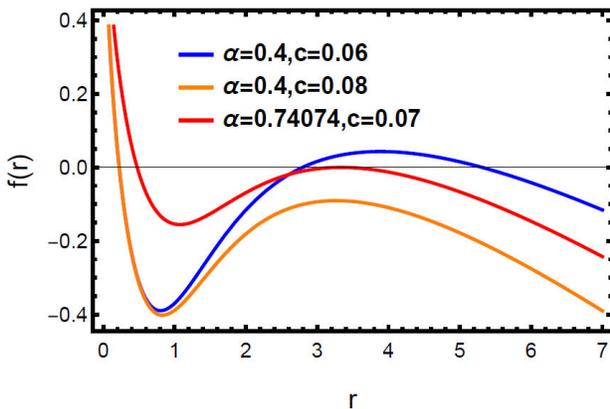


FIGURA 5. La gráfica muestra el comportamiento de $f(r)$ como función de r , para distintos valores de c y α .

considera valores muy pequeños. Por otra parte, si c se incrementa, r_- igualmente se incrementa y por lo tanto el horizonte de eventos se incrementa, aunque de forma lenta.

Ahora, sustituyendo las Ecs. (31) y (32) en la Ec. (24), se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_- &\equiv \alpha(c, r_-), \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1 - 12c})(24c + \sqrt{1 - 12c} - 1)}{108c^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ &\equiv \alpha(c, r_+), \\ &= \frac{(1 + \sqrt{1 - 12c})(24c - \sqrt{1 - 12c} - 1)}{108c^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

La Fig. 4 muestra el comportamiento de α_{\pm} como función de c . Para valores de (c, α) correspondientes a la región *I* y *III*, el agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia tiene solo un horizonte, mientras para valores de (c, α) que pertenecen a la región *II*, el agujero negro tiene tres horizontes. Asimismo, para valores de (c, α) contenidos en la frontera de las regiones *II* y *III* (que corresponde a α_-), así como a la frontera de las regiones *I* y *II* (para α_+), se tiene un agujero negro con dos horizontes de eventos.

Dependiendo de la elección de los valores (c, α) (ver Fig. 5), el número de horizontes puede decrecer de tres a uno, donde el horizonte cosmológico (quintaesencia) nunca desaparece. Por otra parte, cuando únicamente se tiene el horizonte de quintaesencia, el agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia describe una singularidad desnuda.

3. Perturbaciones escalares y electromagnéticas

En esta sección se da una breve descripción de las ecuaciones para las perturbaciones escalares y electromagnéticas.

La ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar sin masa en un espacio-tiempo curvo toma la siguiente forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \Phi = 0. \quad (35)$$

Considerando, un espacio-tiempo con simetría esférica dado por la Ec. (12) en la Ec. (35), y usando el ansatz para el campo escalar Φ

$$\Phi = e^{-i\omega t} Y(\theta, \phi) \frac{\xi(r)}{r}, \quad (36)$$

con $Y(\theta, \phi)$ los armónicos esféricos e introduciendo también el cambio de la coordenada r a la coordenada tortuga r_*

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)}, \quad (37)$$

donde se tiene que si $r \rightarrow r_{ex}$, entonces la coordenada tortuga $r_* \rightarrow -\infty$, y cuando $r \rightarrow \infty$, $r_* \rightarrow \infty$, esto permite describir de forma fácil las ondas salientes o entrantes.

Entonces se puede obtener la siguiente ecuación de perturbación radial

$$\frac{d^2 \xi(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_E(r)] \xi(r) = 0, \quad (38)$$

donde

$$V_E(r) = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} \right]. \quad (39)$$

Como se puede apreciar de la Ec. (39), el potencial efectivo $V_E(r)$ depende de la constante de acoplamiento α de Gauss–Bonnet, el término de normalización de quintaesencia c , y del índice armónico angular l .

Las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo curvo que describen las perturbaciones electromagnéticas (ver [31,32]) son

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F_{\beta\gamma}g^{\beta\nu}g^{\gamma\mu}) = 0, \quad (40)$$

donde $F_{\beta\gamma} = \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta$ y A_γ es el potencial electromagnético.

Al considerar simetría esférica, se puede tomar el siguiente ansatz [33]

$$\begin{aligned} A_t = A_r = A_\theta = 0, \\ A_\phi = \xi(r) \sin(\omega t) \sin\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (41)$$

donde $P_l(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre. Empleando el ansatz (41) en la Ec. (40), se puede tener una ecuación de onda, como la Ec. (38), donde el potencial efectivo esta dado por

$$V_{EM}(r) = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right]. \quad (42)$$

En este caso se tiene que $l \geq 1$.

La gráfica de $V_E(r)$ y $V_{EM}(r)$ para distintos valores de c , se muestran en la Fig. 6, mientras que en la Fig. 7 se muestra el comportamiento de los potenciales para distintos valores de α . En general, los potenciales efectivos $V_E(r)$ y $V_{EM}(r)$ tienen la forma de un potencial de barrera con un solo máximo, siendo el potencial del campo escalar mayor que para el campo electromagnético. Cuando $r \rightarrow \infty$, los potenciales efectivos tienen un valor asintótico, $V_E(r) \approx 4c^2$ para el campo escalar y $V_{EM}(r) \approx -[2cl(l+1)]/r$ para el campo electromagnético.

Por otra parte, de las Ecs. (39) y (42), se puede apreciar que los ceros de los potenciales efectivos coinciden con los ceros de la función métrica, es decir, los potenciales efectivos se anulan en los horizontes.

