SOBRE UNA CLASE DE TRANSFORMADAS DE INTERES EN LA DISPERSION NUCLEAR*

Marcos Moshinsky

Institutos de Física y Geofísica, Universidad de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido, Junio 7, 1952)

RESUMEN

The present note analyses the dynamical description of the scattering due to a short range potential. In particular, it develops a class of transforms that are useful for this dynamical description. A time-dependent Green function for the scattering process is discussed, that takes us from the initial state (plane wave) to the final state (plane plus scattered waves). This Green function can be used to give the motion of any wave packet that initially was outside the potential. The present paper complements a previous dynamical description of a scattering process, in which the interaction was represented by appropriate boundary

*Trabajo presentado en el Primer Congreso de la Sociedad Mexicana de Física, Querétaro, Qro., Abril 1950.

conditions.

I.- INTRODUCCION

En trabajos anteriores[1] se ha dado una descripción dinámica de la disperion, cuando ésta tiene lugar a través de la formación de un núcleo compuesto, representándose el proceso en un espacio de Fock apropiado. Para obtener las funciones de onda dependientes del tiempo del proceso anterior, fué necesario introducir un tipo especial de transformadas que eran apropiadas para la descripción del problema en el espacio de Fock.

En el presente trabajo vamos a obtener una clase de transformadas que juegan en el proceso de dispersión por un potencial, un papel similar al que las transformadas generalizadas de Hankel[1] tuvieron en la dispersión uninivelar.

El potencial dispersor que vamos a analizar aquí, va a ser un potencial de corto alcance, en el sentido restringido de que sus efectos no se hacen sentir mas allá de una distancia a del origen de coordenadas. Supondremos también que el potencial dispersor tiene simetría esférica. En la Fig. No. 1 se ilustra un potencial de este tipo.

En el presente trabajo solo obtendremos las transformadas apropiadas a la dispersión en onda S, ya que la generalización para momentos angulares distintos de cero es sencilla. Como es bien sabido, la dispersión en onda S es preponderante en aquellos casos en que la longitud de onda λ es grande comparada con el alcance a del potencial.

Escribiendo la función de onda (para onda S) en la forma $\psi = (\phi/r)$, y utilizando unidades en que $\hbar = m = c = 1$, donde m es la masa de la partícula, tenemos que ϕ satisface:

$$-\tfrac{1}{2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + V(r)\phi = i\ \frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1)$$

El potencial $V(r)$ al ser de corto alcance, está definido en la forma:

$$V(r) = \begin{cases} V(r) & \text{si } r \leqslant a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases} \quad , \qquad (2)$$

y para fijar las ideas supondremos que $V(r)$ es función continua de r con primera derivada contínua, y segunda derivada seccionalmente contínua, en el intervalo $0 \leqslant r \leqslant a$.

El problema que nos va a interesar será el de obtener un tipo de transformada, por medio de la cual podamos dar el comportamiento de cualquier paquete de onda inicial como función del tiempo. En particular las condiciones físicas usuales en el proceso de dispersión, harán que el paquete de onda inicial represente a la partícula fuera del potencial, y que además, el observador detecte el movimiento de la partícula en el curso del tiempo, también fuera del potencial. En tal caso podemos poner la condición inicial en la forma:

$$\phi\ (r,0) = f(r)\ , \qquad (3)$$

donde $f(r) = 0$ si $r < a$. La función $\phi(r,t)$ para $t>0$, nos va a interesar solo en el caso en que $r > a$.

Como es bien sabido, en ausencia del potencial, $\phi(r,t)$ puede obtenerse con ayuda de la transformada de Fourier ordinaria de $f(r)$ definida por:

$$\bar{F}(k) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(r) \text{ sen } kr\, dr \quad , \qquad (4a)$$

ya que por la propiedad recíproca de las transformadas, tenemos que:

$$\phi(r,t) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F(k) \text{ sen } kr \exp(-i \tfrac{1}{2} k^2 t) dk \tag{4b}$$

En la siguiente sección procederemos a obtener una generalización formal del desarrollo (4) para el caso de un potencial de corto alcance, y posteriormente, justificaremos este desarrollo formal.

