

DISPERSION DE FOTONES POR UN CAMPO EXTERNO*

Fernando E. Prieto C.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido, Octubre 31, 1952)

RESUMEN

The computation methods of Feynman and Dyson are used in this paper to obtain the cross section for the scattering of photons in any given external field.

Consideraremos un proceso en el cual un fotón inicial con momento k_1 y polarización λ_1 , sufre la acción de un campo externo $A^{(\bullet)}(x)$, es dispersado, y pasa a un estado final con momento k_2 y polarización λ_2 .

Estado Inicial: Φ_1 un fotón en (k_1, λ_1) Estado Final: Φ_2 un fotón en (k_2, λ_2)

*Trabajo presentado en el Congreso Científico Mexicano, septiembre de 1951.

Para que el proceso se efectue se requieren, además del operador $A^{(e)}(x)$ que describe la acción del campo externo, dos operadores $A_\mu(x)$, uno para aniquilar el fotón inicial, y otro para crear el fotón final.

Ahora bien, la matriz S está dada por

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{c\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} J_n \quad (1)$$

con

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n P(-e\bar{\psi}(x_1)A(x_1)\psi(x_1), \dots, -e\bar{\psi}(x_n)A(x_n)\psi(x_n)) \quad (2)$$

A tercer orden, que es el menor orden al cual se puede efectuar el proceso de dispersión de fotones por un campo externo, la matriz S es

$$S_3 = -\left(\frac{i}{c\hbar}\right)^3 \frac{1}{3!} \int dx_1 dx_2 dx_3 \times \\ \times P(-e\bar{\psi}(x_1)A(x_1)\psi(x_1), -e\bar{\psi}(x_2)A(x_2)\psi(x_2), - \\ -e\bar{\psi}(x_3)A(x_3)\psi(x_3)) \quad (3)$$

Los operadores de aniquilación y creación de electrones $\bar{\psi}$ y ψ , deben asociarse en parejas de todas las maneras posibles. Sean estas parejas $(\bar{\psi}(x_{r_1}), \psi(x_{r_1}))$, en donde $i = 1, 2, 3$ y (r_1, r_2, r_3) es alguna permutación de los índices $1, 2, 3$ tal que $i \neq r_i$.

De las seis permutaciones posibles de tres índices, sólo dos satisfacen la condición $i \neq r_i$ para todo i , las gráficas correspondientes a estas permutaciones son

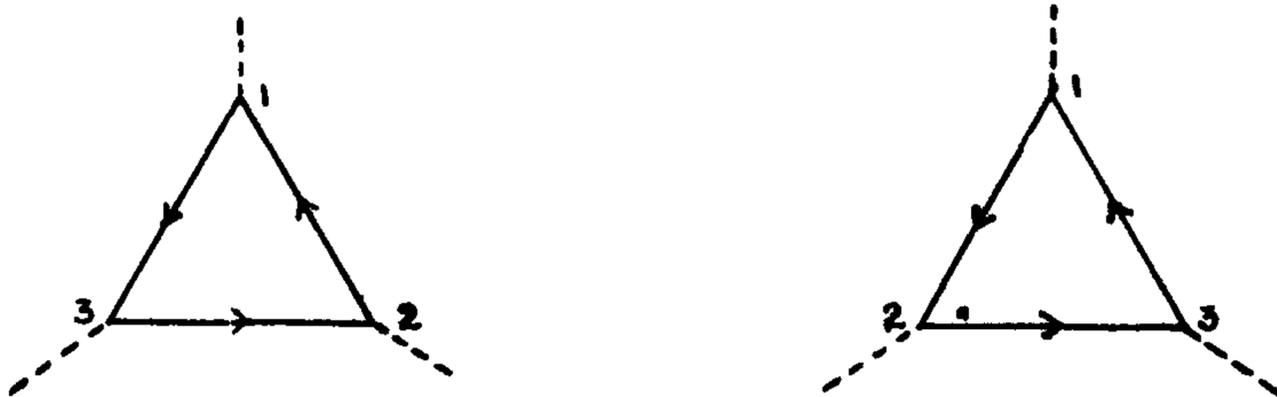


Fig. 1

y puesto que ambas gráficas son impares, su contribución a los elementos de matriz de S es nula como consecuencia del teorema de Furry¹. Debemos calcular pues efectos de cuarto orden por lo menos. En este caso la matriz S es

$$S_4 = \left(\frac{i}{c\hbar}\right)^4 \frac{1}{4!} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 P(-e\bar{\psi}(x_1)A(x_1)\psi(x_1), \\ , -e\bar{\psi}(x_2)A(x_2)\psi(x_2), -e\bar{\psi}(x_3)A(x_3)\psi(x_3), \\ , -e\bar{\psi}(x_4)A(x_4)\psi(x_4)) \quad (4)$$

