Vol.I,3 REVISTA MEXICANA DE FISICA 1952

DIFRACCION EN EL TIEMPO Y LA ECUACION DE DIRAC

Marcos Moshinsky

Institutos de Física y Geofísica, Universidad de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido, Octubre 31, 1952)

RESUMEN

The present note analyses the transient phenomena that appear when one opens a shutter for a beam of Dirac particles. The purpose of the analysis is to establish the time-dependent spinors which will be suitable for a dynamical description of the scattering of Dirac particles, following a procedure for spinless particles that was given elsewhere. The transient Dirac spinors are expressed in terms of Lommel functions of two variables and their asymptotic properties on the light cone and when $t \to \infty$ *are discussed. The behavior of the transient spinors under Lorentz transformations is analyzed.*

I.- INTRODUCCION

Uno de los problemas de interés en la Física Moderna es el de encontrar restricciones para la matriz S de un proceso de interacción, que proceda de principios generales tales como el de causalidad[1]. Aunque la posibilidad de una descripción causal de un proceso de interacción encuentra serias dificultades en algunas ramas de la teoría del campo[2], puede considerarse que las restricciones sobre la matriz S que provienen de una descripción causal, son de un caracter más fundamental que las restricciones obtenidas de los Hamiltonianos más o menos ad hoc, propuestos para los diferentes procesos.

En un trabajo anterior[3] se ha discutido la descripción causal de un proceso de dispersión de partículas sin spin, tanto para energías no relativistas como para las relativistas. Se mostró en dicho trabajo que las funciones de onda necesarias para la descripción causal, estaban íntimamente relacionadas con las funciones de onda que aparecían en el proceso de difracción en el tiempo[4]. Con el objeto de generalizar la descripción causal a particulas relativistas de spin $\frac{1}{2}$, se estudia previamente en esta nota el fenómeno de difracción en el tiempo asociado con funciones de onda que satisfacen la ecuación de Dirac.

El problema matemático que nos vamos a plantear consiste en encontrar la función de onda ψ que satisfaga la ecuación de Dirac[5]:

$$[\alpha_\lambda \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \mu\, \alpha_m]\, \psi = 0 \quad ; \qquad (1)$$

$$\lambda = 0, 1, 2, 3 \quad ; \quad x_0 = ct \quad ; \quad \mu = (mc/\hbar) \quad ,$$

y que inicialmente corresponda a una onda plana a la izquierda de un "obturador"[4], y sea cero a la derecha del mismo. Designando por x^3 a la dirección perpendicular al obturador, tenemos un problema uni-dimensional para el cual la ecuación (1) se reduce a:

$$\left[\frac{1}{i}\frac{\partial}{c\partial t} + \alpha_3 \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^3} + \mu\,\alpha_m\right]\psi = 0\ , \qquad (2a)$$

donde: $$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad \alpha_m = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\ , \qquad (2b)$$

$$\text{y}\quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ . \qquad (2c)$$

La proyección del operador del spin en la dirección x^3, dada por:

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\ , \qquad (3)$$

comuta con el Hamiltoniano de (2) y es por lo tanto, una integral de movimiento. Todo spinor ψ puede expresarse como una suma de la forma:

$$\psi = \tfrac{1}{2}(I + \sigma_3)\psi + \tfrac{1}{2}(I - \sigma_3)\psi\ , \qquad (4)$$

donde los dos sumandos corresponden respectivamente a estados con spines paralelos y antiparalelos a la dirección de propagación. Escogiendo el estado inicial con una dirección de spin definida, por ejemplo, paralela a la dirección de propagación, la función de onda continuará conservando ésta propiedad en el curso del tiempo y de (4) vemos que dos de los componentes del spinor serán 0. De (2) y (4), y designando a x^3 simplemente como x, vemos que el spinor formado por las dos componentes distintas de 0 satisface la ecuación:

$$\left[\frac{1}{i}\frac{\partial}{c\partial t} + \alpha\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mu\,\beta\right]\ \psi\ (x,t) = 0 \ , \tag{5a}$$

donde:

$$\psi\ (x,t) = \begin{bmatrix} \psi_1\ (x,t) \\ \psi_2\ (x,t) \end{bmatrix} \ ; \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5b}$$