II.- TRANSFORMADAS PARA LA DISPERSION POR UN POTENCIAL DE CORTO ALCANCE

De la ecuación (1) vemos que las eigenfunciones $u(\kappa,r)$ correspondientes a una energía definida $\epsilon = \frac{1}{2}\kappa^2$, satisfacen la ecuación:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + [\kappa^2 - 2V(r)]\, u = 0, \qquad 0 \leqslant r < \infty \; . \tag{5}$$

Designemos ahora por $w(\kappa,r)$ a una función de r definida en el intervalo $0 \leqslant r \leqslant a$ y que satisface las condiciones:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + [\kappa^2 - 2V(r)]\, w = 0 \; , \quad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{6a}$$

$$w(\kappa,0) = 0 \quad , \quad (dw/dr)_{r=0} = 1 \; . \tag{6b}$$

Por las características del potencial especificadas en (2), es evidente que $w(\kappa,r)$ está completamente definida por las condiciones (6).

Introducimos ahora una función $R(\kappa^2)$ bajo la forma:

$$R(\kappa^2) = \frac{w(\kappa,a)}{(dw/dr)_{r=a}} \tag{7}$$

Al intercambiar κ por $-\kappa$ en (6) vemos que las expresiones que definen a $w(\kappa,r)$ quedan invariantes, y por lo tanto, esa función como su derivada son funciones de κ^2. De aquí que la R sea a su vez una función de κ^2 como se indica en (7). De la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales[2], se ve que $R(\kappa^2)$ es función meromórfica de κ^2. Se tiene entonces que $R(\kappa^2)$ definida por (7) tiene todas las propiedades de la función R de Wigner[3].

Con ayuda de $w(\kappa,r)$ podemos construir una $u(\kappa,r)$ que satisface la ecuación (5) en todo el intervalo $0 \leqslant r < \infty$, y que además se reduce a sen kr en ausencia del potencial, bajo la forma:

$$u(\kappa,r) = \begin{cases} A(\kappa)\ w(\kappa,r) & \text{si} \quad r \leqslant a \\ (-2i)^{-1}\ [\exp(-i\kappa r)-\bar{S}(\kappa)\ \exp(i\kappa r)], & r \geqslant a\ . \end{cases} \tag{8}$$

Por la condición de continuidad de la $u(\kappa,r)$ y su derivada en la frontera $r = a$, $\bar{S}(\kappa)$ y $A(\kappa)$ quedan determinadas bajo la forma:

$$\bar{S}(\kappa) = S(\kappa)\ \exp\ (-i2\kappa a)\ .$$

$$= \frac{1 + i\kappa R(\kappa^2)}{1 - i\kappa R(\kappa^2)}\ \exp\ (-i2\kappa a)\ , \tag{9}$$

$$A(\kappa) = [w(\kappa,a)]^{-1}(-2i)^{-1}[\exp(-i\kappa a)-\bar{S}(\kappa)\exp(i\kappa a)]\ . \tag{10}$$

En ausencia del potencial, se tiene que $w(\kappa,r) = \kappa^{-1}$ sen κr, $\bar{S}(\kappa) = 1, A(\kappa) = \kappa$, y por lo tanto $u(\kappa,r) =$ sen κr para $0 \leqslant r < \infty$.

Una generalización formal del procedimiento seguido para obtener $\phi(r,t)$ en ausencia del potencial, puede ahora darse con la ayuda de las funciones $u(\kappa,r)$ de (8). Para el caso en que el potencial no admita estado estacionarios, (lo que significa que $S(\kappa)$ no tiene polos sobre la parte positiva del eje imaginario[4]), se define la transformada de $f(r)$ por la relación:

$$F(\kappa) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(r)\ u^*(\kappa,r)\ dr \ . \qquad (11a)$$

Por analogía con (4b), la función de onda en la presencia de un potencial dispersor, toma la forma:

$$\phi(r,t) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F(\kappa)\ u(\kappa,r)\ \exp\left(-i\ \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t\right)\ d\kappa \ . \qquad (11b)$$

De la definición (8) de $u(\kappa,r)$ se ve que $\phi(r,t)$ dada por (11b) satisface la ecuación (1). El único problema es demostrar entonces que se satisfacen las condiciones iniciales, esto es que:

$$(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F(\kappa)\ u(\kappa,r)\ d\kappa = f(r) \qquad (11c)$$

En la siguiente sección demostraremos con ayuda de una función de Green apropiada al problema, que la condición (11c) se cumple, por lo menos en el caso que $f(r)$ satisfaga las restricciones (3).

