CONDICIONES A LA FRONTERA Y FORMALISMO S DE LA DISPERSION NUCLEAR

J.M.Lozano y F.M.Medina N.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Junio 7, 1952)

RESUMEN

The purpose of the present paper is to find the relation between the S-matrix formalism and the description of interactions by means of boundary conditions. It is shown that in the absence of an essential singularity at ∞ *for* $S(\kappa)$*, the dynamical description sugested in a natural way by the S-formalism, gives the same time-dependent wave functions that are obtained when the interactions are represented by boundary conditions. The dynamical description of the S-formalism is extended to the case when* $S(\kappa)$ *is given in terms of the general* $R(\kappa^2)$ *function of Wigner, i.e. to the case where* $S(\kappa)$ *may have an essential singularity at* ∞.

I. INTRODUCCION

La descripción dinámica de una disperión nuclear, con momento angular cero, producida al introducir un dispersor en un haz de particulas, ha sido estudiada como un problema de condiciones a la frontera[1]; también es posible tratar el mismo problema por consideraciones de la función S de dispersión.

La finalidad de este articulo es mostrar la conexión entre los dos tipos de tratamiento y hacer ver que son equivalentes para el caso en que $S(\kappa)$, que es una función meromórfica de κ no tenga singularidad esencial en el infinito. El formalismo general de la función S permite generalizar la descripción dinámica al caso en que la función S esté dada por la expresión

$$S(\kappa) = \frac{1 + i\kappa R(\kappa^2)}{1 - i\kappa R(\kappa^2)} \quad ,$$

donde $R(\kappa^2)$ es la función más general de Wigner[2]. Esto implica que $S(\kappa)$ puede tener singularidad esencial al infinito. En particular se demostrará que la descripción dinámica obtenida lleva al sistema del estado inicial, componente S de la onda plana, al estado final, superposición de la onda saliente y la dispersa.

II. PASO DE LAS CONDICIONES A LA FRONTERA AL FORMALISMO S

La dispersión nuclear uninivelar de partículas con momento angular cero se puede describir en el espacio de Fock mediante condiciones a la frontera[1]. Designando a la energía de resonancia del nucleo compuesto por $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\kappa_0^2$

y a la anchura en resonancia por $\Gamma_0 = \frac{1}{2}\,\kappa_0\, C^2$, se establece que la función de onda que describe el comportamiento dinámico del sistema referido a su centro de masa está dada por:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(r,k,t) \\ \psi_2\ (k,t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(k,\kappa) \begin{bmatrix} \phi_1(r,\kappa) \\ \phi_2\ (\kappa) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t)\ \kappa^2\ d\kappa \quad . \qquad (1)$$

En (1), $F(k,\kappa)$ es la transformada generalizada de Hankel de la función que representa la onda incidente, esto es:

$$F(k,\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \psi_1(r,k)\ \phi_1^*(r,\kappa)\ r^2\,dr + (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\ \psi_2\phi_2^*(\kappa)\ , \qquad (2)$$

donde

$$\phi_1(r,\kappa) = \frac{\kappa\ C^2}{\kappa_0^2 - \kappa^2 - i\kappa C^2}\left(\frac{\cos\ \kappa r}{\kappa r} + \frac{\kappa_0^2-\kappa^2}{\kappa C^2}\ \frac{\mathrm{sen}\ \kappa r}{\kappa r}\right) . \qquad (3)$$

La presente discusión se restringe al desarrollo en el tiempo de la primera componente de la función de Fock, que es aquella que representa al sistema en forma de dos partículas. También se supondrá que inicialmente $\psi_2(k,0) = 0$ y que $\psi_1(r,k,0)$ corresponderá a la componente de momento angular cero de una onda plana, esto es:

$$\psi_1(r,k,0) = \frac{\mathrm{sen}\ kr}{kr} \quad . \qquad (4)$$

La ecuación (2) y la primera componente de la ecuación (1) determinan el desarrollo temporal de la primera etapa, desde su estado inicial dado por (4), hasta su estado final, formado por la superposición de una onda incidente y otra saliente de amplitud distinta, pero de momento angular igualmente cero. Esta función puede llamarse función de Green del problema y se designará por $\bar{\Omega}(r,k,t)$.