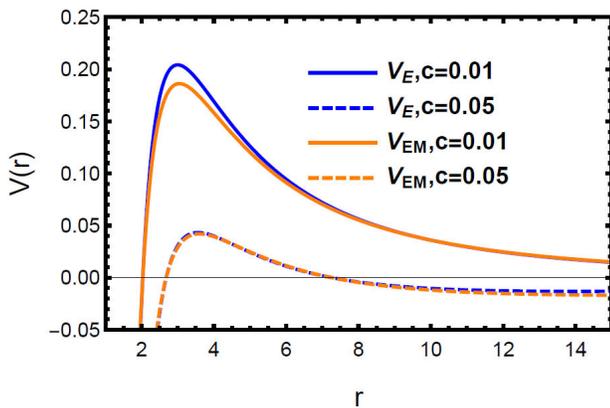


FIGURA 6. Comportamiento de $V_E(r)$ y $V_{EM}(r)$, con $\alpha = 0.1$ y $l = 2$.

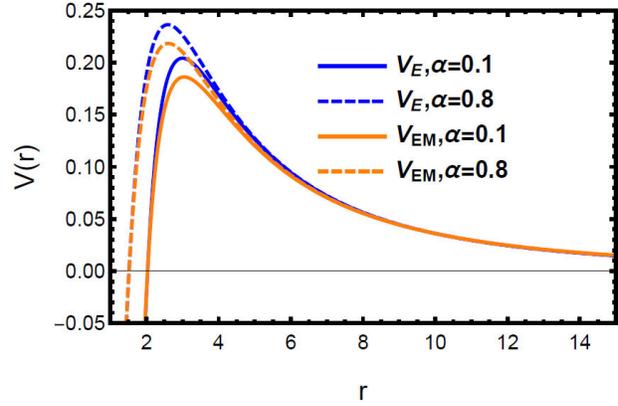


FIGURA 7. Comportamiento de $V_E(r)$ y $V_{EM}(r)$, con $c = 0.01$ y $l = 2$.

De la Fig. 6 se puede ver que cuando c incrementa la altura máxima del potencial disminuye tanto para el caso escalar, como para el electromagnético, lo cual implica que la presencia de quintaesencia reduce la magnitud de los diferentes potenciales. Se puede apreciar que con el aumento de c , no existe una diferencia significativa entre el potencial efectivo para el campo escalar y para el campo electromagnético. Cuando α incrementa, el pico del potencial incrementa en ambos casos y su posición se mueve hacia la izquierda, como se puede apreciar en la Fig. 7.

4. Modos cuasi-normales de un agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia: aproximación WKB

Los modos cuasi-normales están relacionados con las soluciones de la Ec. (38). Para hallar dichas soluciones, se deben de imponer las siguientes condiciones de frontera:

1. En el horizonte, la onda debe ser únicamente entrante $\xi(r) \sim e^{-i\omega r^*}$.
2. En el infinito espacial, la onda debe ser solamente saliente $\xi(r) \sim e^{i\omega r^*}$.

De acuerdo a la Ec. (36), la función de onda Φ tiene una dependencia temporal dada por

$$\Phi(t, r, \phi, \theta) \sim e^{-i\omega t}, \quad (43)$$

la cual describe las oscilaciones temporales. Donde la frecuencia ω tiene una componente real e imaginaria, es decir, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, por lo que la expresión (43) se puede expresar como

$$\Phi(t, r, \phi, \theta) \sim e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} = e^{-i\omega_r t} e^{\omega_i t}. \quad (44)$$

La parte real de la frecuencia, ω_r representa la oscilación real del agujero negro, la cual es siempre positiva. Por otra parte, la parte imaginaria de la frecuencia ω_i puede ser positiva o

negativa. Si $\omega_i > 0$, entonces la solución (44) diverge a medida que el tiempo aumenta, y por lo tanto la oscilación del agujero negro siempre crecerá, lo cual describe una solución inestable. En el caso en el que $\omega_i < 0$, se tiene una oscilación amortiguada, debido a que la Ec. (44) decrece conforme el tiempo avanza y eventualmente tiende a cero para tiempos muy grandes, por lo que gradualmente la oscilación del agujero negro cesará. Este comportamiento describe una solución estable.

En el caso, en el que $\omega_i = 0$, la solución (38) describe los modos normales, donde el agujero negro permanece oscilando indefinidamente.

Se pueden definir a los modos cuasi-normales como una oscilación general, que posee un factor de amortiguamiento exponencial, es decir, de la forma $e^{(-i\omega_r + \omega_i)t}$, con $\omega_i < 0$.

Usualmente la Ec. (38) no se puede resolver de forma exacta, por lo cual se han desarrollado una variedad de métodos para calcular los modos cuasi-normales. En este trabajo, se emplea la técnica desarrollada por Iyer y Will [34], la cual se basa en la aproximación WKB.