III.- LA FUNCION DE GREEN DEL PROBLEMA

Como se indico en (3), las condiciones en que tiene lugar un proceso de dispersión, hace que sólo nos interese conocer el desarrollo dinámico de los paquetes de onda fuera del potencial dispersor. Esto significa que queremos encontrar $\phi(r,t)$ solo para $r > a$, y que el paquete de onda inicial $f(r) = 0$ si $r < a$.

Con estas restricciones para $f(r)$ tenemos de (8) y (11) que:

$$F(\kappa) = (2i)^{-1} \exp(i\kappa a) \, [1+i\kappa R]^{-1} g(\kappa) \, , \tag{12a}$$

donde:

$$g(\kappa) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty \{[1+i\kappa R] \exp [i\kappa(r-a)]$$
$$-[1-i\kappa R] \exp [-i\kappa(r-a)]\} \, f(r) \, dr \, . \tag{12b}$$

Del hecho que $R(\kappa^2)$ sea función de κ^2 exclusivamente, vemos que $g(-\kappa) = -g(\kappa)$, esto es que $g(\kappa)$ es una función impar de κ. Utilizando esta propiedad de $g(\kappa)$, y la definición (11b) de $\phi(r,t)$, es fácil obtener para $r > a$ que:

$$\phi(r,t) = -\tfrac{1}{4} \, (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \{[1-i\kappa R]^{-1} \, g(\kappa) \, \times$$
$$\times \exp i \, [\kappa(r-a) - \tfrac{1}{2}\kappa^2 t]\} \, d\kappa \quad . \tag{13}$$

Con ayuda de la transformada de Fourier ordinaria $\bar{F}(\kappa)$ dada en (4a), podemos ahora introducir una función de Green apropiada al problema, en forma de que se pueda, con ayuda de ella, obtener el desarrollo en el tiempo de cualquier paquete de onda que satisfaga la condición (3). De (4a), y por la propiedad recíproca de las transformadas ordinarias de Fourier, tenemos que:

$$f(r) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \bar{F}(k) \text{ sen } kr \, dk \quad . \tag{14}$$

Introduciendo (14) en la definición (12b) de $g(\kappa)$, e intercambiando el orden de las integrales, vemos que:

$$g(\kappa) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty H(k,\kappa)\ \bar{F}(k)\ dk\ , \qquad (15a)$$

y el nucleo (Kernel) $H(k,\kappa)$ está dado por:

$$H(k,\kappa) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty \{[1+i\kappa R]\ \exp\ [i\kappa(r-a)]$$

$$-[1-i\kappa R]\ \exp\ [-i\kappa(r-a)]\}\ \text{sen}\ kr\ dr\ . \qquad (15b)$$

La integral en (15b) es ciertamente una integral impropia, pero es fácilmente evaluable en términos de las funciones[5]:

$$\delta_\pm\ (x) = \tfrac{1}{2}\ [\delta(x) \pm i\ (\pi x)^{-1}]\ . \qquad (16a)$$

La función de Green del problema, que designaremos por $\Omega(r,k,t)$, se define como:

$$\Omega(r,k,t) = -\tfrac{1}{4}\ (2/\pi)^{\frac{1}{2}}\ P \int_{-\infty}^{\infty} \{[1-i\kappa R]^{-1}\ H(k,\kappa)\ \times$$

$$\times \exp\ i\ [\kappa(r-a) - \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t]\}\ d\kappa\ . \qquad (17)$$

Como $H(k,\kappa)$ contiene a las funciones $\delta_\pm$, la integral en (17) tiene que interpretarse en el sentido del valor principal de Cauchy. Para los valores de $r > a$, para los cuales $\Omega(r,k,t)$ está definida, es claro que Ω satisface la ecuación (1). Mostraremos además en la siguiente sección que $\Omega(r,k,0) = \text{sen}\ kr$ para $r > a$.

Con ayuda de la función de Green, podemos ahora obtener la función de onda $\phi(r,t)$ para $r > a$ y para cualquier condición inicial que satisfaga la restricción (3). En efecto, si expresamos $\phi(r,t)$ en la forma:

$$\phi(r,t) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \Omega(r,k,t)\, \overline{F}(k)\, dk \ , \qquad (18)$$

vemos de (17) que para $r > a, \phi$ satisface la ecuación (1). Además, si $\Omega(r,k,0) = \text{sen } kr$, vemos de (14) que para $r > a$, $\phi(r,0) = f(r)$.