Se trata de encontrar, por medio del formalismo S, una función $\Omega(r,k,t)$ que, para el proceso de dispersión uninivelar se reduzca a la $\bar{\Omega}(r,k,t)$ anterior. La función $\Omega(r,k,t)$ puede encontrarse en una forma natural como va a mostrarse a continuación.

En ausencia de dispersor la función $\Omega(r,k,t)$ tiene la forma de la onda incidente:

$$\Omega(r,k,t) = j_0(kr)\ \exp(-iEt) =$$
$$= \int_0^\infty \delta(\epsilon-E)\ \exp\ (-i\epsilon t)\ [j_0(\kappa r)]^*\ d\epsilon \quad . \tag{5}$$

Las igualdades[3]

$$\delta(\epsilon-E) = \delta_-\ (\epsilon-E) + \delta_+\ (\epsilon-E)$$

y
$$j_0(\kappa r) = \tfrac{1}{2}\ [h_0^-(\kappa r) + h_0^+(\kappa r)] \quad , \tag{6}$$

donde
$$h_0^\pm(\kappa r) = \frac{\exp\ (\pm\ i\kappa r)}{\pm\ i\kappa r} \quad , \tag{6a}$$

tienen una interpretación física bien conocida[4]: $\delta_-(\epsilon-E)$ y $h_0^-(\kappa r)$ significan una onda plana entrante en el espacio de energía y de configuración respectivamente y $\delta_+(\epsilon-E)$ y $h_0^+(\kappa r)$ significan una onda saliente en los respectivos espacios. Substituyendo (6) en (5) se tiene:

$$\Omega(r,k,t) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty [\delta_-(\epsilon-E) + \delta_+(\epsilon-E)] \times$$
$$\times\ [h_0^-(\kappa r)+h_0^+(\kappa r)]^* \times \exp(-i\epsilon t)\ d\epsilon \quad . \tag{5a}$$

Al introducir un dispersor solamente se altera la onda saliente, y puesto que la función $S(\kappa)$ esencialmente da la relación entre las amplitudes de las ondas saliente y entrante, se sugiere de inmediato que la definición apropiada para $\Omega(r,k,t)$ es la siguiente:

$$\Omega(r,k,t) = \tfrac{1}{2} P \int_0^\infty [\delta_-(\epsilon-E)+S(\kappa)\delta_+(\epsilon-E)] \exp(-i\epsilon t) \times$$

$$\times [h_0^-(\kappa r)+S(\kappa)h_0^+(\kappa r)]^* d\epsilon \quad . \qquad (7)$$

La interpretación de $\Omega(r,k,t)$ es clara[3], puesto que

$$[\delta_-(\epsilon-E) + S(\kappa)\ \delta_+(\epsilon-E)] \exp(-i\epsilon t) \quad ,$$

representa el estado del sistema en la representación de energía y momento angular cuando se ha introducido un dispersor. Por medio de la función

$$h_0^-(\kappa r) + S(\kappa)\ h_0^+(\kappa r) \quad ,$$

se pasa de dicha representación a la representación en el espacio de configuración. Entonces $\Omega(r,k,t)$ da la descripción dinámica en el espacio de configuración del estado en cuestión.