Siguiendo la Ref. [4], en la fórmula WKB, las frecuencias de los modos cuasi-normales están relacionadas con los potenciales (39) y (42) de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\omega^2 = \left[V_0 + (-2V_0'')^{1/2} \Lambda \right] - i\bar{\alpha} (-2V_0'')^{1/2} [1 + \bar{\Omega}], \quad (45)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \bar{\alpha}^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\bar{\alpha}^2) \right\}, \\ \bar{\Omega} &= \frac{1}{-2V_0''} \left\{ \frac{5}{6912} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\bar{\alpha}^2) - \frac{1}{384} \left(\frac{V_0''^2 V_0^{(4)}}{V_0''^3} \right) (51 + 100\bar{\alpha}^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right) (5 + 4\bar{\alpha}^2) + \frac{1}{288} \left(\frac{V_0''' V_0^{(5)}}{V_0''^2} \right) (19 + 28\bar{\alpha}^2) + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (67 + 68\bar{\alpha}^2) \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

con

$$\bar{\alpha} = n + \frac{1}{2}, \quad V_0^{(n)} = \left. \frac{d^n V_{E,EM}}{dr_*^n} \right|_{r_* = r_*(r_p)}, \quad (48)$$

donde $r_*(r_p)$ indica el valor de la variable r_* en el máximo de los potenciales $V_E(r)$, $V_{EM}(r)$ y $n = 0, 1, 2, \dots$

Cabe señalar que la precisión del método WKB depende de la elección del número multipolar l y del armónico n , es decir, como se ha mostrado en Ref. [35], el método WKB funciona bastante bien cuando $l > n$, sin embargo, si $l = n$ este, no proporciona resultados satisfactorios y si $l < n$, no es posible aplicar el método WKB. Por otra parte, los resultados mejoran progresivamente al aumentar los valores de l .

5. Modos cuasi-normales en el límite Eikonal

En Ref. [2], se presentó un método para calcular los modos cuasi-normales, en el límite Eikonal a través de geodésicas inestables. La idea es interpretar a las oscilaciones libres del agujero negro en términos de partículas de prueba atrapadas en órbitas circulares inestable, en este trabajo consideraremos únicamente geodésicas nulas (fotones).

La parte real de las frecuencias de los modos cuasi-normales está determinada por la velocidad angular en la geodésica nula inestable, mientras que la parte imaginaria está relacionada con la escala de tiempo de la inestabilidad de la órbita circular.

Esta técnica ha sido empleada para un agujero negro de Kerr [36,37], anti-de-Sitter [38], de Hayward [39], entre otros.

En el límite Eikonal, los potenciales efectivos relacionados con las perturbaciones escalares y electromagnéticas presenten el mismo comportamiento (ver [40]) y su potencial efectivo, toma la siguiente forma

$$V_{\text{Eikonal}} = L^2 \frac{f(r)}{r^2}, \quad (49)$$

donde L representa el momento angular de los fotones.

El radio r_0 de la órbita circular inestable se obtiene de las condiciones

$$V_{\text{Eikonal}}(r_0) = 0, \quad (50)$$

$$\left. \frac{dV_{\text{Eikonal}}(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (51)$$

De las expresiones anteriores se obtiene la relación

$$2f(r_0) - r_0 f'(r_0) = 0. \quad (52)$$

Las frecuencias de los modos cuasi-normales ω , se pueden expresar por una relación sencilla, que depende de la función métrica $f(r)$ y del radio r_0 de la órbita circular inestable,

$$\omega = \Omega l - i \left(n + \frac{1}{2} \right) |\lambda|, \quad (53)$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{f(r_0)}{r_0^2}}, \quad (54)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{f(r_0)}{2r_0^2} (2f(r_0) - r_0 f''(r_0))}. \quad (55)$$

TABLA II. La tabla muestra las frecuencias de los modos cuasi-normales para perturbaciones escalares y electromagnéticas usando WKB a tercer orden para diferentes valores de c , con $\alpha = 0.4$.

c	Frecuencias	Frecuencias	Frecuencias	Frecuencias
	Escalares	Electromagnéticas	Escalares	Electromagnéticas
	$n = 0, l = 0$	$n = 0, l = 0$	$n = 1, l = 1$	$n = 1, l = 1$
0.01	0.089044-0.093899 <i>i</i>	–	0.248694-0.251154 <i>i</i>	0.210127-0.240091 <i>i</i>
0.02	0.075309-0.085196 <i>i</i>	–	0.222945-0.219232 <i>i</i>	0.192258-0.208902 <i>i</i>
0.03	0.061237-0.075501 <i>i</i>	–	0.194608-0.185556 <i>i</i>	0.171789-0.176279 <i>i</i>
0.04	0.047204-0.064667 <i>i</i>	–	0.162997-0.149606 <i>i</i>	0.147719-0.141629 <i>i</i>
0.05	0.019727-0.044220 <i>i</i>	–	0.122710-0.105970 <i>i</i>	0.117799-0.103713 <i>i</i>
0.06	0.151351-0.153791 <i>i</i>	–	0.127381-0.118754 <i>i</i>	0.074313-0.058304 <i>i</i>
	$n = 0, l = 1$	$n = 0, l = 1$	$n = 1, l = 2$	$n = 1, l = 2$
0.01	0.271694-0.080640 <i>i</i>	0.237018-0.076139 <i>i</i>	0.439372-0.242943 <i>i</i>	0.418579-0.238419 <i>i</i>
0.02	0.241118-0.070690 <i>i</i>	0.214211-0.066579 <i>i</i>	0.393948-0.211687 <i>i</i>	0.377724-0.207529 <i>i</i>
0.03	0.208430-0.060083 <i>i</i>	0.188919-0.056512 <i>i</i>	0.344440-0.178858 <i>i</i>	0.332653-0.175264 <i>i</i>
0.04	0.172661-0.048634 <i>i</i>	0.160041-0.045741 <i>i</i>	0.289158-0.144043 <i>i</i>	0.281475-0.141028 <i>i</i>
0.05	0.131424-0.034991 <i>i</i>	0.125194-0.033834 <i>i</i>	0.225170-0.108080 <i>i</i>	0.220070-0.103536 <i>i</i>
0.06	0.083930-0.036458 <i>i</i>	0.076648-0.019282 <i>i</i>	0.123370-0.016453 <i>i</i>	0.134882-0.058377 <i>i</i>
	$n = 0, l = 2$	$n = 0, l = 2$	$n = 2, l = 2$	$n = 2, l = 2$
0.01	0.454099-0.079881 <i>i</i>	0.434009-0.078283 <i>i</i>	0.414960-0.412023 <i>i</i>	0.393205-0.404951 <i>i</i>
0.02	0.405882-0.069682 <i>i</i>	0.390375-0.068227 <i>i</i>	0.374100-0.358566 <i>i</i>	0.356770-0.352049 <i>i</i>
0.03	0.353720-0.058965 <i>i</i>	0.342537-0.057716 <i>i</i>	0.328851-0.302456 <i>i</i>	0.316080-0.296792 <i>i</i>
0.04	0.295754-0.047550 <i>i</i>	0.288556-0.046549 <i>i</i>	0.278059-0.243197 <i>i</i>	0.269360-0.238186 <i>i</i>
0.05	0.228000-0.035359 <i>i</i>	0.224266-0.034286 <i>i</i>	0.222691-0.184387 <i>i</i>	0.212650-0.174144 <i>i</i>
0.06	0.136322-0.013460 <i>i</i>	0.136171-0.019417 <i>i</i>	0.135148-0.101102 <i>i</i>	0.132477-0.097595 <i>i</i>