En la siguiente sección haremos ver la forma en que la función de Green depende de la función $S(k)$ del problema, y demostraremos las propiedades de la misma para $t = 0$.

IV.- PROPIEDADES DE LA FUNCION DE GREEN

Haciendo en (15b) el cambio de variable $r' = r - a$ y utilizando la relación[5]:

$$(2\pi)^{-1} \int_0^\infty \exp\,(\pm\, ixr')\, dr' = \delta_{\pm}\,(x) \quad , \qquad (16b)$$

así como la definición de $\mathcal{S}(k)$ dada en (9), es fácil obtener que:

$$\begin{aligned} E(k,\kappa) = -i(\pi/2)^{\frac{1}{2}}\, [1-i\kappa R(\kappa^2)]\, \{ & [e^{-ika} + S(\kappa)e^{ika}]\, \delta(\kappa+k) \\ & -[e^{ika} + S(\kappa)\, e^{-ika}]\, \delta(\kappa-k) \\ & -[e^{-ika} - S(\kappa)\, e^{ika}]\, i\, [\pi(\kappa+k)]^{-1} \\ & +[e^{ika} - S(\kappa)\, e^{-ika}]\, i\, [\pi(\kappa-k)]^{-1} \} \end{aligned} \qquad (19)$$

Introducimos (19) en la definición (17) de la función

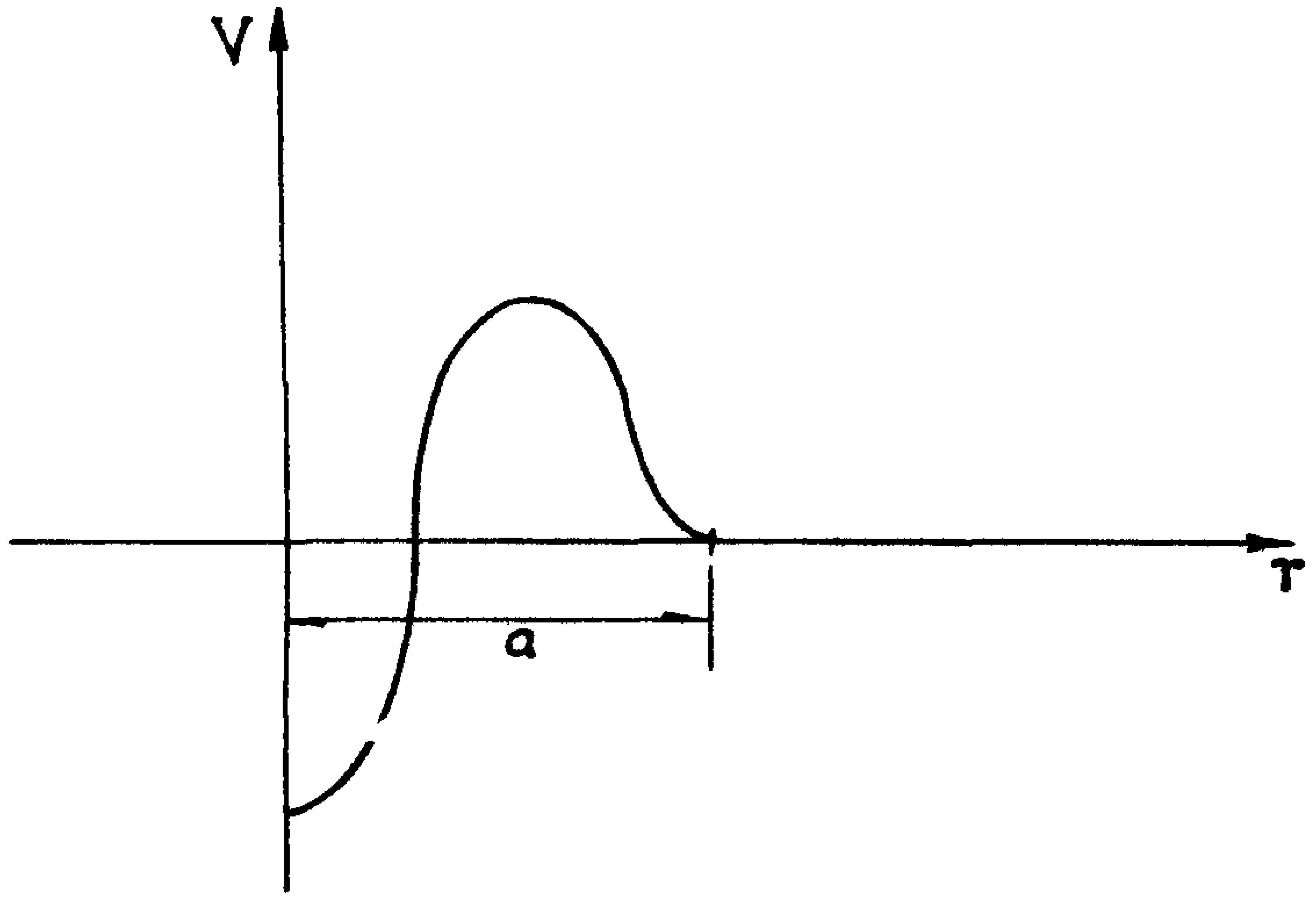

Fig. 1.- Potencial de corto alcance.

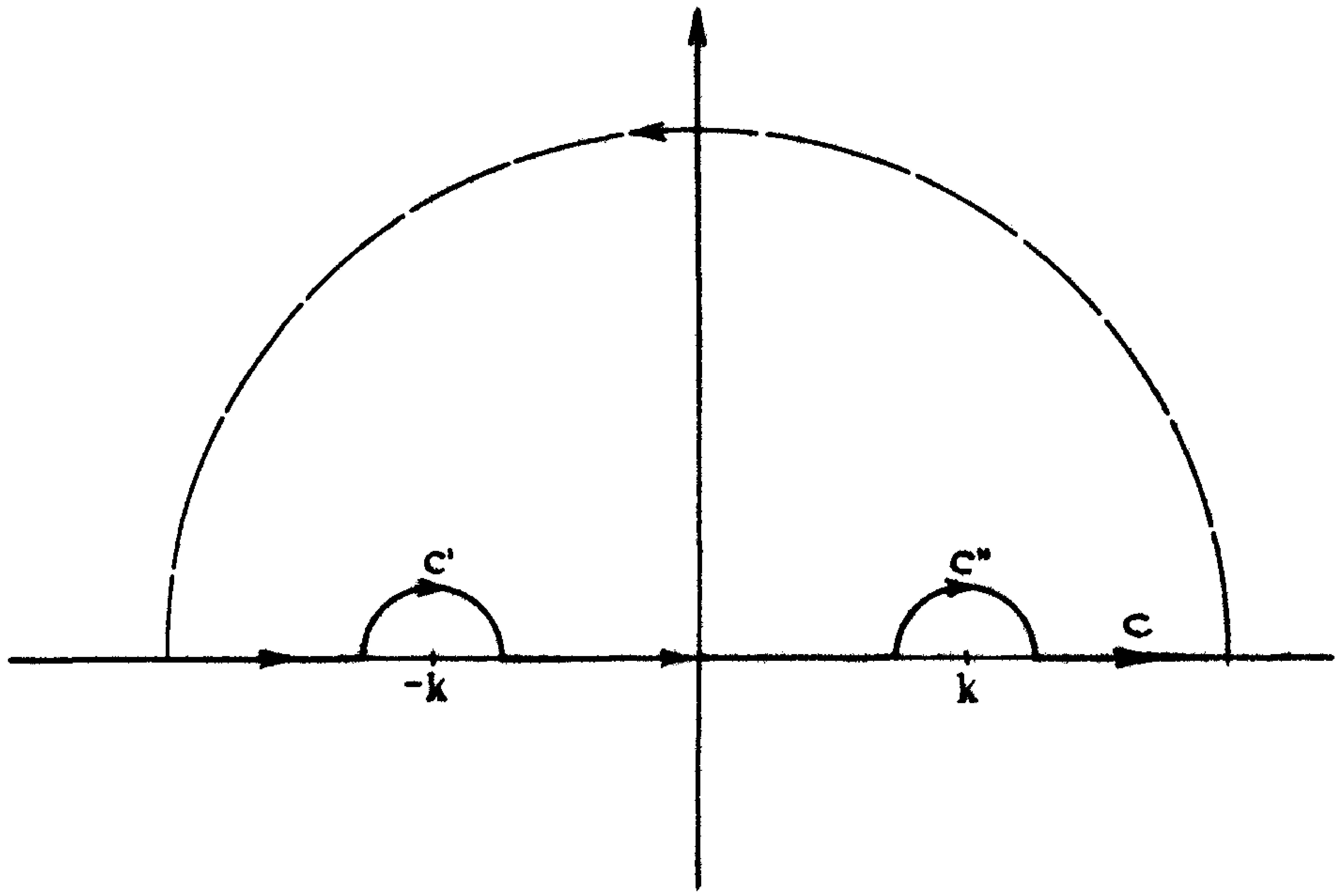

Fig. 2.- Contorno de integración.