Para justificar la ecuación (7) se demostrará que $\Omega(r,k,t)$ se reduce a $\overline{\Omega}(r,k,t)$ cuando $S(\kappa)$ corresponde al caso uninivelar, esto es, cuando $S(\kappa)$ adquiere la forma:

$$S(\kappa) = \frac{\epsilon_0-\epsilon+i\ \Gamma_0 \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}}{\epsilon_0-\epsilon-i\ \Gamma_0 \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}} = \frac{\kappa_0^2-\kappa^2+iC^2\kappa}{\kappa_0^2-\kappa^2-iC^2\kappa} \qquad (8)$$

En efecto: substituyendo (8) en el primer factor de (7), teniendo en cuenta que

$$\delta_{\pm}(\epsilon-E) = \delta(\kappa^2-k^2) \pm \frac{i}{\pi(\kappa^2-k^2)} \quad , \tag{9}$$

se tiene:

$$[\delta_-(\epsilon-E) + S(\kappa)\ \delta_+(\epsilon-E)]\ \exp(-i\epsilon t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, S(\kappa)\kappa F(k,\kappa)\exp(-i\epsilon t),$$

donde $F(k,\kappa)$ se obtiene[1] como caso particular de (2) correspondiente a las condiciones iniciales dadas por (4).

Substituyendo (8) en el segundo factor de (7), éste adquiere la forma:

$$[h_o^-(\kappa r) + S(\kappa) h_o^+(\kappa r)]^* = 2S(\kappa)^{-1}\ \phi_1(r,\kappa) \quad ,$$

donde $\phi_1(r,\kappa)$ está dada por (3). Finalmente la integral (7) se convierte en:

$$\Omega(r,k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, P \int_0^\infty F(k,\kappa)\ {}^{*}\phi_1(r,\kappa)\exp(-i\epsilon t)\,\kappa^2 d\kappa \quad ,$$

que es precisamente la forma de $\bar{\Omega}(r,k,t)$, puesto que se identifica con la primera componente[1] de (1) cuando la onda incidente es $(kr)^{-1}$sen kr.

Se propone, entonces, la ecuación (7) como definición de la función de onda dependiente del tiempo del sistema cuando $S(\kappa)$ está dada por

$$S(\kappa) = \frac{1 + i\kappa R(\kappa^2)}{1 - i\kappa R(\kappa^2)} \quad , \tag{10}$$

donde la función $R(\kappa^2)$ es la función R más general de

Wigner[2], que es una función memoromórfica tal que el signo de la parte imaginaria de $R(\kappa^2)$ es igual al signo de la parte imaginaria de κ^2. Se demostrará en la sección IV que la $\Omega(r,k,t)$ definida por (7) lleva al sistema, también en este caso, desde su estado inicial (componente S de la onda incidente), hasta su estado final (superposición de la onda incidente y la dispersa). En la siguiente sección se analizarán algunas propiedades de la función $S(\kappa)$ que son necesarias para demostraciones posteriores.

III. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCION S

Las propiedades de la función S que tienen interés en la presente discusión son las siguientes:

a) $S(\kappa)^* = S(-\kappa)$, $S(\kappa)^* S(\kappa) = 1$ para κ real.

b) Los polos de la función $S(\kappa)$ están en la parte inferior del plano complejo κ o sobre el eje imaginario[5].

c) La función $S(\kappa)$ está acotada en la parte superior del plano complejo κ.

La propiedad a) se deduce inmediatamente de la definición de $S(\kappa)$ dada por (10).

Las propiedades b) y c) se pueden deducir fácilmente de las de la función $R(\kappa^2)$ como se muestra a continuación.

De la ecuación (10) se sigue que:

$$R(\kappa^2) = \frac{1}{i\kappa}\,\frac{S(\kappa)-1}{S(\kappa)+1} \quad .$$

Si para alguna κ_0, $|S(\kappa)| \to \infty$ cuando $\kappa \to \kappa_0$,

$$R(\kappa_0^2) = -\frac{1}{|\kappa_0|^2}\,(\kappa_{oy} + i\kappa_{ox}) \quad . \qquad \text{(a)}$$

Por la definición de la función $R(\kappa^2)$ se sigue que[2]:

$$\kappa_{ox}\,\kappa_{oy}\,R_y\,(\kappa_o^2) \geqslant 0 \; . \qquad \text{(b)}$$