Aquí, Ω es la velocidad angular orbital y λ es el exponente de Lyapunov, el cual es interpretado como la razón de decaimiento de las geodésicas circulares inestables. El exponente de Lyapunov es una medida de la tasa promedio a la que trayectorias cercanas convergen o divergen en el espacio de fase. Un exponente de Lyapunov positivo indica una divergencia entre trayectorias cercanas, es decir, una alta sensibilidad a las condiciones iniciales (para una mayor referencia en la derivación de las expresiones anteriores, el lector puede consultar [41]).

6. Resultados

En esta sección se obtienen las frecuencias de los modos cuasi-normales para perturbaciones escalares y electromagnéticas usando el método WKB a tercer orden y en el límite Eikonal para un agujero negro de EGB rodeado de quintaesencia. Las frecuencias han sido obtenidas para los valores de (c, α) correspondientes a la región II (ver Fig. 4).

En la Tabla II se muestra las frecuencias de los modos cuasi-normales para distintos valores de c y para los primeros armónicos, debido a que estas decaen más lentamente y son relevantes para la descripción de los campos alrededor del

agujero negro. Como pueden apreciarse, la parte imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi-normales para los primeros tres armónicos son negativos, lo cual indica que el agujero negro EGB rodeado de quintaesencia es estable bajo perturbaciones escalares y electromagnéticas, cuando el parámetro c se incrementa. Por otra parte, al incrementar el valor de n (para un valor fijo de l y c), la norma de la parte imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi-normales aumenta, lo cual provoca que el agujero negro EGB rodeado de quintaesencia eventualmente sea menos estable. De la Tabla III, se puede apreciar un comportamiento similar al incrementar el parámetro α .

De las Figs. 8 y 9 se pueden observar que las frecuencias de oscilación y la razón de amortiguamiento para el campo escalar y el campo electromagnético incrementan cuando α se incrementa y en general se observa que $\omega_{rE} > \omega_{rEM}$ y $\omega_{iEM} > \omega_{iE}$. Particularmente, se observa que para ambos campos, la presencia de quintaesencia provoca que las oscilaciones sean más estables (ver Fig. 9), pero el valor de ω_r disminuye (ver Fig. 8).

Cuando el parámetro c se incrementa, la frecuencia de oscilación disminuye (ver Fig. 10), mientras que la razón de amortiguamiento aumenta, como se puede ver en la Fig. 11.

TABLA III. La tabla muestra las frecuencias de los modos cuasi-normales para perturbaciones escalares y electromagnéticas usando WKB a tercer orden para diferentes valores de α , con $c = 0.01$.