La condición inicial impuesta por la presencia del obturador puede escribirse bajo la forma[6]:

$$\psi\ (x,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k}{E+\mu} \end{bmatrix}\ (E+\mu)^{\frac{1}{2}}\ \exp\ (ikx) \qquad \text{si} \quad x < 0 \ , \tag{6a}$$

$$\psi\ (x,0) = 0 \qquad \text{si} \quad x > 0 \ , \tag{6b}$$

donde E es la energía en unidades de longitud recíproca, $E = (k^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}$. El factor de normalización en (6a) se escogió en forma que la densidad de probabilidad ρ y la corriente j, definidas por:

$$\rho = \overline{\psi}\ \psi \qquad , \qquad j = \overline{\psi}\ \alpha\ \psi \qquad , \tag{7a}$$

donde $\overline{\psi}$ es el conjugado transpuesto de ψ, tuvieran inicialmente a la izquierda del obturador el valor:

$$\rho = 2E \quad , \qquad j = 2k \quad . \tag{7b}$$

Como (k,E) se comportan como un vector ante las transformaciones de Lorentz, vemos que (j,ρ) tiene la misma propiedad inicialmente.

Tenemos que encontrar ahora para $x,t > 0$ el spinor $\psi(x,t)$ que satisface la ecuación (5) y las condiciones iniciales (6). El problema que tenemos que resolver es un problema matricial de condiciones iniciales, y en la siguiente sección lo resolveremos con ayuda de la técnica general para este tipo de problemas, propuesta en una publicación anterior[7].

II.- EL PROBLEMA MATRICIAL DE CONDICIONES INICIALES

Si proponemos una solución del tipo $\psi(x,t) = u(x)\exp(-i\epsilon ct)$ para la ecuación (5a), se tiene que $u(x)$ satisface una ecuación diferencial matricial de la forma:

$$\left[-\epsilon\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] u(x) = 0 \quad . \tag{8a}$$

Como es bien sabido[8], las soluciones de esta ecuación matricial son del tipo:

$$u(\kappa,x) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \exp(i\kappa x) \quad , \tag{8b}$$

donde $\epsilon^2 = \kappa^2 + \mu^2$. Designando por ϵ a la energía positiva asociada con el momento κ, esto es:

$$\epsilon = (\kappa^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{9}$$

se tiene que las dos soluciones linealmente independientes de (8a), correspondientes a energías positivas y negativas, son respectivamente[8]:

$$u^+(\kappa,x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\kappa}{\epsilon+\mu} \end{bmatrix}\left(\frac{\epsilon+\mu}{2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(i\kappa x) \quad , \tag{10a}$$

$$u^{-}(\kappa, x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\kappa}{-\epsilon+\mu} \end{bmatrix} \left(\frac{-\epsilon+\mu}{-2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(i\kappa x) \quad , \qquad (10b)$$

Definimos ahora el producto escalar de dos spinores $u(x)$, $v(x)$ por la relación:

$$(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x) v(x)\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_i(x)\, v_i(x)\, dx \ , \qquad (11)$$

donde $\bar{u}(x)$ es el transpuesto conjugado de $u(x)$. Con esta definición y utilizando la relación:

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(\kappa''-\kappa')x\, dx = \delta(\kappa''-\kappa') \quad , \qquad (12)$$

vemos que:

$$(u^{+\prime}, u^{+\prime\prime}) = (u^{-\prime}, u^{-\prime\prime}) = \delta(\kappa'-\kappa'') \quad , \qquad (13a)$$

$$(u^{+\prime}, u^{-\prime\prime}) = (u^{-\prime}, u^{+\prime\prime}) = 0 \quad , \qquad (13b)$$

donde: $u^{\pm\prime} = u^{\pm}(\kappa', x)$, $u^{\pm\prime\prime} = u^{\pm}(\kappa'', x)$.