Teniendo en cuenta (a), la expresión (b) se convierte en:

$$-\kappa_{ox}^2\,\kappa_{oy}\,R_y\,(\kappa_o^2) \geqslant 0 \; .$$

Finalmente, si $\kappa_{ox} \neq 0$, resulta $\kappa_{oy} < 0$. Sólo cuando $\kappa_{ox} = 0$, es posible que $\kappa_{oy} > 0$. Pero esto implica la presencia de estados estacionarios, la cual se excluye en el presente análisis. Se concluye, entonces, que la función $S(\kappa)$ no puede tender a infinito en la parte superior del plano complejo κ.

IV. FORMA INICIAL Y FINAL DE $\Omega(r,k,t)$

Con la ayuda de las propiedades de la función $S(\kappa)$ demostradas en la sección III, se puede demostrar que la función $\Omega(r,k,t)$ cumple con las condiciones inicial y final.

En efecto: puesto que

$$[h_o^{\pm}(\kappa r)]^* = h_o^{\mp}(\kappa r) = h_o^{\pm}(-\kappa r) \qquad ,$$

y utilizando la propiedad a) de la sección III, la función $\Omega(r,k,t)$ dada por (7) adquiere la forma:

$$\Omega(r,k,t) = \tfrac{1}{2}\,P\int_0^{\infty} h_o^{+}(\kappa r)\,[\delta_+(\epsilon-E)+S(\kappa)\,\delta_-(\epsilon-E)]\exp(-i\epsilon t)\,\kappa d\kappa$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\,P\int_0^{\infty} h_o^{+}(\kappa r)\,[\delta_+(\epsilon-E)+S(\kappa)\,\delta_-(\epsilon-E)]\ \times$$

$$\times\exp(-i\epsilon t)\,\kappa\, d\kappa \qquad (11)$$

en que se ha desarrollado la expresión (7) y en la integral que contiene al factor $h_0^-(\kappa r)$ se ha hecho la substitución $\kappa \to -\kappa$.

Substituyendo la expresión (9) en (11) e integrando se tiene:

$$\Omega(r,k,t) = \{\tfrac{1}{2}\, j_0(kr) + \tfrac{1}{4}\,[h_0^+(kr)S(k) + h_0^+(-kr)S(-k)]\} \times$$
$$\times \exp(-iEt) + \frac{i}{2\pi}\, P \int_0^\infty h_0^+(\kappa r) \times$$
$$\times \frac{S(\kappa) - 1}{\kappa^2 - k^2} \exp(-i\epsilon t)\, \kappa\, d\kappa \quad . \tag{12}$$

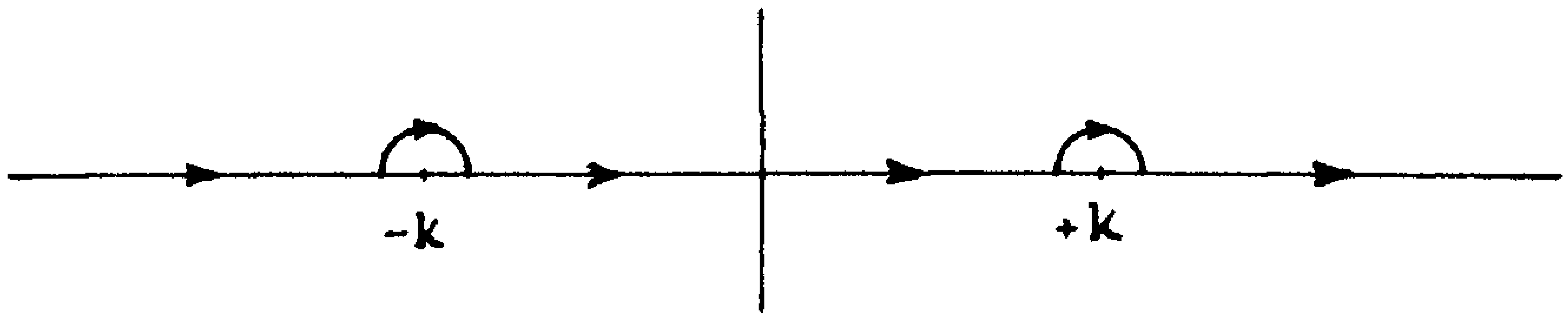

Fig. 1

Substituyendo el valor principal de la integral que aparece en (12) por una integral sobre el contorno C indicada en la figura 1 se tiene:

$$\Omega(r,k,t) = j_0(kr)\exp(-iEt) + \frac{i}{2\pi} \int_C h_0^+(\kappa r)\, \frac{S(\kappa)-1}{\kappa^2 - k^2} \times$$
$$\times \exp(-i\epsilon t)\, \kappa\, d\kappa \quad . \tag{13}$$

Se va a usar la expresión (13) para encontrar la forma inicial y final de $\Omega(r,k,t)$.

Para $t = 0$, la integral de la expresión (13) se reduce a:

$$\int_C h_0^+(\kappa r)\ \frac{S(\kappa)-1}{\kappa^2-k^2}\ \kappa\ d\kappa$$

Por la ecuación (6a) y debido a que la función $S(\kappa)$ está acotada en la parte superior del plano κ, el integrando tiende a cero cuando $|\kappa| \to \infty$ con $\kappa_y \geqslant 0$; entonces es posible cerrar por arriba y puesto que el integrando es analítico en toda esta región, se tiene que:

$$\int_C = \oint_\infty = 0$$

la expresión (13) queda:

$$\Omega(r,k,0) = j_0(kr) = \frac{\text{sen } kr}{kr} \quad ,$$

y la condición inicial se cumple.

Para encontrar la condición final se considera el contorno indicado en la figura 2.