α	Frecuencias Escalares	Frecuencias Electromagnéticas	Frecuencias Escalares	Frecuencias Electromagnéticas
	$n = 0, l = 0$	$n = 0, l = 0$	$n = 1, l = 1$	$n = 1, l = 1$
0.1	0.202505-0.208298 <i>i</i>	–	0.691042-0.700784 <i>i</i>	0.198644-0.255201 <i>i</i>
0.2	0.092282-0.101635 <i>i</i>	–	0.239429-0.258776 <i>i</i>	0.202337-0.250604 <i>i</i>
0.3	0.089354-0.096426 <i>i</i>	–	0.246063-0.257058 <i>i</i>	0.206172-0.245595 <i>i</i>
0.4	0.089036-0.093892 <i>i</i>	–	0.248694-0.251154 <i>i</i>	0.210127-0.240091 <i>i</i>
0.5	0.088070-0.091107 <i>i</i>	–	0.251631-0.245040 <i>i</i>	0.214162-0.233978 <i>i</i>
0.6	0.086747-0.088381 <i>i</i>	–	0.254475-0.238303 <i>i</i>	0.218199-0.227102 <i>i</i>
	$n = 0, l = 1$	$n = 0, l = 1$	$n = 1, l = 2$	$n = 1, l = 2$
0.1	0.345177-0.238895 <i>i</i>	0.227455-0.080638 <i>i</i>	0.459024-0.310843 <i>i</i>	0.402314-0.251764 <i>i</i>
0.2	0.265748-0.083113 <i>i</i>	0.230443-0.079250 <i>i</i>	0.429030-0.252479 <i>i</i>	0.407485-0.247729 <i>i</i>
0.3	0.268791-0.082414 <i>i</i>	0.233623-0.077759 <i>i</i>	0.434027-0.247835 <i>i</i>	0.412902-0.243307 <i>i</i>
0.4	0.271694-0.080640 <i>i</i>	0.237018-0.076139 <i>i</i>	0.439374-0.242946 <i>i</i>	0.418579-0.238419 <i>i</i>
0.5	0.274792-0.078794 <i>i</i>	0.240649-0.074355 <i>i</i>	0.444932-0.237473 <i>i</i>	0.424528-0.232959 <i>i</i>
0.6	0.278076-0.076759 <i>i</i>	0.244544-0.072358 <i>i</i>	0.450708-0.231301 <i>i</i>	0.430746-0.226781 <i>i</i>
	$n = 0, l = 2$	$n = 0, l = 2$	$n = 2, l = 2$	$n = 2, l = 2$
0.1	0.440964-0.087180 <i>i</i>	0.419723-0.082426 <i>i</i>	0.414960-0.412023 <i>i</i>	0.393205-0.404951 <i>i</i>
0.2	0.444688-0.082839 <i>i</i>	0.424204-0.081173 <i>i</i>	0.374100-0.358566 <i>i</i>	0.356770-0.352049 <i>i</i>
0.3	0.449250-0.081413 <i>i</i>	0.428954-0.079800 <i>i</i>	0.328851-0.302456 <i>i</i>	0.316080-0.296792 <i>i</i>
0.4	0.454099-0.079881 <i>i</i>	0.434009-0.078283 <i>i</i>	0.278059-0.243197 <i>i</i>	0.269360-0.238186 <i>i</i>
0.5	0.459264-0.078170 <i>i</i>	0.439412-0.076586 <i>i</i>	0.222691-0.184387 <i>i</i>	0.212650-0.174144 <i>i</i>
0.6	0.464792-0.076238 <i>i</i>	0.445217-0.074663 <i>i</i>	0.135148-0.101102 <i>i</i>	0.132477-0.097595 <i>i</i>

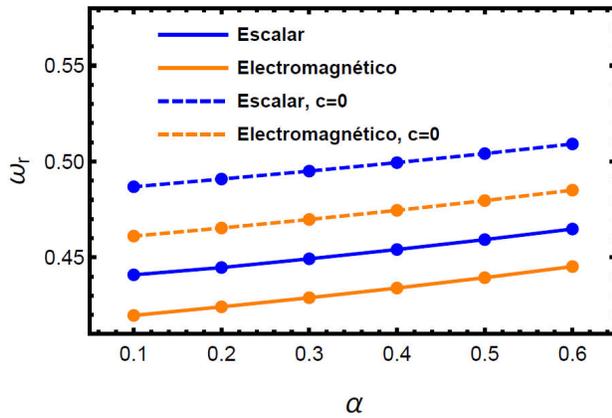


FIGURA 8. Comportamiento de ω_r como función de α , para $c = 0.01, l = 2$ y $n = 0$.

Esto significa que conforme c aumenta, la oscilación es menos intensa, es decir, la presencia de quintaesencia suprime la oscilación. Es importante mencionar, que en este caso particular, no hay una diferencia significativa en la parte real e imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi-normales para el caso escalar y electromagnético cuando c se incrementa. Este comportamiento puede entenderse debi-

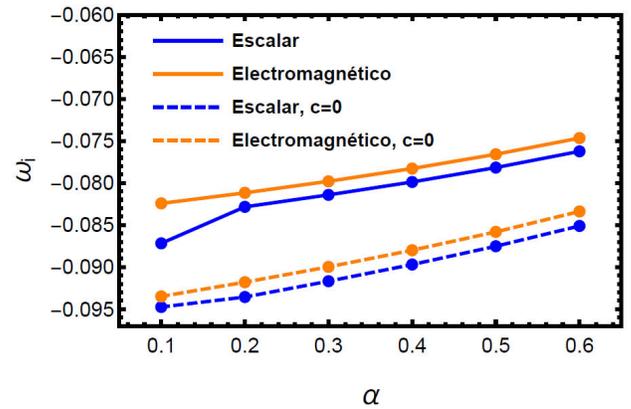


FIGURA 9. Comportamiento de ω_i como función de α , para $c = 0.01, l = 2$ y $n = 0$.

do a que cuando c se incrementa no existe una diferencia significativa entre los potenciales (ver Fig. 6).

En el límite Eikonal, el comportamiento de la velocidad angular (frecuencias reales) para valores de α en el rango $0.1 \leq \alpha \leq 0.6$ se muestra en la Fig. 12 y el comportamiento es similar al de las frecuencias calculadas empleando WKB a tercer orden.