De (13) vemos que las $u^{\pm}(\kappa, x)$ definidas por (10) forman un sistema ortonormal de espectro continuo, con ayuda del cual se puede desarrollar cualquier spinor inicial. Designando por $v(x)$ al valor inicial de $\psi(x,t)$ dado por (6), tenemos que[7]:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u^{+}, v)\, u^{+}(\kappa, x) \exp(-i\epsilon ct)\, d\kappa$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} (u^{-}, v)\, u^{-}(\kappa, x) \exp(i\epsilon ct)\, d\kappa \quad , \qquad (14)$$

donde: $v(x) = \psi(x,0)$.

De (6), y utilizando la relación:

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{0} \exp\left[i(k-\kappa)x\right]dx = \delta_+(\kappa-k) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[\delta(\kappa-k) + i\pi^{-1}(\kappa-k)^{-1}] \,, \qquad (15a)$$

obtenemos:

$$(u^{\pm},v) = \left[1 + \frac{k\,\kappa}{(\pm\epsilon+\mu)\,(E+\mu)}\right] \left(\frac{\pm\epsilon+\mu}{\pm 2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} (E+\mu)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\delta_+(\kappa-k) \quad .(15b)$$

De (14) y (15) tenemos, finalmente:

$$\psi(x,t) = \tfrac{1}{2}\,(E+\mu)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k}{E+\mu} \end{bmatrix} \exp i(kx-Ect)$$
$$-(E+\mu)^{-\frac{1}{2}}(4\pi i)^{-1}P\int_{-\infty}^{\infty}\{(\epsilon+\mu)(E+\mu)+k\kappa\}\,\frac{\exp i(\kappa x-\epsilon ct)}{\kappa - k}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\kappa}{\epsilon+\mu} \end{bmatrix}\frac{d\kappa}{\epsilon}$$
$$-(E+\mu)^{-\frac{1}{2}}(4\pi i)^{-1}P\int_{-\infty}^{\infty}\{(-\epsilon+\mu)(E+\mu)+k\kappa\}\,\frac{\exp i(\kappa x+\epsilon ct)}{\kappa - k}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\kappa}{-\epsilon+\mu} \end{bmatrix}\frac{d\kappa}{(-\epsilon)} \quad (1$$

Como es usual, cuando se emplean las funciones $\delta_{\pm}$, las integrales deben de interpretarse en el sentido del valor principal de Cauchy[8], lo que se indica por la P que las precede. Las dos integrales en (16) dan respectivamente las contribuciones de los estados de energía positiva y negativa.

Para determinar la $\psi(x,t)$ que satisface (5) y la condición inicial (6), necesitamos tan solo evaluar explícitamente las integrales que aparecen en (16). Con ayuda del mismo cambio de variable utilizado para el caso de partículas sin spin[4], determinaremos estas integrales en la siguiente sección.

III.- EL SPINOR DEPENDIENTE DEL TIEMPO Y SUS PROPIEDADES

Los integrandos de (16) presentan puntos ramales para $\kappa = \pm i\mu$ por la definición de (9) de ϵ. Para eliminarlos en la primera integral de (16), hacemos el cambio de variable:

$$\zeta = \mu^{-1} (\kappa + \epsilon) \quad , \qquad (17a)$$

de donde tenemos:

$$\kappa = \tfrac{1}{2} \mu(\zeta-\zeta^{-1}), \quad \epsilon = \tfrac{1}{2} \mu (\zeta+\zeta^{-1}), \quad \epsilon+\mu = \tfrac{1}{2} \mu\zeta^{-1} (\zeta+1)^2. \qquad (17b)$$