de Green $\Omega(r,k,t)$. En lugar ahora de tomar el valor principal de la integral en (17), integraremos sobre el contorno C que evita los polos $\kappa = \pm k$, por medio de semi-circunferencias C', C'' que pasan por encima de esos puntos. De la Fig. No. 2, se ve de inmediato que:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} - \int_C = - \int_{C'} - \int_{C''} \quad . \qquad (20)$$

Las integrales sobre las semi-circunferencias C', C'' deben tomarse en el límite cuando los radios de las semi-circunferencias tienden a cero. De aquí se ve que:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} = \int_C + \pi i \text{ Res } (\kappa=-k) + \pi i \text{ Res } (\kappa=k) \quad . \qquad (21)$$

Las integrales en (17) que contienen funciones δ ordinarias se evaluan de inmediato, mientras que aquellas que contienen $(\kappa \pm k)^{-1}$, se transforman al contorno C. Después de un análisis sencillo se tiene finalmente:

$$\Omega(r,k,t) = \text{sen } kr \exp\left(-i \tfrac{1}{2} k^2 t\right)$$

$$+ (4\pi)^{-1} \int_C \left\{ \left[\frac{\exp(-ika)}{\kappa + k} - \frac{\exp(ika)}{\kappa - k} \right] \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\exp(ika)}{\kappa + k} - \frac{\exp(-ika)}{\kappa - k} \right] S(\kappa) \right\}$$

$$\exp i \left[\kappa(r-a) - \tfrac{1}{2} \kappa^2 t\right] d\kappa \qquad (22)$$

Como se ha indicado en la sección II, la presente discusión se restringe a aquellos potenciales que no admiten estados estacionarios. En tal caso no hay polos de la función $S(\kappa)$ en la parte positiva del eje imaginario[4]. Schützer y Tiomno[6] han mostrado que $S(\kappa)$ no puede tener polos en la parte superior del plano κ fuera del eje imaginario, y por lo tanto, en el presente caso $S(\kappa)$ es analítica en toda la parte superior del plano κ. Además, Lozano y Medina[7] han demostrado que toda función $S(\kappa)$ definida por (9), en donde la $R(\kappa^2)$ es una R de Wigner, está acotada por arriba en la parte superior del plano κ.

Teniendo en cuenta las propiedades de $S(\kappa)$ indicadas, vemos que para $r>a$ y $t=0$, se puede cerrar el contorno C por arriba y la contribución de la semi-circunferencia punteada tiende a 0 cuando el radio de la misma tiende a ∞. De aquí se concluye que:

$$\Omega(r,k,0) = \text{sen } kr \ , \quad \text{si} \quad r > a \ . \tag{23}$$

Finalmente, es fácil mostrar, deformando el contorno en forma apropiada[7,8], que cuando $t \to \infty$ se obtiene:

$$\Omega(r,k,t) \to \{\text{sen } kr - (2i)^{-1} \left[1-\bar{S}(k)\right] \exp\,(ikr)\} \times$$
$$\times \exp\,(-i\ \tfrac{1}{2}\ k^2 t) \quad , \tag{24}$$

esto es la forma estacionaria de la función de onda de la dispersión.

La función de Green obtenida nos da entonces la descripción dinámica del proceso de dispersión por un potencial de corto alcance.

REFERENCIAS

1.	M.Moshinsky	Phys. Rev. 84, 525, (1951)
2.	E.L. Ince	Ordinary Differential Equations. (Dover Publications, New York, 1944) p. 72.
3.	E.P. Wigner	Ann. of Math. 53, 36 (1951)
4.	Ch.Moller	K.Danske Vidensk.Selsk. 23, 1 (1945)
5.	W.Heisenberg	Z.Physik. 120, 519 (1943)
6.	W.Schützer y J. Tiomno	Phys. Rev. 83, 249 (1951)
7.	J.M.Lozano y F.M.Medina N.	Rev.Mex.Fis, 1,102, (1952)
8.	M. Moshinsky	Rev.Mex.Fis. 1, 28, (1952)