Dos de los operadores $A(x)$ deben representar la acción del campo externo, y los otros dos deben aniquilar y crear los fotones inicial y final respectivamente. Debemos considerar ahora las permutaciones de cuatro índices 1, 2, 3, 4 tales que $i \neq r_i$. De las 24 permutaciones posibles, sólo 9 satisfacen la condición $i \neq r_i$. Las gráficas correspondientes a estas permutaciones son las indicadas en la figura 2.

Las tres últimas gráficas, por ser desconexas, no dan contribución a los elementos de matriz de S^2 . De las otras seis gráficas puede demostrarse fácilmente que todas dan la misma contribución a los elementos de matriz de S .

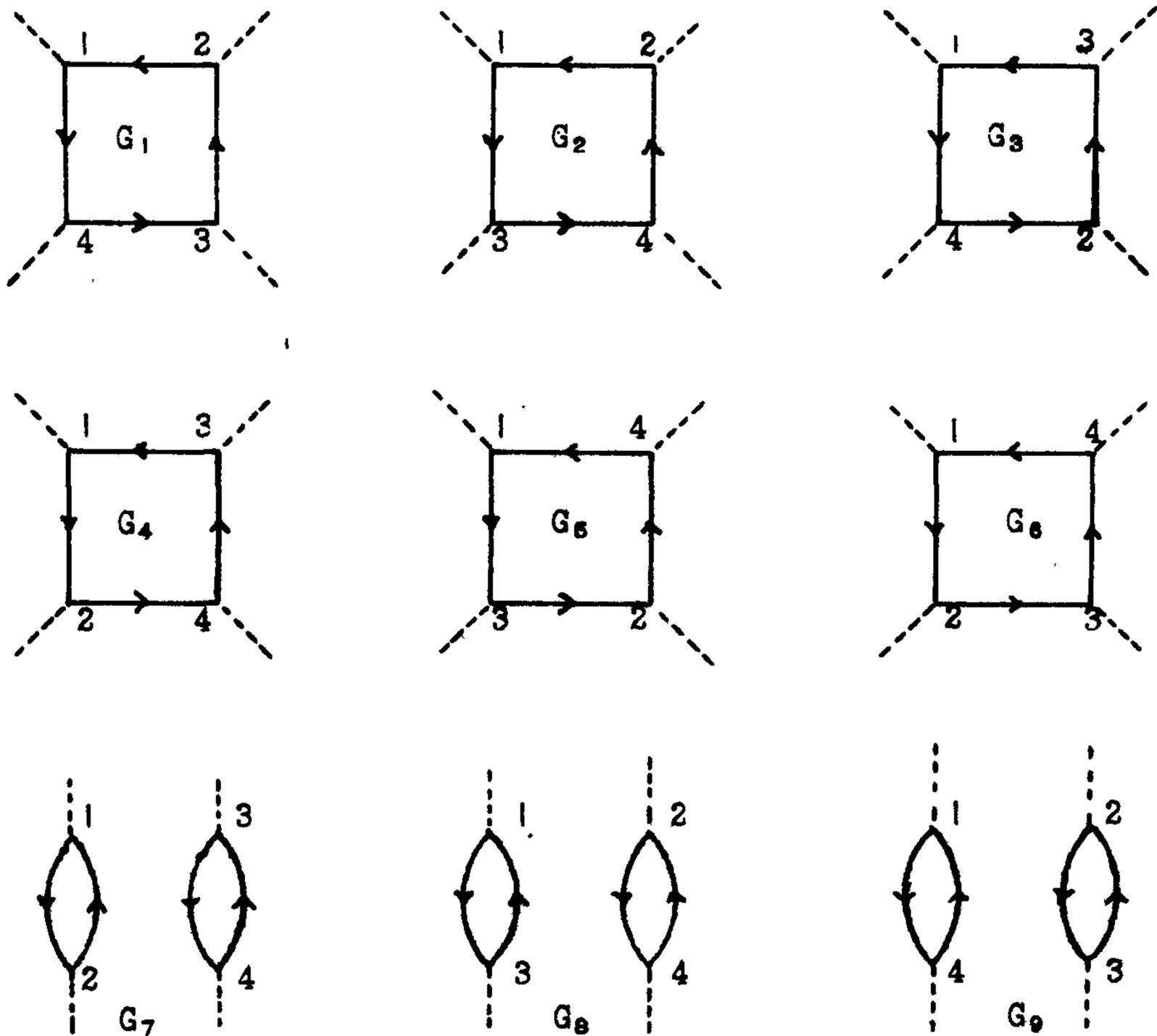


Fig. 2

La amplitud de probabilidad está dada por los elementos de matriz del operador

$$J(g) = \sum_{i=1}^6 J(G_i) = 6J(G_1) \quad (5)$$

con

$$J(G_1) = -\frac{1}{24} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^4 \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \text{Tr} [\mathcal{K}(x_1) S_F(x_2-x_1) \times \\ \times \mathcal{K}(x_2) S_F(x_3-x_2) \mathcal{K}(x_3) S_F(x_4-x_3) \mathcal{K}(x_4) S_F(x_1-x_4)] \quad (6)$$

Hasta ahora hemos tomado en cuenta únicamente la estructura electrónica, resta por considerar la estructura fotónica del proceso, o sea todas las maneras posibles en que cuatro operadores A_1, A_2, A_3, A_4 , pueden aniquilar el fotón inicial, y crear el fotón en el estado final, los dos restantes operadores representando la acción del campo externo. Hay en total doce posibilidades que se indican en la tabla siguiente:

operador de aniquilación	1			2			3			4		
operador de creación	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
Campo	3	2	2	3	1	1	2	1	1	2	1	1
Externo	4	4	3	4	4	3	4	4	2	3	3	2

Para cada una de estas posibilidades existe un operador del tipo (6) cuyos elementos de matriz deben añadirse para obtener la amplitud de probabilidad.

Al construir las gráficas correspondientes a todas las posibles estructuras fotónicas se ve que solo hay dos tipos diferentes que son