Los límites de integración $[-\infty,\infty]$ de la variable κ, se transforman en $[0,\infty]$ para la ζ. En la segunda integral de (16) introducimos una ζ correspondiente a energías negativas $\zeta = \mu^{-1}(\kappa-\epsilon)$. Es claro que con esta ζ los límites de integración serán $[-\infty, 0]$ y el integrando de la segunda integral se vuelve idéntico al de la primera. Definiendo ahora:

$$z = \mu^{-1}(k+E) \quad , \qquad (17c)$$

tenemos que k, E pueden expresarse en términos de z en forma análoga a (17b), y podemos escribir la $\psi(x,t)$ de (16) bajo la forma:

$$\psi(x,t) = (\mu/2z)^{\frac{1}{2}}\{\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} z + 1 \\ z - 1 \end{bmatrix} \exp i \tfrac{1}{2} \mu [z(x-ct)-z^{-1}(x+ct)]$$

$$-(2\pi i)^{-1}P \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \zeta + 1 \\ \zeta - 1 \end{bmatrix} (z/\zeta)(\zeta-z)^{-1}\exp i \tfrac{1}{2} \mu[\zeta(x-ct)-\zeta^{-1} (x+ct)]d\zeta\}\cdot \qquad (18)$$

En lugar del valor principal de la integral en (18), podemos hacer uso de un contorno C que va de $-\infty$ a ∞ y rodea al polo $\zeta = z$ por medio de una semicircunferencia superior. Como:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} = \int_C + \pi\, i \, \mathrm{Res}(\zeta = z) \quad , \tag{19}$$

podemos escribir (18) en la forma:

$$\psi(x,t) = (\mu/2z)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (-2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{-1} \exp i \tfrac{1}{2} \mu[\zeta(x-ct) - \zeta^{-1}(x+ct)]\, d\zeta \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} z + 1 \\ z - 1 \end{bmatrix} (-2\pi i)^{-1} \int_C (\zeta - z)^{-1} \exp i \tfrac{1}{2} \mu\, [\zeta(x-ct) - \zeta^{-1}(x+ct)]\, d\zeta \right\}. \tag{20}$$

La primera integral en (20) es una transformada de Fourier bien conocida[9] que nos da:

$$\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t < (x/c) \quad , \\ J_0(\eta) & \text{si} & t > (x/c) \quad . \end{array} \tag{21a}$$

La segunda integral ha sido evaluada en el apéndice de la referencia 4 y nos da:

$$\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t < (x/c) \quad , \\ \omega(x,z,t) & \text{si} & t > (x/c) \quad , \end{array} \tag{21b}$$

donde $\omega(x,z,t)$ tiene la forma:

$$\omega(x,z,t) = \exp i \tfrac{1}{2} \mu\, [z(x-ct) - z^{-1}(x+ct)] - \sum_{n=1}^{\infty} (\xi/iz)^n J_n(\eta), \tag{22a}$$

y las $J_n(\eta)$ son funciones de Bessel de orden n y:

$$\xi = [(ct+x)/(ct-x)]^{\frac{1}{2}} \ , \quad \eta=\mu(c^2t^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \ . \quad (22b)$$

De (20) y (21) tenemos entonces que:

$$\psi(x,t) = 0 \qquad \text{si} \quad t < (x/c) \ , \qquad (23a)$$

$$\psi(x,t) = (\mu/2z)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} J_0(\eta) + \begin{bmatrix} z+1 \\ z-1 \end{bmatrix} \omega(x,z,t) \right\}, \quad \text{si } t > (x/c) \ . \quad (23b)$$