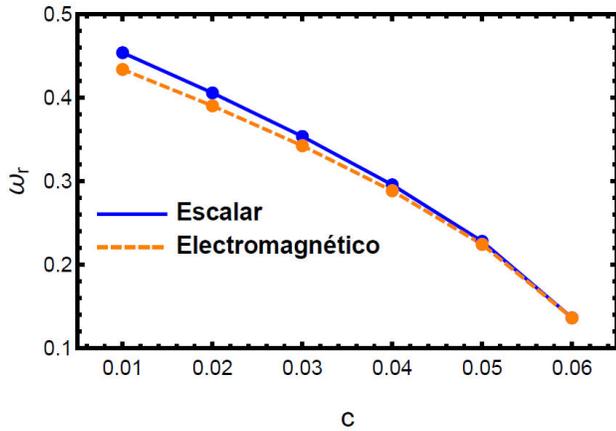


FIGURA 10. Comportamiento de ω_r como función de c , para $\alpha = 0.4, l = 2$ y $n = 0$.

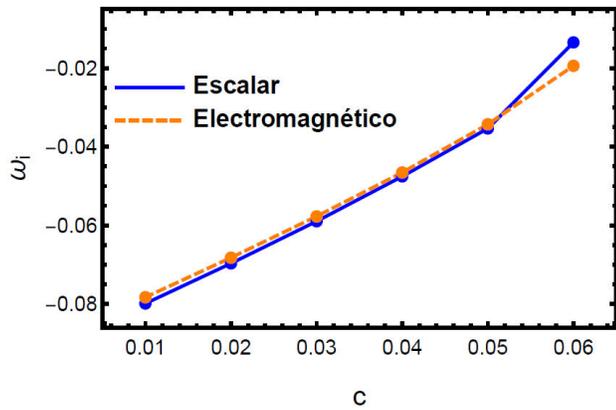


FIGURA 11. Comportamiento de ω_i como función de c , para $\alpha = 0.4, l = 2$ y $n = 0$.

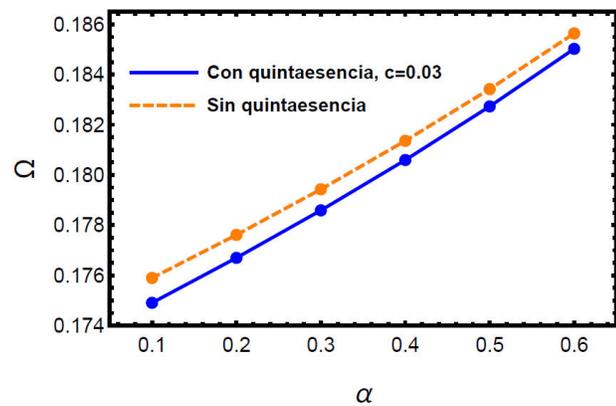


FIGURA 12. Comportamiento de Ω como función de α .

La razón de amortiguamiento mostrada en la Fig. 13, cuando α se incrementa, indica que el efecto de la quintaesencia provoca que las frecuencias de los modos cuasi-normales sean menos estables, de forma contraria a los datos obtenidos usando WKB.

Para valores pequeños de α , no existe una diferencia significativa en los valores de λ con y sin presencia de quintaesencia.

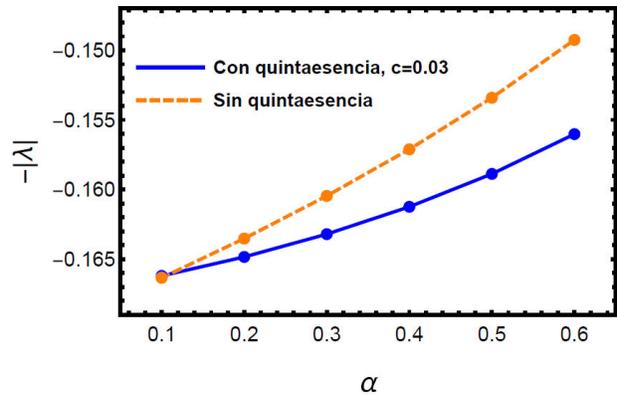


FIGURA 13. Comportamiento de λ como función de α .

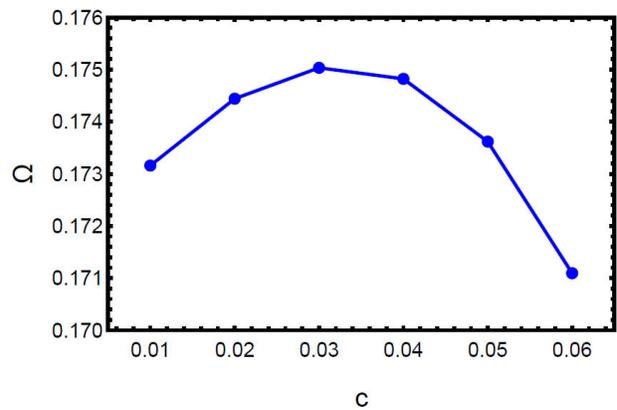


FIGURA 14. Comportamiento de Ω como función de c , con $\alpha = 0.4$.

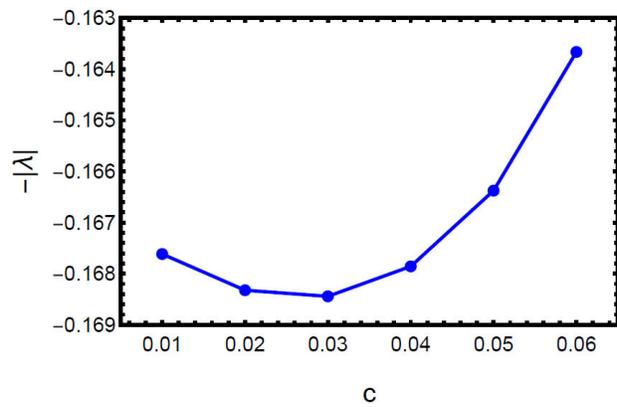


FIGURA 15. Comportamiento de λ como función de c , con $\alpha = 0.4$.