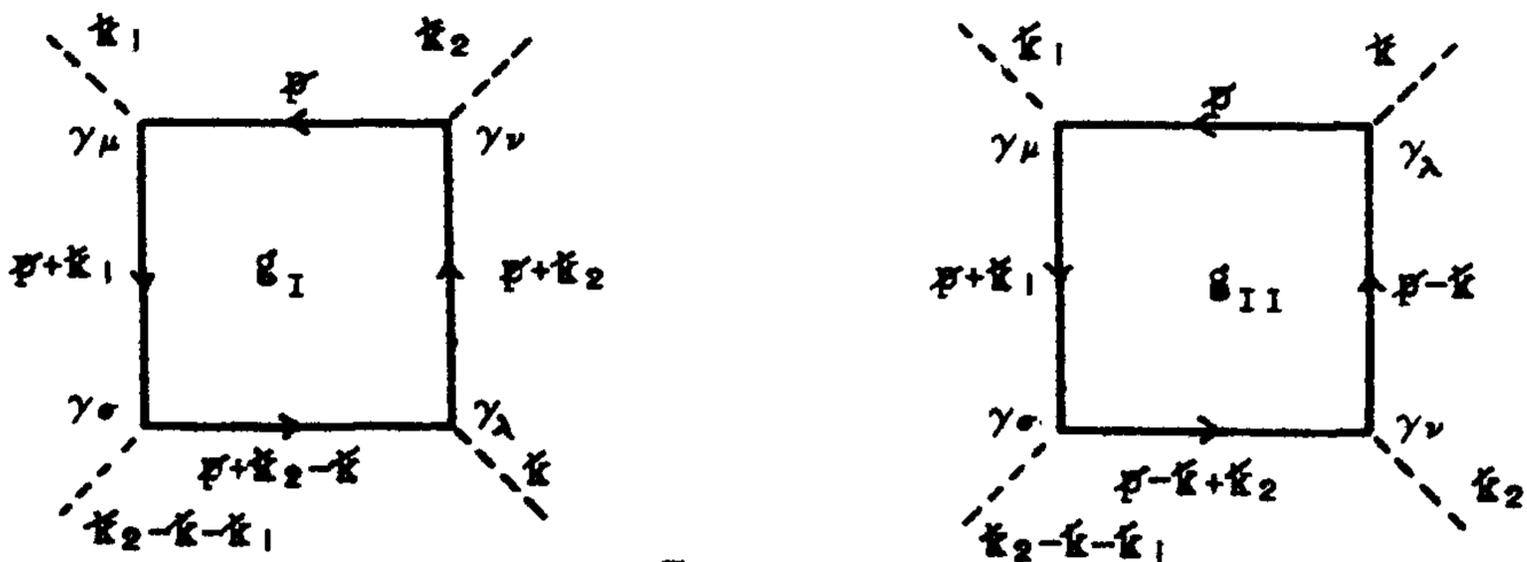


Fig. 3

La primera aparece 8 veces y la segunda 4. Los elementos de matriz correspondientes a estas gráficas y escritos por conveniencia en la representación momental son

$$K(g_I) = - \frac{i\alpha^2\pi^2}{4c\hbar} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) \frac{1}{(2\pi)^8} \times$$

$$\times \int (dk) A_\lambda^{(\circ)}(-k) A_\sigma^{(\circ)}(k_2-k_1+k) T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2) \quad (7)$$

$$K(g_{II}) = - \frac{i\alpha^2\pi^2}{4c\hbar} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) \frac{1}{(2\pi)^8} \times$$

$$\times \int (dk) A_\lambda^{(\circ)}(-k) A_\sigma^{(\circ)}(k_2-k_1+k) T_{\mu\lambda\nu\sigma}(k_2, k_1, k) \quad (8)$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2) = \frac{1}{i\pi^2} \int (dp) \times$$

$$\times \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i\gamma p - \kappa}{p^2 + \kappa^2} \gamma_\nu \frac{i\gamma(p+k_2) - \kappa}{(p+k_2)^2 + \kappa^2} \gamma_\lambda \frac{i\gamma(p+k_2+k) - \kappa}{(p+k_2+k)^2 + \kappa^2} \gamma_\sigma \frac{i\gamma(p+k_1) - \kappa}{(p+k_1)^2 + \kappa^2} \right] \quad (9)$$

La amplitud de probabilidad es entonces

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = 8 K(g_I) + 4 K(g_{II}) \quad (10)$$

y puede escribirse en la forma

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = - \frac{i\alpha^2\pi^2}{c\hbar} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) P_{\mu\nu}(k_1, k_2) \quad (11)$$

en la que

$$P_{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int (dk) A_\lambda^{(\circ)}(-k) A_\sigma^{(\circ)}(k_2-k_1+k) \times$$