El spinor dependiente del tiempo $\psi(x,t)$ está dado en forma explícita por (23), y como es de esperarse, es distinto de 0 solo en el interior del cono de luz. Para obtener las propiedades asintóticas de $\psi(x,t)$ cuando $t \to (x/c)$ y cuando $t \to \infty$, recordamos que cuando $t \to (x/c)$ se tiene[4]:

$$\omega(x,z,t) \to 1 \ , \quad J_0(\eta) \to 1 \ , \qquad (24a)$$

mientras que si $t \to \infty$, se tiene[4]:

$$\omega(x,z,t) \to \exp i \tfrac{1}{2} \mu \, [z(x-ct) - z^{-1}(x+ct)], \quad J_0(\eta) \to 0 \ . \quad (24b)$$

De (23) y (24) tenemos que:

$$\psi(x,t) \to (\mu z/2)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{si} \quad t \to (x/c) \ , \qquad (25a)$$

$$\psi(x,t) \to (\mu/2z)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} z+1 \\ z-1 \end{bmatrix} \exp i \tfrac{1}{2} \mu [z(x-ct)-z^{-1}(x+ct)], \ \text{si } t \to \infty . \ (25b)$$

Si reemplazamos la z por su valor (17c), vemos que (25b) representa a la onda plana (6), como es de esperarse.

La densidad de probabilidad ρ y la corriente j. definidas por (7a) sufren sobre el cono de luz una discontinuidad, pasando de 0 a los valores:

$$\rho = \mu z \quad ; \qquad j = \mu z \quad ; \qquad \mu z = k + E \; . \tag{25c}$$

La función $\omega(x,z,t)$ dada por (22a) puede expresarse con la ayuda de las funciones de Lommel de dos variables $U_p(\tau,\eta)$ definidas por[10]:

$$U_p(\tau,\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \, (\tau/\eta)^{p+2m} \, J_{p+2m}(\eta) \; . \tag{26a}$$

Utilizando el desarrollo[11]:

$$\exp \tfrac{1}{2}\eta \, [(\xi/iz)-(\xi/iz)^{-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\xi}{iz}\right)^{n} J_n(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\xi}{iz}\right)^{-n} J_n(\eta) \; , \tag{26b}$$

vemos que $\omega(x,z,t)$ toma la forma:

$$\omega(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (\xi/iz)^{-n} \, J_n(\eta) \; . \tag{26c}$$

Poniendo $\tau = -z\eta\xi^{-1}$, vemos de (26a,c) que:

$$\omega(x,z,t) = U_0(-z\eta\xi^{-1},\eta) + i\, U_1(-z\eta\xi^{-1},\eta) \; . \tag{26d}$$

Las funciones de Lommel de dos variables $U_p(\tau,\eta)$ se introdujeron originalmente en conexión con problemas de difracción óptica[10], y vemos que también son útiles en los problemas de difracción en el tiempo.

IV.- INVARIANCIA ANTE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Es de interés investigar el efecto de una transformación de Lorentz sobre el spinor dependiente del tiempo definido por (23). Como el spinor es 0 fuera del cono de luz, y el cono de luz mismo permanece invariante ante las transformaciones de Lorentz, basta investigar el efecto de una transformación sobre la $\psi(x,t)$ definida por (23b) para puntos del interior del cono de luz. Como nuestro problema es uni-dimensional, solo tenemos que analizar el efecto de una transformación de Lorentz ordinaria sin incluir rotaciones en el espacio.

Designando con una estrella a las variables asociadas con el nuevo sistema de referencia, tenemos que:

$$ct^* = ct \cos h\,\theta + x \operatorname{sen} h\,\theta \quad , \qquad (27a)$$
$$x^* = ct \operatorname{sen} h\,\theta + x \cos h\,\theta \quad , \qquad (27a)$$

donde:

$$\cos h\,\theta = [1 - (v^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}} \quad , \qquad (27b)$$

y v es la velocidad relativa entre los sistemas de referencia. Como es bien sabido, el vector (k, E) de momento-energía sufre una transformación similar a (x, ct), de manera que:

$$\begin{aligned} E^* &= E \cos h\,\theta + k \operatorname{sen} h\,\theta \quad , \\ k^* &= E \operatorname{sen} h\,\theta + k \cos h\,\theta \quad . \end{aligned} \qquad (27c)$$