El comportamiento en el límite Eikonal cuando c se incrementa, muestra resultados de Ω similares a los obtenidos con el método WKB (ver Fig. 14). Aquí el efecto de c es atenuar las frecuencias de oscilación del agujero negro, mientras que en la Fig. 15, el comportamiento de λ indica que cuando c aumenta, las frecuencias de oscilación del agujero negro son más estables.

Cabe mencionar que en electrodinámica no lineal, se ha mostrado que la trayectoria de los fotones se modifica, es decir, los fotones no siguen las geodésicas nulas de la métrica del agujero negro, más bien siguen las geodésicas nulas de una métrica efectiva [42,43].

Estudios de los modos cuasi-normales de distintos agujeros negros en electrodinámica no lineal considerando la métrica efectiva [44], muestran comportamientos similares a los obtenidos en este trabajo, para el caso de Ω y λ . El efecto de la métrica efectiva, produce que las oscilaciones se atenúen, y una mayor estabilidad, como el comportamiento que se observa al considerar quintaesencia en el agujero negro de EGB.

7. Conclusiones

En este trabajo se estudia el agujero negro de Einstein-Gauss-Bonnet rodeado de quintaesencia, para el caso particular de $\omega = -2/3$, debido a que permite un tratamiento relativamente simple de las propiedades del agujero negro.

Los horizontes de eventos y el caso extremo son analizados. En la Fig. 4, se presentan los valores (α, c) en donde el agujero negro de Einstein-Gauss-Bonnet rodeado de quintaesencia tiene tres, dos o un horizonte.

Las frecuencias de los modos cuasi-normales para perturbaciones escalares y electromagnéticas son calculadas em-

pleando el método WKB a tercer orden y en el límite Eikonal. Los resultados obtenidos usando WKB, muestran un comportamiento similar en ω_r y ω_i con y sin la presencia de quintaesencia, donde el efecto de quintaesencia produce una disminución en el valor de ω_r , pero dichas oscilaciones son más estables (aumento de ω_i), para ambas perturbaciones.

En el límite Eikonal, el comportamiento de Ω (que se encuentra relacionado con ω_r), ante el incremento del parámetro c , es muy similar al caso WKB, es decir, conforme aumenta la presencia de quintaesencia, Ω disminuye. En el caso en el que α se incrementa, las oscilaciones se incrementan.

Cabe señalar que el amortiguamiento de las frecuencias de los modos cuasi-normales con y sin la presencia de quintaesencia producen un comportamiento diferente al caso WKB.

Al considerar la presencia de quintaesencia, en el límite Eikonal, se observa una menor estabilidad, este tipo de comportamiento también se presenta al tomar en cuenta la métrica efectiva que siguen los fotones en electrodinámica no lineal

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo de PROMEP, proyecto UAEH-CA-108 y al SNI-CONACYT, México.

1. S. Iyer. Black-hole normal modes: A wkb approach. ii. schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, **35** (1987) 3632.
2. V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, and V. T. Zanchin. Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, **79** (2009) 064016.
3. S. Fernando and Juan Correa. Quasinormal modes of the bardeen black hole Scalar perturbations. *Phys. Rev. D*, **86** (2012) 064039.
4. S. Fernando. Gravitational perturbation and quasi-normal modes of charged black holes in Einstein- Born-Infeld gravity. *Gen. Rel. Grav.*, **37** (2005) 585.
5. L. Jin, L. Kai, and Y. Nan. Nonlinear electromagnetic quasinormal modes and Hawking radiation of a regular black hole with magnetic charge. *Eur. Phys. J. C*, **75** (2015) 131.
6. S. Devi, R. Roy, and S. Chakrabarti. Quasinormal modes and greybody factors of the novel four dimensional Gauss -Bonnet black holes in asymptotically de Sitter space time scalar, electromagnetic and Dirac perturbations. *Eur. Phys. J. C*, **80** (2020) 760.
7. B. Zwiebach. Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, **156** (1985) 315.
8. A. Sen. Entropy function for heterotic black holes. *JHEP*, **03** (2006) 008.
9. F. Moura and Ricardo Schiappa. Higher-derivative corrected black holes Perturbative stability and absorption cross-section in heterotic string theory. *Class. Quant. Grav.*, **24** (2007) 361.
10. B. Zwiebach. Curvature Squared Terms and String i **156** (1985) 315.
11. S. Capozziello, V F Cardone, E Piedipalumbo, and C Rubano. Dark energy exponential potential models as curvature quintessence. *Classical and Quantum Gravity*, **23** (2006) 1205.
12. S. M. Carroll. Quintessence and the rest of the world Suppressing long-range interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 3067.
13. C. Armendariz-Picon, Viatcheslav F. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000) 4438.
14. T. Padmanabhan. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter. *Phys. Rev. D*, **66** (2002) 021301.
15. M. Gasperini, F. Piazza, and G. Veneziano. Quintessence as a runaway dilaton. *Phys. Rev. D*, **65** (2002) 023508.
16. V. V. Kiselev. Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.*, **20** (2003) 1187.
17. S. G. Ghosh, M. Amir, and S. D. Maharaj. Quintessence background for 5D Einstein - Gauss -Bonnet black holes. *Eur. Phys. J. C*, **77** (2017) 530.
18. S. Chen, B. Wang, and R. Su. Hawking radiation in a d-dimensional static spherically symmetric black hole surrounded by quintessence. *Phys. Rev. D*, **77** (2008) 124011.