$$\times [2T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2) + T_{\mu\lambda\nu\sigma}(k_2, k_1, k)] \quad (12)$$

La expresión para la amplitud de probabilidad puede transformarse a

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = - \frac{i\alpha^2}{8\pi\hbar \sqrt{\nu_1 \nu_2}} \epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) P_{\mu\nu}(k_1, k_2) \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2) \quad (13)$$

en la que ν_1 y ν_2 son las frecuencias de los fotones inicial y final respectivamente, y $\epsilon_\mu(k, \lambda)$ es un cuadrivector unitario que caracteriza a un fotón con momento k y polarización λ .

La probabilidad de transición entre los estados (k_1, λ_1) y (k_2, λ_2) es entonces

$$P_{1 \rightarrow 2} = |\Phi_{1 \rightarrow 2}|^2 = \frac{\alpha^4}{64 \pi^2 \hbar^2 \nu_1 \nu_2} |\epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) P_{\mu\nu}(k_1, k_2) \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2)|^2 \quad (14)$$

Vamos a calcular ahora la sección de dispersión para un fotón con momento k_1 y polarización, λ_1 . La densidad de energía por unidad de frecuencia y por unidad de ángulo sólido en la dirección \underline{k}' es³

$$u(\nu_1, \underline{k}_1, \lambda_1) = \frac{h\nu_1^3}{c^3} n(k_1, \lambda_1) \quad (15)$$

y puesto que solo hay un fotón en el estado (k_1, λ_1) , se tiene

$$u(\nu_1, k_1, \lambda_1) = \frac{h \nu_1^3}{c^3} \quad (16)$$

entonces

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{c^3}{h \nu_1^3} u(\nu_1, \underline{k}_1, \lambda_1) P_{1 \rightarrow 2} \quad (17)$$