De (27), y teniendo en cuenta las definiciones (17c) y (22a) de z, ξ, η, tenemos que:

$$z^* = e^\theta z \quad , \quad \xi^* = e^\theta \xi \quad , \quad \eta^* = \eta \quad . \qquad (28)$$

De (28) vemos que $\omega(x,z,t)$ y $J_0(\eta)$ permanecen invariantes ante las transformaciones de Lorentz, ya que:

$$\omega\ (x^*, z^*, t^*) = \omega\ (x, z, t) \ , \quad J_0(\eta^*) = J_0(\eta) \quad . \qquad (29)$$

Ante una transformación de Lorentz, el spinor ψ se convierte en el spinor ψ^* dado por[5]:

$$\psi^* = \exp\ (\tfrac{1}{2}\ \alpha\ \theta)\ \psi \quad , \qquad (30)$$

y de la definición (5b) de α se tiene:

$$\exp\ (\tfrac{1}{2}\ \alpha\ \theta) = \begin{pmatrix} \cos h\ \frac{1}{2}\ \theta & \operatorname{sen} h\ \frac{1}{2}\ \theta \\ \operatorname{sen} h\ \frac{1}{2}\ \theta & \cos h\ \frac{1}{2}\ \theta \end{pmatrix} . \qquad (31)$$

De (23b) vemos que solo es necesario analizar el efecto del operador (31) sobre los spinores:

$$\begin{bmatrix} z^{\frac{1}{2}} \\ z^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} -z^{-\frac{1}{2}} \\ z^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} . \qquad (32a)$$

Utilizando la relación $z^* = e^\theta z$, los spinores (32a) se transforman respectivamente en:

$$\begin{bmatrix} z^{*\frac{1}{2}} \\ z^{*\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} -z^{*-\frac{1}{2}} \\ z^{*-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} . \qquad (32b)$$

De (32b) y (29) el spinor ψ en el nuevo sistema de referencia toma la forma:

$$\psi^* = (\mu/2z^*)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} J_0(\eta^*) + \begin{bmatrix} z^* + 1 \\ z^* - 1 \end{bmatrix} \omega(x^*, z^*, t^*) \right\}. \quad (33)$$

El spinor $\psi(x,t)$, definido por (23b) es por lo tanto, invariante ante las transformaciones de Lorentz.

REFERENCIAS

1.- W.Schützer y J.Tiomno. Phys.Rev. 83, 249, (1951)
M.Moshinsky. Phys. Rev. 84, 525, (1951)

2.- H.Yukawa. Phys. Rev. 77, 849, (1950)
W.Heisenberg. Comm.Pure and App.Math. 4, 15, (1952)

3.- M.Moshinsky. Memorias del Simposio sobre nuevas técnicas de investigación en Física. Rio de Janeiro 1952.

4.- M.Moshinsky. Phys.Rev. 88, 625, (1952)

5.- P.A.M.Dirac. Quantum Mechanics, Tercera edición (Oxford, Clarendon Press, 1947) pp. 253-259.

6.- W.Heitler. The Quantum theory of Radiation, 2nd.ed. (Oxford University Press) pp. 85-88.

7.- J.Adem y M.Moshinsky. Quart.App.Math. 9, 424, (1952)

8.- E.T.Whittaker y G.N.Watson. Modern Analysis (Macmillan Co., New York, 1943), p.117

9.- G.A.Campbell y R.M.Foster. Fourier Integrals for Practical Applications (Van Nostrand, New York, 1948), fórmula 655.2

10.- G.N.Watson. The Theory of Bessel Functions, 2nd.ed. (Cambridge University Press, 1944) p.537.

11.- Referencia 8, p.101.