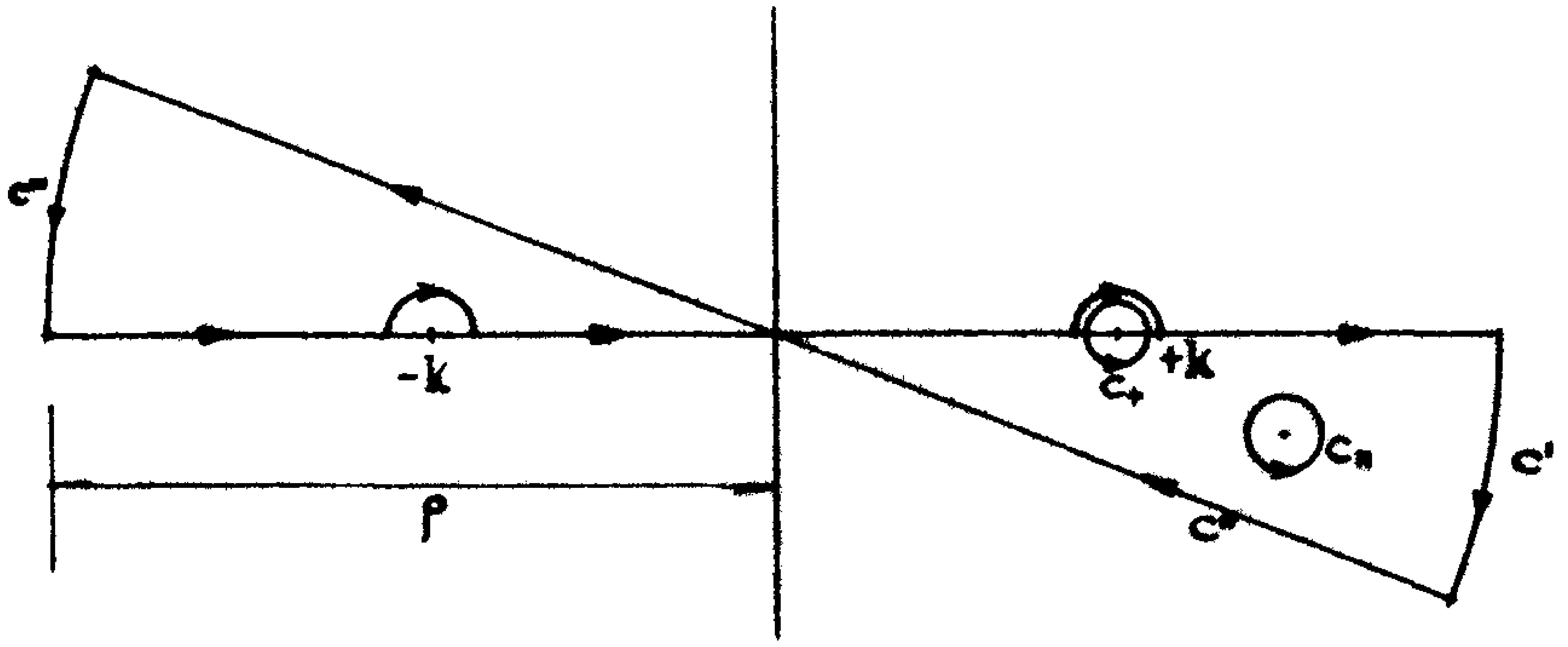

Fig. 2

Para ρ finita, el número de polos de la función meromórfica $S(\kappa)$ dentro del contorno considerado es finito, y por lo tanto el número de contornos C_n que rodean a los polos de $S(\kappa)$ es finito.

Llamando $\int_{-\rho}^{+\rho}$ a la integral sobre la parte del contorno C comprendida entre $-\rho$ y $+\rho$, se tiene:

$$\int_C = \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{-\rho}^{+\rho} + \int_{+\rho}^{+\infty}$$

Por otra parte,

$$\int_{-\rho}^{+\rho} + \int_{C'} + \int_{C''} + \int_{C'''} + \int_{C_+} + \sum_n \int_{C_n} = 0$$

Entonces

$$\left| \int_C + \int_{C_+} \right| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{-\rho} \right| + \left| \int_{+\rho}^{+\infty} \right| + \left| \int_{C'} + \int_{C''} + \int_{C'''} + \sum_n \int_{C_n} \right| \cdot \quad (14)$$

Por un razonamiento de análisis, se demuestra que dada $\epsilon > 0$, se puede encontrar ρ y T tal que para $t>T$ el miembro derecho de la desigualdad (14) se hace menor que ϵ, puesto que el integrando contiene $\exp(-|\kappa_x \kappa_y| t)$ que tiende a cero cuando t tiende a infinito. Por tanto:

$$\int_C + \int_{C_+} = 0 \quad ;$$

se tiene entonces

$$\int_C = - \int_{C_+} = - \pi i h_0^+(kr)[S(k)-1]\exp(-iEt) \qquad (15)$$

Substituyendo (15) en (13), se tiene que cuando $t \to \infty$,

$$\Omega(r,k,t) \to \{j_0(kr) + \tfrac{1}{2} h_0^+(kr)[S(k)-1]\} \exp(-iEt) =$$

$$= \tfrac{1}{2} [h_0^-(kr) + S(k) h_0^+(kr)] \exp(-iEt) ,$$

y la condición final se cumple.

Se agradece al Dr. Marcos Moshinsky la sugestión del tema del presente trabajo y su valiosa ayuda para la realización del mismo.

REFERENCIAS

1. M.Moshinsky, Phys.Rev., 84, 525, (1951)
2. E.P.Wigner, Ann. of Math., 53, 36, (1951); Proc.Camb.Phil. Soc., 47, 790, (1951); Ann. of Math., 55; 7, (1952)
3. P.A.M.Dirac. Principles of Quantum Mechanics (Claredon Press, Oxford, 1947). Tercera edición, pag. 60.
4. Referencia anterior, pag. 198.
5. W.Schützer y J.Tiomno, Phys.Rev. 83, 249 (1951).