Ahora bien, la probabilidad de que un fotón con cual-

quier momento y cualquier polarización sea dispersado con momento \underline{k}_2 y polarización λ_2 es

$$\begin{aligned}
 P(\underline{k}_2, \lambda_2) &= \sum_{\lambda} \int dK P_{1 \rightarrow 2} = \sum_{\lambda} \int dK \frac{c^3}{h \nu_1^3} u(\nu_1, \underline{k}_1, \lambda_1) P_{1 \rightarrow 2} = \\
 &= \sum_{\lambda} \int \frac{8\pi^3}{h \nu_1^3} \nu^2 u(\nu_1, \underline{k}_1, \lambda_1) P_{1 \rightarrow 2} d\nu d\Omega \quad (17)
 \end{aligned}$$

pero para fotones monocromáticos, polarizados en la dirección λ_1 y moviéndose \underline{k}_1 , se tiene

$$u(\nu_1, \underline{k}_1, \lambda_1) = u_1 \delta(\nu - \nu_1) \delta_{\lambda, \lambda_1} \delta(\Omega) \quad (18)$$

lo cual reduce (17) a

$$P(\underline{k}_2, \lambda_2) = \frac{8 \pi^3}{h \nu_1} u_1 P_{1 \rightarrow 2} \quad (19)$$

Pero el flujo de fotones incidentes es

$$|S_1| = \frac{u_1 c}{h \nu_1} \quad (20)$$

así que

$$P(\underline{k}_2, \lambda_2) = \frac{8 \pi^3}{c} |S_1| P_{1 \rightarrow 2} \quad (21)$$

La probabilidad de que ocurra una dispersión, sin importar el momento o la polarización del fotón disperso es

$$P = \sum_{\lambda_2} \int P(\underline{k}_2, \lambda_2) d\underline{k}_2 = \frac{(2\pi)^3}{c} \sum_{\lambda_2} \int |S_1| P_{1 \rightarrow 2} |\underline{k}_2|^2 d|\underline{k}_2| d\Omega \quad (22)$$

dividiendo esta probabilidad entre el flujo incidente se obtiene la sección transversal para la dispersión de fotones

monocromáticos y polarizados, por un campo externo; esta sección es

$$\sigma = \frac{(2\pi)^3}{c} \sum_{\lambda_2} \int P_{1 \rightarrow 2} |k_2|^2 d|k_2| d\Omega \quad (23)$$

y la sección diferencial resulta

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^3}{c} \sum_{\lambda_2} \int P_{1 \rightarrow 2} |k_2|^2 d|k_2| \quad (24)$$

e insertando el valor dado en (14) para P se obtiene finalmente

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^2 \alpha^4}{16\hbar^2 \nu_1 c^2} \sum \int |k_2| \left| \epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) P_{\mu\nu}(k_1, k_2) \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2) \right|^2 d|k_2| \quad (25)$$

La fórmula (25) permite, una vez especificado el campo externo, encontrar la sección de dispersión correspondiente.

El autor desea expresar su agradecimiento al Prof. Alejandro Medina por la sugestión del problema y por la valiosa ayuda prestada para la solución del mismo.

Nota.- Cuando se estaba celebrando el Congreso Científico Mexicano, en el cual se presentó este trabajo, se recibió en México el número del 15 de agosto de 1951 del Physical Review, número que contiene un trabajo de R. Karplus y M. Neuman⁴ titulado "The Scattering of light by light", en una de cuyas secciones se ataca el problema de la dispersión de la luz por un campo externo. El resultado encontrado por el presente autor coincide, salvo diferencias de notación,

con el reportado por los autores americanos.

REFERENCIAS.

- 1.- W.H. Furry, Phys.Rev. 51, 125 (1937) ;
F.J. Dyson, Phys.Rev. 75, 1736 (1949).
- 2.- F.J. Dyson, Phys.Rev. 75, 486 (1949) .
- 3.- P.A.M. Dirac, Quantum Mechanics, 3rd.ed., p.238,
(Oxford at the Clarendon Press, 1947).
- 4.- K. Karplus y M. Neuman, Phys.Rev. 83, 776 (1951).