19. K. Ghaderi and B. Malakolkalami. Thermodynamics of the schwarzschild and the reissner -nordström black holes with quintessence. *Nuclear Physics B*, **903** (2016) 10.
20. B.B. Thomas, M. Saleh, and T. C. Kofane. Thermodynamics and phase transition of the reissner -nordström black hole surrounded by quintessence. *Gen. Relativ. Gravit.*, **44** (2012) 2181.
21. R. Ndongmo, S. Mahamat, T. Bouetou Bouetou, and Timoleon Crepin Kofane. Thermodynamics of a rotating and non-linear magnetic-charged black hole in the quintessence field. *Phys. Scripta*, **96** (2021) 095001.
22. M. Saleh, B. B. Thomas, and T. Crepin Kofane. Quasinormal modes of gravitational perturbation around regular Bardeen black hole surrounded by quintessence. *Eur. Phys. J. C*, **78** (2018) 325.
23. Z.-W. Feng, G.-P. Li, and X.-T. Zu. Quasinormal Modes of Massless Scalar Field Perturbation in Reissner-Nordström-de Sitter Quintessence Spacetime. *Int. J. Theor. Phys.*, **55** (2016) 367.
24. J. M. Toledo and V. B. Bezerra. The Reissner -Nordström black hole surrounded by quintessence and a cloud of strings Thermodynamics and quasinormal modes. *Int. J. Mod. Phys. D*, **28** (2018) 1950023.
25. C.-Y. Wang, Y. Zhang, Y.-X. Gui, and J.- B. Lu. Dirac quasinormal modes of Reissner-Nordstroem black hole surrounded by quintessence. *Commun. Theor. Phys.*, **53** (2010) 882.
26. K. Ghaderi. Geodesics of black holes with dark energy. *Astrophys. Space Sci.*, **362** (2017) 218.
27. S. Fernando. Schwarzschild black hole surrounded by quintessence Null geodesics. *Gen. Rel. Grav.*, **44** (2012) 1857.
28. B. Malakolkalami and K. Ghaderi. The null geodesics of the Reissner -Nordström black hole surrounded by quintessence. *Mod. Phys. Lett. A*, **30** (2015) 1550049.
29. H. Shah, Z. Ahmad, and H. Hussain Shah. Quintessence background for 4d einstein-gauss-bonnet black holes. *Physics Letters B*, **818** (2021) 136383.
30. M. Rizwan, M. Jamil, and A. Wang. Distinguishing a rotating Kiselev black hole from a naked singularity using the spin precession of a test gyroscope. *Phys. Rev. D*, **98** (2018) 024015; [Erratum *Phys.Rev.D* **100** (2019) 029902].
31. A. J. M. Medved, Damien Martin, and Matt Visser. Dirty black holes Symmetries at stationary nonstatic horizons. *Phys. Rev. D* **70** (2004) 024009.
32. H. Nomura and T. Tamaki. Continuous area spectrum in regular black hole. *Phys. Rev. D*, **71** (2005) 124033.
33. J. Li and Y. Zhong. Quasinormal Modes for Electromagnetic Field Perturbation of the Asymptotic Safe Black. *Int. J. Theor. Phys.*, **52** (2013) 1538.
34. S. Iyer and C. M. Will. Black Hole Normal Modes A WKB Approach. I. Foundations and Application of a Higher Order WKB Analysis of Potential Barrier Scattering. *Phys. Rev. D*, **35** (1987) 3621.
35. V. Cardoso, J. P. S. Lemos, and S. Yoshida, Quasinormal modes and stability of the rotating acoustic black hole Numerical analysis. *Phys. Rev. D* **70** (2004) 124032.
36. S. R. Dolan. Quasinormal mode spectrum of a kerr black hole in the eikonal limit. *Phys. Rev. D*, **82** (2010) 104003 .
37. S. Hod. Black-hole quasinormal resonances Wave analysis versus a geometric-optics approximation. *Phys. Rev. D* **80** (2009) 064004.
38. J. Morgan, V. Cardoso, A. S. Miranda, C. Molina, and V. T. Zanchin. Quasinormal modes of black holes in anti-de sitter space A numerical study of the eikonal limit. *Phys. Rev. D*, **80** (2009) 024024.
39. M. Mondal, P. Pradhan, F. Rahaman, and I. Karar. Geodesic stability and quasi normal modes via lyapunov exponent for hayward black hole. *Modern Physics Letters A*, **35** (2020) 2050249.
40. H. Kodama and A. Ishibashi. Master equations for perturbations of generalized static black holes with charge in higher dimensions. *Prog. Theor. Phys.*, **111** (2004) 29.
41. N. Bretón and L. A. López. Quasinormal modes of nonlinear electromagnetic black holes from unstable null geodesics. *Phys. Rev. D*, **94** (2016) 104008.
42. M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim, and R. Klippert. Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, **61** (2000) 045001.
43. N. Bretón, T. Clark, and S. Fernando. Quasinormal modes and absorption cross-sections of Born -Infeld -de Sitter black holes. *Int. J. Mod. Phys. D*, **26** (2017) 1750112.
44. E. Chaverra, J. C. Degollado, Claudia Moreno, and O. Sarbach. Black holes in nonlinear electrodynamics: Quasinormal spectra and parity splitting. *Phys. Rev. D*, **93** (2016) 123013.